ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

Sur un „lemme fondamental" de N. Rouche, P. Habets et M. Laloy

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous allons donner un exemple qui montre que le „lemme fondamental" de N. Rouche, P. Habets et M. Laloy, l'inégalité faible $\psi(t) \geq 0$ doit être remplacée par l'inégalité $\psi(t) > 0$ dans (α, ∞). Dans la suite nous démontrons un théorème sur l'allure asymptotique de $\psi(t)$ plus général que celui de N. Rouche P. Habets et M. Laloy (dans l'hypothèse $\psi(t) > 0$).

Dans le livre de N. Rouche, P. Habets et M. Laloy ([1]) on trouve au chapitre VIII, 4.3, le lemme „fondamental" suivant:

HYPOTHÈSE H.

(1) φ et ψ sont deux fonctions continues dans l'intervalle (α, ∞), $\varphi\colon (\alpha, \infty) \to R$, $\psi\colon (\alpha, \infty) \to R$ telles que

$$\varphi(t) \geq M > -\infty \quad \text{dans } (\alpha, \infty), \tag{2}$$

$$\psi(t) \geq 0 \quad \text{dans } (\alpha, \infty), \tag{3}$$

(4) pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction continue, positive et croissante dans $(-\infty, +\infty)$ et une constante positive A telles que dans l'ensemble

$$I_\varepsilon = \{t \in (\alpha, \infty)\colon \psi(t) \geq \varepsilon\}$$

on a

$$D^+ \varphi(t) \leq -a(\psi(t)), \tag{5}$$

$$D^+ \psi(t) \leq A \quad (\text{ou } D^+ \psi(t) \geq -A). \tag{6}$$

LEMME F. *Sous les hypothèses* H $\lim_{t\to\infty} \psi(t)$ *existe et*

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t) = 0. \tag{7}$$

Remarque 1. Nous allons donner un exemple qui démontre que dans

([1]) N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability theory by Liapunov's direct method*, Appl. Math. Sci. 22 (Springer), New York–Heidelberg–Berlin 1977.

les hypothèses H l'inégalité (3) doit être remplacée par une inégalité forte. Dans le cas où on admete l'inégalité (3) faible le lemme F n'est pas plus correct.

EXEMPLE 1. Posons par définition

$$\psi(t) = \begin{cases} t-2k & \text{pour} \quad 2k \leqslant t \leqslant 2k+\frac{1}{2}, \\ 2k+1-t & \text{pour} \quad 2k+\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2k+1, \\ 0 & \text{pour} \quad 2k+1 \leqslant t \leqslant 2(k+1), \end{cases} \tag{8}$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} -t+2k+1 & \text{pour} \quad 2k \leqslant t \leqslant 2k+1, \\ t-2k-1 & \text{pour} \quad 2k+1 \leqslant t \leqslant 2(k+1), \end{cases} \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{9}$$

On vérifie facilement que les fonctions ψ, φ ainsi définies sont continues dans l'intervalle $(-\infty, +\infty)$

$$\begin{aligned} \psi(t) &\geqslant 0 && \text{dans } (-\infty, \infty) && \text{(cf. (3))}, \\ D^+\psi(t) &\leqslant 1 && \text{dans } (-\infty, \infty) && \text{(cf. (6))}, \\ \varphi(t) &\geqslant 0 && \text{dans } (-\infty, \infty) && \text{(cf. (2))}. \end{aligned}$$

Posons par définition

$$a(u) = u. \tag{10}$$

L'ensemble $I_\varepsilon = \{t \in (-\infty, +\infty): \psi(t) \geqslant \varepsilon\}$ est défini par les inégalités suivantes:

$$\varepsilon + 2k \leqslant t \leqslant 2k+\tfrac{1}{2}, \qquad 2k+\tfrac{1}{2} \leqslant t \leqslant 2k+1-\varepsilon$$

c'est-à-dire

$$I_\varepsilon = \bigcup_k (\varepsilon+2k, 2k+1-\varepsilon) \subset \bigcup_k (2k, 2k+1)$$

et par suite, en vertu de (9),

$$\varphi(t) = -t+2k+1 \qquad \text{pour } t \in I_\varepsilon$$

d'où

$$D^+\varphi(t) = -1 \qquad \text{pour } t \in I_\varepsilon;$$

mais dans I_ε on a $\varepsilon \leqslant \psi(t) \leqslant \frac{1}{2}$ et par suite

$$D^+\varphi(t) = -1 < -\psi(t) = -a(\psi(t)) \qquad \text{(cf. (5))}.$$

Les hypothèses H sont donc satisfaites et $\psi(t)$ définie par (8) ne tend pas vers zéro pour $t \to \infty$.

On vérifie facilement que dans le cas où $\psi(t) > 0$ dans (α, ∞) et où sont satisfaites les hypothèses H, $\varphi(t)$ est décroissante dans tout l'intervalle (α, ∞) et le raisonnement donné dans le livre de Rouche, Habets et Laloy([1]) est correct.

Remarque 2. Le lemme F sert dans le livre de Rouche, Habets et Laloy([1]) à démontrer des théorèmes sur le comportement asymptotique des solutions de l'équation

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{2.1}$$

où $f(t, x)$ est une fonction continue dans l'ensemble $I x\ \Omega$ où $I = (\alpha, \beta)$ et Ω est un ensemble ouvert dans R^n, $x(t)$ est une solution non prolongable de l'équation (2.1) définie dans l'intervalle $(\bar{\alpha}, \omega) \subset (\alpha, \beta)$. Dans le cas où $\omega = \infty$ l'application du lemme F est justifiée, mais dans le cas où $\omega < \infty$ on ne peut plus l'appliquer (cf. par exemple VIII, théorème 4.13). Dans le cas où $\omega < \infty$ le lemme F peut être remplacé par le lemme suivant:

HYPOTHÈSES K. 1° $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont deux fonctions continues dans (α, ω), et telles que

$$\varphi(t) \geqslant M > -\infty \quad \text{pour } t \in (\alpha, \omega), \tag{3.1}$$

$$\psi(t) > 0 \quad \text{pour } t \in (\alpha, \omega). \tag{3.2}$$

2° Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $a_\varepsilon(t, u)$ continue pour $t \in (\alpha, \omega)$, $u \geqslant \varepsilon$, croissante par rapport à u et non négative, telle que

$$D^+ \varphi(t) \leqslant -a_\varepsilon(t, \psi(t)) \quad \text{dans } I_\varepsilon \tag{3.3}$$

où $I_\varepsilon = \{t \in (\alpha, \omega) \colon \psi(t) \geqslant \varepsilon\}$.

3° Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $\Omega_\varepsilon(t, u)$ continue pour $t \in (\alpha, \omega)$, $u \geqslant \varepsilon$ telle que

$$D^+ \psi(t) \leqslant \Omega_\varepsilon(t, \psi(t)) \quad \text{dans } I_\varepsilon. \tag{3.4}$$

4° Pour chaque $\varepsilon > 0$ et chaque suite $\{t_i\}$, $t_i \in (\alpha, \omega)$, $t_i \to \omega$ il existe une suite partielle $\{t_{v_i}\}$ et une suite de constantes $\delta_r > 0$ telles que

$$\alpha < t_{v_i} \leqslant t_{v_{i+1}} - \delta_{i+1} < t_{v_{i+1}} < \omega, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.5}$$

5° L'intégrale maximale $u_i(t)$ de l'équation

$$u' = \Omega_\varepsilon(t, u) \tag{3.6}$$

avec la condition initiale

$$u_i(t_{v_i}) = 2\varepsilon \tag{3.7}$$

satisfait à l'inégalité

$$u_i(t) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour } t_{v_i} - \delta_i \leqslant t \leqslant t_{v_i} \tag{3.8}$$

et la condition suivante est satisfaite:

$$\sum_{i=2}^{\infty} \int_{t_{v_i}-\delta_i}^{t_{v_i}} a_\varepsilon(s, \varepsilon)\, ds = \infty, \tag{3.9}$$

LEMME $\tilde{\text{F}}$. *Sous les hypothèses* K *on a*:

$$\lim_{t\to\omega}\psi(t) = 0.$$

Démonstration. Supposons que $\psi(t) \not\to 0$. Alors il existe $\varepsilon_0 > 0$ et une suite $t_i \in (\alpha, \omega)$, $t_i \to \omega$ tels que

$$\psi(t_i) \geqslant 2\varepsilon_0, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{3.10}$$

De l'inégalité (3.4) pour $\varepsilon = \varepsilon_0$ on obtient

$$\psi(t) \geqslant u_i(t) \quad \text{pour } t \leqslant t_{v_i} \text{ tel que } \psi(t) \geqslant \varepsilon_0$$

d'où, en vertu de (3.8),

$$\psi(t) \geqslant u_i(t) \geqslant \varepsilon_0 \quad \text{pour } t_{v_i} - \delta_i \leqslant t \leqslant t_{v_i}$$

et par suite, en vertu de (3.3),

$$D^+ \varphi(t) \leqslant -a_{\varepsilon_0}(t, \psi(t)) \leqslant -a_{\varepsilon_0}(t, \varepsilon_0) \quad \text{pour } t_{v_i} - \delta_i \leqslant t \leqslant t_{v_i}$$

et

$$\varphi(t_{v_i}) - \varphi(t_{v_i} - \delta_i) \leqslant -\int_{t_{v_i}-\delta_i}^{t_{v_i}} a_{\varepsilon_0}(s, \varepsilon_0)\,ds. \tag{3.11}$$

De l'hypothèse (3.2) il s'ensuit que pour chaque t il existe $\varepsilon(t) = \psi(t) > 0$ tel que

$$\psi(t) \geqslant \varepsilon(t)$$

et par suite

$$D^+ \varphi(t) \leqslant -a_{\varepsilon(t)}(t, \psi(t)) \leqslant 0 \quad \text{pour } \alpha < t < \omega,$$

donc $\varphi(t)$ est décroissante dans l'intervalle (α, ω). Comme $\delta_i > 0$ sont choisis en sorte que l'on a (3.5), il vient

$$\varphi(t_{v_i} - \delta_i) - \varphi(t_{v_{i-1}}) \leqslant 0 \quad \text{pour } i = 2, 3, \ldots$$

et par suite, en vertu de (3.11),

$$\begin{aligned}\varphi(t_{v_i}) - \varphi(t_{v_1}) &= \sum_{j=2}^{i} [\varphi(t_{v_j}) - \varphi(t_{v_j} - \delta_j)] + \sum_{j=2}^{i} [\varphi(t_{v_j} - \delta_j) - \varphi(t_{v_{j-1}})] \\ &\leqslant \sum_{j=2}^{i} [\varphi(t_{v_j}) - \varphi(t_{v_j} - \delta_j)] \leqslant -\sum_{j=2}^{i} \int_{t_{v_j}-\delta_j}^{t_{v_j}} a_{\varepsilon_0}(s, \varepsilon_0)\,ds, \\ & \qquad\qquad i = 2, 3, \ldots\end{aligned}$$

En vertu de (3.9) on a donc

$$-\infty < M - \varphi(t_{v_1}) \leqslant -\sum_{j=2}^{\infty} \int_{t_{v_j}-\delta_j}^{t_{v_j}} a_{\varepsilon_0}(s, \varepsilon_0)\,ds = -\infty$$

ce qui est impossible. Ainsi nous avons démontré que $\psi(t) \to 0$ pour $t \to \infty$.

Remarque 4. Du lemme $\tilde{\mathrm{F}}$ découle pour $\omega < \infty$, par exemple, le lemme suivant:

HYPOTHÈSES K*. 1° $\varphi(t)$, $\psi(t)$ sont deux fonctions continues dans (α, ω)

$$(3.1^*) \qquad \varphi(t) \geqslant M > -\infty \quad \text{pour } t \in (\alpha, \omega),$$

$$(3.2^*) \qquad \psi(t) > 0 \quad \text{pour } t \in (\alpha, \omega).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $\beta_\varepsilon(u)$ croissante et positive telle que

$$(3.3^*) \qquad D^+ \varphi(t) \leqslant \frac{-1}{\omega - t} \cdot \beta_\varepsilon(\psi(t)) \quad \text{dans } I_\varepsilon$$

et il existe une constante positive A_ε telle que

$$(3.4^*) \qquad D^+ \psi(t) \leqslant A_\varepsilon \quad \text{dans } I_\varepsilon.$$

LEMME F*. *Sous les hypothèses* K* *on a*: $\psi(t) \to 0$ *pour* $t \to \omega$.

Démonstration. Les hypothèses (3.1*), (3.2*), (3.3*) et (3.4*) ne sont autres que les hypothèses (3.1), (3.2), (3.3) et (3.4) avec

$$a_\varepsilon(t, u) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{\omega - t} \beta_\varepsilon(u), \qquad \Omega_\varepsilon(t, u) = A_\varepsilon.$$

Il reste à démontrer 4° et 5°. Envisageons une suite quelconque $t_i \to \omega$, $\alpha < t_i < \omega$ et choisissons la suite partielle $\{t_{v_i}\}$ de sorte que

$$t_{v_i} \geqslant t_{v_{i-1}} + \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_{i-1}}), \qquad t_{v_1} = t_1,$$

ce qui est possible, car $t_i \to \omega$, $t_i < \omega$.

Posons par définition

$$\delta_i = \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_{i-1}}), \qquad t_{v_i} = t_{v_i} + \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_i}) - \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_i}) \leqslant t_{v_{i+1}} - \delta_{i+1} < t_{v_{i+1}}$$

(cf. (3.5)).

Il reste à prouver (3.8) et (3.9). Dans le cas envisagé (3.6) est de la forme

$$(3.6^*) \qquad u' = A_\varepsilon$$

et par suite

$$u_i(t) = 2\varepsilon + A_\varepsilon(t - t_{v_i}).$$

Pour $t_{v_i} - \delta_i \leqslant t \leqslant t_{v_i}$ on a

$$u_i(t) \geqslant 2\varepsilon + A_\varepsilon(t_{v_i} - \delta_i - t_{v_i}) = 2\varepsilon - A_\varepsilon \delta_i, \qquad \delta_i = \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_{i-1}}) \to 0 \quad \text{pour } i \to \infty.$$

Dès lors on a pour $i \geqslant N$

$$0 < A_\varepsilon \delta_i < \varepsilon,$$

d'où il vient

(3.8*) $$u_i(t) \geqslant \varepsilon \quad \text{pour } t_{v_i} - \delta_i \leqslant t \leqslant t_{v_i},\ i \geqslant N.$$

Envisageons l'expression (3.9)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_{v_i}-\delta_i}^{t_{v_i}} a_\varepsilon(s, \varepsilon)\, ds = \beta_\varepsilon(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_{v_i}-\delta_i}^{t_{v_i}} \frac{1}{\omega - t}\, dt$$

$$= \beta_\varepsilon(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \ln \frac{\omega - t_{v_i} + \delta_i}{\omega - t_{v_i}} = \beta_\varepsilon(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{\delta_i}{\omega - t_{v_i}}\right),$$

$$\omega - t_{v_i} \leqslant \omega - t_{v_{i-1}} - \tfrac{1}{2}(\omega - t_{v_{i-1}}) = \delta_i$$

et par suite

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_{t_{v_r}-\delta_i}^{t_{v_r}} a_\varepsilon(s, \varepsilon)\, ds \geqslant \beta_\varepsilon(\varepsilon) \sum_{i=1}^{\infty} \ln 2 = \infty.$$

Ainsi le lemme F entraîne le lemme F*.

Reçu par la Rédaction le 26.06.1979