

Sur une inégalité de Garabedian-Shiffer-Nehari pour les fonctions univalentes bornées

par A. ROST et J. ŚLADKOWSKA (Gliwice)

À la mémoire de Franciszek Leja

Résumé. Soit F_T , $0 < T < 1$, la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle unité $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme

$$(1) \quad f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

remplissant les conditions

$$(2) \quad |f(z)| < 1 \quad \text{pour } z \in U,$$

$$(3) \quad b_1 \geq T.$$

Soit S_1 la famille des fonctions holomorphes et univalentes dans U , de la forme (1), remplissant uniquement la condition (2).

Soit enfin $S(b_1)$ la sous-classe de S_1 où b_1 est fixé.

Posons pour $f \in F_T$, $0 < r < 1$, $d = f(re^{i\theta})$,

$$F(z) = \sqrt{\frac{d-f(z)}{1-\bar{d}f(z)}}.$$

$F(z)$ désigne ici une branche de la racine carrée, arbitraire mais fixée, univoque dans $U_1 = \{z: |z| < r\}$. Pour $(z, \zeta) \in U_1 \times U_1$ les fonctions

$$(4) \quad A(z, \zeta) = \log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(F(z) + F(\zeta))(z - \zeta)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n,$$

$$(5) \quad B(z, \bar{\zeta}) = \log \frac{1 + F(z) \overline{F(\zeta)}}{1 - F(z) F(\zeta)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n$$

sont des fonctions holomorphes des variables z, ζ et $z, \bar{\zeta}$ respectivement.

Soit $H(U_1)$ l'espace linéaire-topologique des fonctions holomorphes dans U_1 avec la convergence presque uniforme, $H'(U_1)$ l'espace conjugué de $H(U_1)$ et $L \in H'(U_1)$.

Définissons pour $f \in S_1$ la fonctionnelle

$$(6) \quad \Phi(f) = \operatorname{Re} \{L^2(A(z, \zeta)) + |L|^2(B(z, \bar{\zeta}))\},$$

où $L^2(\varphi(z, \zeta)) = L(L(\varphi(z, \zeta)))$, $|L|^2(\varphi(z, \bar{\zeta})) = L(\overline{L(\varphi(z, \bar{\zeta}))})$. Nous voyons que $\Phi(f)$ possède pour chaque $f \in S_1$ une dérivée au sens de Fréchet.

Posons enfin

$$\alpha(z, \zeta) = \log \frac{1 - x(z + \zeta) + z\zeta - w(z)w(\zeta)}{(z - \zeta)\sqrt{x^2 - 1}},$$

$$\beta(z, \bar{\zeta}) = \log \frac{w(z)\overline{w(\zeta)} + x(1 + z\bar{\zeta}) - \bar{\zeta} - z}{(1 - z\bar{\zeta})\sqrt{x^2 - 1}},$$

où $w(z) = \sqrt{1 - 2xz + z^2}$, $x = \frac{1}{2}(r + 1/r)$.

THÉOREME 1. Soit $f \in F_T$ et $d = f(re^{i\varphi})$. Si $L \in H'(U_1)$, $\text{Im } L(1) = 0$, et si la fonctionnelle $\Phi(f)$, définie par la formule (6), possède une dérivée ne s'annulant en aucun point de la famille F_T , alors

$$(7) \quad \Phi(f) \leq \text{Re} \{L^2(\alpha(ze^{-i\varphi}, \zeta e^{-i\varphi})) + |L|^2(\beta(ze^{-i\varphi}, \bar{\zeta} e^{i\varphi}))\}.$$

L'inégalité (7) est exacte et la fonction extrémale a la forme

$$f(z) = Tz + \dots$$

et satisfait à l'équation fonctionnelle

$$(8) \quad L(A(z, \zeta)) + \overline{L(B(z, \bar{\zeta}))} + L(i\varphi) = L(\alpha(ze^{-i\varphi}, \zeta e^{-i\varphi})) + \overline{L(\beta(ze^{-i\varphi}, \bar{\zeta} e^{i\varphi}))}.$$

THÉOREME 2. Dans chaque classe $S(b_1)$ l'inégalité (7) est remplie et elle est exacte dans cette classe. La fonction extrémale satisfait à l'équation (8).

Soit F_T , $0 < T < 1$, une famille de fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle unité $U = \{z: |z| < 1\}$, de la forme

$$(1) \quad f(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \dots,$$

remplissant les conditions

$$(2) \quad |f(z)| < 1 \quad \text{pour } z \in U,$$

$$(3) \quad b_1 \geq T.$$

Ces familles ont été introduites par Z. Charzyński dans [1]. Si nous désignons par S_1 la classe des fonctions holomorphes et univalentes dans U , de la forme (1) et remplissant uniquement la condition (2), en vertu du fait que pour les fonctions de la classe S_1 nécessairement $0 < b_1 \leq 1$, nous avons

$$(4) \quad S_1 = \bigcup_{0 < T < 1} F_T.$$

Les familles F_T , contrairement à la famille S_1 , sont compactes. Il en résulte, entre autres, qu'une fonctionnelle arbitraire, réelle et continue, définie dans F_T , atteint ses valeurs extrémales, ce qu'on ne peut pas dire de la famille S_1 .

En 1953 Z. Nehari a déjà donné dans [7] les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction, qui a un développement de la forme (1) dans le cercle U , appartienne à la classe S_1 . Ces conditions ont la forme d'inégalités dans lesquelles, en plus des paramètres arbitraires figurent les coefficients de la fonction f . Puisqu'elles sont pareilles aux conditions de Grunsky pour les fonctions de la classe S (famille des fonctions holomorphes

et univalentes dans le cercle U , remplissant les conditions $f(0) = f'(0) - 1 = 0$, on les a appelées conditions de Grunsky–Nehari. En 1957, [3], Z. Charzyński et H. Śmiałkówna ont trouvé des conditions analogues. En 1969 Z. Nehari a généralisé ces conditions, en y introduisant un paramètre complexe d , $d \notin f(U)$, $d \in U$. Puisqu'en 1967 Garabedian et Schiffer [6] ont donné une pareille généralisation pour la classe S , nous allons les appeler conditions de Garabedian–Schiffer–Nehari, en abrégé conditions ou inégalités G–S–N.

En 1970 et 1971, dans deux travaux successifs [4] et [5], W. D. De Temple a trouvé à l'aide d'une méthode variationnelle une nouvelle démonstration du résultat de Nehari. Il a encore élargi le domaine de variabilité du paramètre d , en admettant non seulement les valeurs que la fonction n'atteint pas, mais aussi celles qu'elle atteint et les racines d'une certaine équation algébrique.

Les inégalités G–S–N sont exactes dans la famille S_1 (non pas dans le sens, que De Temple a interprété ce fait, à tort d'après nous). On ne sait pas, en revanche, si elles sont exactes dans les sous-classes compactes $S(b_1)$ – sous-classes de S_1 , où b_1 est fixé. Pour le constater De Temple a créé une technique [5] (the technique of a penalty function), qui lui permet de trouver les fonctions extrémales dans la classe $S(b_1)$ pour certaines simples formes de la fonctionnelle G–S–N. Nous entendons la fonctionnelle G–S–N comme le second membre de l'inégalité G–S–N. Toutefois, cette méthode n'a pas d'application dans le cas général.

Les classes $S(b_1)$ ont une relation évidente avec les classes F_T , notamment $S(b_1) \subset F_{b_1}$. En 1952 Z. Charzyński a obtenu, dans le travail cité ci-dessus, une variation dans la classe F_T , à l'aide de laquelle il a obtenu l'équation différentielle-fonctionnelle pour les fonctions extrémales dans cette classe par rapport aux fonctionnelles dépendant d'une quantité finie de coefficients. Dans un travail commun avec W. Janowski, [2], cette équation a été généralisée pour les fonctionnelles arbitraires qui sont différentiables au sens de Fréchet.

Dans cette note on obtient que l'inégalité G–S–N est exacte dans les classes $S(b_1)$. Ça il résulte du fait que cette inégalité est exacte dans les classes F_{b_1} et du fait que les fonctions extrémales dans F_{b_1} appartiennent à S_{b_1} . Le fait que l'inégalité G–S–N est exacte dans F_T résulte de l'application de l'équation sus-mentionnée pour les fonctions extrémales à une fonctionnelle G–S–N.

1. Soit $f \in F_T$, $0 < r < 1$, $d = f(r)$. Posons

$$(5) \quad F(z) = \sqrt{\frac{d-f(z)}{1-\bar{d}f(z)}}.$$

$F(z)$ signifie ici une branche de la racine carrée, arbitraire mais fixée,

univoque dans $U_1 = \{z: |z| < r\}$. Remarquons de plus que pour $(z, \zeta) \in U_1 \times U_1$ les fonctions

$$(6) \quad A(z, \zeta) = \log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(F(z) + F(\zeta))(z - \zeta)} = \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m \zeta^n,$$

$$(7) \quad B(z, \bar{\zeta}) = \log \frac{1 + F(z)\overline{F(\zeta)}}{1 - F(z)\overline{F(\zeta)}} = \sum_{m,n=0}^{\infty} b_{mn} z^m \bar{\zeta}^n$$

sont des fonctions holomorphes des variables z, ζ et $z, \bar{\zeta}$ respectivement; seuls les coefficients a_{00}, b_{00} ne sont pas déterminées d'une façon unique.

Soit $H(U_1)$ l'espace linéaire-topologique, sur le corps des nombres complexes, des fonctions holomorphes dans U_1 avec la convergence presque uniforme dans U_1 et $H'_R(U_1)$ ou $H'_C(U_1)$ l'espace conjugué de $H(U_1)$ des fonctionnelles linéaires, continues, réelles ou complexes et soit $L \in H'_C(U_1)$, $\text{Im } L(1) = 0$. Du théorème de Caccioppoli sur la représentation générale de la fonctionnelle linéaire et continue dans l'espace des fonctions holomorphes, alors sur la forme générale de l'élément de l'espace $H'_C(U_1)$, [9], il résulte qu'il existe une fonction g holomorphe dans le domaine $\{z: |z| > r'\}$, où $0 < r' < r$, telle que pour la fonction arbitraire $f \in H(U_1)$ nous avons

$$L(f) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\varrho} f(z)g(z) dz,$$

où $\varrho, r' < \varrho < r$, est arbitraire. Si donc $\varphi(z, \zeta)$ est une fonction holomorphe des variables $(z, \zeta) \in U_1 \times U_1$, $L(\varphi(z, \zeta))$ (z est une variable simulée, ζ est un paramètre) est une fonction holomorphe de la variable $\zeta \in U_1$, alors la fonctionnelle $L^2(\varphi(z, \zeta)) = L(L(\varphi(z, \zeta)))$ est bien définie. Il en est de même de la fonctionnelle $|L|^2(\psi(z, \bar{\zeta})) = L(\overline{L(\psi(z, \bar{\zeta}))})$ pour la fonction $\psi(z, \bar{\zeta})$ holomorphe comme fonction des variables $(z, \bar{\zeta}) \in U_1 \times U_1$.

Posons pour $f \in S_1$

$$(8) \quad \Phi(f) = \text{Re} \left\{ L^2 \left(\log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(F(z) + F(\zeta))(z - \zeta)} \right) + |L|^2 \left(\log \frac{1 + F(z)\overline{F(\zeta)}}{1 - F(z)\overline{F(\zeta)}} \right) \right\}.$$

Remarquons que ni le choix de la branche de la racine dans la définition de $F(z)$, ni celui de la branche du logarithme pour déterminer les fonctions $A(z, \zeta)$ et $B(z, \bar{\zeta})$ n'influe sur la valeur de la fonctionnelle (8).

Nous allons maintenant prouver que $\Phi(f)$ possède pour chaque fonction $f \in S_1$ une dérivée au sens de Fréchet, c'est-à-dire, que pour chaque fonction $f \in S_1$ il existe une fonctionnelle $\Lambda \in H'_R(U)$, telle que pour chaque nombre n , naturel, fixé et pour chaque fonction $h \in H(U)$, telle que $f+h \in S_1$, une convergence $h \rightarrow 0$ entraîne que

$$\frac{|\Phi(f+h) - \Phi(f) - \Lambda(h)|}{\|h\|_n} \rightarrow 0,$$

où $\|h\|_n = \sup_{|z| < 1 - 1/n} |h(z)|$.

En fait, un calcul facile permet de constater que la fonctionnelle

$$(9) \quad \Lambda(h) = \operatorname{Re} \left\{ L^2 \left(-h(r) \frac{(1-\bar{d}f(z))(1-\bar{d}f(\zeta))}{(1-|d|^2)\eta(z)\eta(\zeta)} - \overline{h(r)} \frac{(d-f(z))(d-f(\zeta))}{(1-|d|^2)\eta(z)\eta(\zeta)} + \frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} (\eta^2(\zeta)h(z) - \eta^2(z)h(\zeta)) \right) + |L|^2 \left(h(r) \frac{(d-\overline{f(\zeta)})(1-\bar{d}f(z))}{(1-|d|^2)\eta(z)\eta(\zeta)} + \overline{h(r)} \frac{(d-f(z))(1-d\overline{f(\zeta)})}{(1-|d|^2)\eta(z)\eta(\zeta)} - \frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} (\overline{\eta^2(\zeta)h(z)} + \eta^2(z)\overline{h(\zeta)}) \right) \right\},$$

où

$$\eta(z) = \sqrt{(d-f(z))(1-\bar{d}f(z))}.$$

Nous allons calculer les fonctionnelles

$$D(h_1) = \Lambda(h_1) - i\Lambda(h_1 i), \quad \hat{D}(h_2) = \overline{D(\hat{h}_2)} = \Lambda(\hat{h}_2) + i\Lambda(\hat{h}_2 i),$$

où $h_1, h_2 \in H(U)$ et $\hat{h}_2(z) = \overline{h_2(\bar{z})}$. Nous obtenons

$$(10) \quad D(h_1) = \frac{-h_1(r)}{1-|d|^2} \left(L \left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)} \right) - L \left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)} \right) \right)^2 + L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))(z-\zeta)} (\eta^2(\zeta)h_1(z) - \eta^2(z)h_1(\zeta)) \right) - |L|^2 \left(\frac{\eta^2(z)\overline{h_1(\zeta)}}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \right) - |L|^2 \left(\frac{\overline{\eta^2(\zeta)h_1(z)}}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \right),$$

$$\hat{D}(h_2) = \frac{-\hat{h}_2(r)}{1-|d|^2} \left(L \left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)} \right) - L \left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)} \right) \right)^2 + L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} (\eta^2(\zeta)\hat{h}_2(z) - \eta^2(z)\hat{h}_2(\zeta)) \right) - |L|^2 \left(\frac{\overline{\eta^2(\zeta)\hat{h}_2(z)}}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \right) - |L|^2 \left(\frac{\eta^2(z)\overline{\hat{h}_2(\zeta)}}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \right).$$

Posons maintenant

$$\psi(\omega, \lambda) = \omega \frac{1 + \omega\lambda}{1 - \omega\lambda}$$

et soit

$$h_1(z) = \psi(f(z), 1/w), \quad h_2(z) = \psi(\hat{f}(z), w);$$

Alors

$$(11) \quad h_1(z) = f(z) \frac{w+f(z)}{w-f(z)}, \quad \hat{h}_2(z) = f(z) \frac{1+f(z)\bar{w}}{1-f(z)\bar{w}}.$$

Ces deux fonctions sont holomorphes dans le cercle unité pour $w = e^{iy}$, $0 \leq y < 2\pi$.

Posons

$$(12) \quad \mathfrak{M}(w) = D(h_1) + \hat{D}(h_2) - 2\mathfrak{P},$$

où

$$2\mathfrak{P} = \underset{|w|=1}{\text{Min}} (D(h_1) + \hat{D}(h_2)).$$

En vertu de (12), (11) et (10) nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(w) + 2\mathfrak{P} = & -\frac{d}{1-|d|^2} \frac{w+d}{w-d} \left(L\left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)}\right) - \overline{L\left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)}\right)} \right)^2 + \\ & + L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \left(\eta^2(\zeta) f(z) \frac{1+f(z)\bar{w}}{1-f(z)\bar{w}} - \eta^2(z) f(\zeta) \frac{w+f(\zeta)}{w-f(\zeta)} \right) \right) - \\ & - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \overline{\eta^2(\zeta) f(z) \frac{w+f(z)}{w-f(z)}} \right) - \\ & - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \eta^2(z) \overline{f(\zeta) \frac{\bar{w}+f(\zeta)}{\bar{w}-f(\zeta)}} \right) - \\ & - \frac{\bar{d}}{1-|d|^2} \frac{1+\bar{d}w}{1-\bar{d}w} \left(L\left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)}\right) - \overline{L\left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)}\right)} \right)^2 + \\ & + L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \left(\eta^2(\zeta) f(z) \frac{1+f(z)\bar{w}}{1-f(z)\bar{w}} - \eta^2(z) f(\zeta) \frac{1+f(\zeta)\bar{w}}{1-f(\zeta)\bar{w}} \right) \right) - \\ & - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \overline{\eta^2(\zeta) f(z) \frac{1+f(z)\bar{w}}{1-f(z)\bar{w}}} \right) - \\ & - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \eta^2(z) \overline{f(\zeta) \frac{1+f(\zeta)\bar{w}}{1-f(\zeta)\bar{w}}} \right), \end{aligned}$$

ce qui donne finalement après un calcul assez pénible

$$(13) \quad \mathfrak{M}(w) + 2\mathfrak{P} = \frac{-2w^2}{(w-d)(1-\bar{d}w)} \left(L\left(\frac{\eta(z)}{w-f(z)}\right) - \overline{L\left(\frac{\eta(z)}{1-\bar{w}f(z)}\right)} \right)^2,$$

où

$$2\mathfrak{P} = \text{Min}_{|w|=1} \frac{-2w^2}{(w-d)(1-\bar{d}w)} \left(L\left(\frac{\eta(z)}{w-f(z)}\right) - \overline{L\left(\frac{\eta(z)}{1-\bar{w}f(z)}\right)} \right)^2$$

$$= \text{Min}_{|w|=1} \frac{8}{|1-e^{-iy}d|^2} \left(\text{Im} L\left(\frac{\eta(z)e^{-\frac{1}{2}iy}}{1-e^{-iy}f(z)}\right) \right)^2.$$

Nous allons prouver que

(14) $\mathfrak{P} = 0.$

Dans ce but posons

$$\varphi(y) = \text{Im} L\left(\frac{\eta(z)e^{-\frac{1}{2}iy}}{1-e^{-iy}f(z)}\right).$$

φ est une fonction continue et périodique de période 4π . Comme en outre $\varphi(y+2\pi) = -\varphi(y)$, cette fonction a dans l'intervalle $\langle 0, 2\pi \rangle$ au moins un zéro, d'où nous obtenons (14).

Posons successivement dans (10)

$$h_1(z) = \psi(z, 1/u) f'(z), \quad h_2(z) = \psi(z, u) \hat{f}'(z),$$

ou

$$h_1(z) = z f'(z) \frac{u+z}{z-z}, \quad h_2(z) = \overline{z f'(\bar{z})} \frac{1+zu}{1-zu},$$

$$\hat{h}_2(z) = z f'(z) \frac{1+\bar{u}z}{1-\bar{u}z}.$$

Ces fonctions sont holomorphes dans le cercle unité pour $u = e^{ix}$, $0 \leq x \leq 2\pi$; soit

(15) $\mathfrak{R}(u) = D(h_1) + \hat{D}(h_2) - 2\mathfrak{P}.$

Alors en vertu de (15), (14) et (10),

$$\mathfrak{R}(u) = D\left(zf'(z)\frac{u+z}{u-z}\right) + \overline{D\left(zf'(z)\frac{1+\bar{u}z}{1-\bar{u}z}\right)}$$

$$= -rf'(r) \frac{u+r}{u-r} \frac{1}{1-|d|^2} \left(L\left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)}\right) - L\left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)}\right) \right)^2 +$$

$$+ L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \left(\eta^2(\zeta) z f'(z) \frac{u+z}{u-z} - \eta^2(z) \zeta f'(\zeta) \frac{u+\zeta}{u-\zeta} \right) \right) -$$

$$- |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)f(\zeta))\eta(z)\eta(\zeta)} \overline{\eta^2(\zeta) z f'(z) \frac{(1/\bar{u})+z}{(1/\bar{u})-z}} \right) -$$

$$\begin{aligned}
& -|L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\eta(z)\overline{\eta(\zeta)}} \eta^2(z)\overline{\zeta} \overline{f'(\zeta)} \frac{\bar{u}+\bar{\zeta}}{\bar{u}-\bar{\zeta}} \right) - \\
& - \overline{rf'(r)} \frac{1+ur}{1-ur} \left(L \left(\frac{1-\bar{d}f(z)}{\eta(z)} \right) - L \left(\frac{d-f(z)}{\eta(z)} \right) \right)^2 + \\
& + L^2 \left(\frac{1}{(f(z)-f(\zeta))\eta(z)\overline{\eta(\zeta)}} \left(\eta^2(\zeta)zf'(z) \frac{1+\bar{u}z}{1-\bar{u}z} - \eta^2(z)\zeta f'(\zeta) \frac{1+\bar{u}\zeta}{1-\bar{u}\zeta} \right) \right) - \\
& - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\eta(z)\overline{\eta(\zeta)}} \overline{\eta^2(\zeta)}zf'(z) \frac{1+\bar{u}z}{1-\bar{u}z} \right) - \\
& - |L|^2 \left(\frac{1}{(1-f(z)\overline{f(\zeta)})\eta(z)\overline{\eta(\zeta)}} \eta^2(z)\overline{\zeta} \overline{f'(\zeta)} \frac{1+u\bar{\zeta}}{1-u\bar{\zeta}} \right).
\end{aligned}$$

En utilisant de nouveau la représentation générale de la fonctionnelle linéaire L , nous voyons que $\mathfrak{N}(u)$ est une fonction méromorphe dans l'anneau $P = \{u: \varrho < |u| < 1/\varrho\}$, $\varrho < r$, et possède des pôles uniquement dans les points r et $1/r$. De plus, remarquons que la dérivée (9), prise en un point arbitraire $f \in F_T$, se prolonge d'une façon continue sur les fonctions méromorphes dans U , dont tous les pôles appartiennent à l'ensemble $Q = \{u: \varrho < |u| < 1\} \setminus \{r\}$.

En vertu du théorème principal de [2], p. 45, et de la conclusion II, p. 55, nous constatons que:

Si la dérivée (9) de la fonctionnelle (8) ne s'annule identiquement en aucun point de la famille F_T , chaque fonction $f \in F_T$, qui réalise le maximum de la fonctionnelle (8) dans la famille F_T , remplit les conditions suivantes:

(I) Dans l'anneau $P_1 = \{z: \varrho < |z| < 1\}$ la fonction f satisfait à l'équation

$$(16) \quad \left(\frac{zf'(z)}{f(z)} \right)^2 \mathfrak{M}(f(z)) = \mathfrak{N}(z),$$

où $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ sont définies par les formules (12), (15) et (14).

(II) La fonction $\mathfrak{M}(w)$ est méromorphe dans le domaine situé entre les courbes $C'_\varrho = \{w: w = f(\varrho e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ et $C''_\varrho = \{w: w = 1/f(\varrho e^{i\varphi}), 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ et elle admet des pôles uniquement aux points d et $1/\bar{d}$. La fonction $\mathfrak{N}(z)$ est méromorphe dans l'anneau P et elle possède des pôles uniquement aux points r et $1/r$.

(III) Les fonctions $\mathfrak{M}(w)$ et $\mathfrak{N}(z)$ atteignent sur ∂U des valeurs qui ne sont pas négatives.

(IV) Le premier coefficient du développement de la fonction f est égal à T .

Il résulte tout de suite des propriétés de la fonction $\mathfrak{N}(z)$ sus-mentionnées, que la fonction $\mathfrak{N}(z)$ peut avoir uniquement des racines de degré pair sur ∂U et le premier membre de l'équation (16) est une fonction méromorphe dans P_1 , elle possède un pôle au point r et elle est le carré de la fonction

$$\mathfrak{N}_1(z) = \sqrt{2z}f'(z) \left(L\left(\frac{\eta(\zeta)}{\eta(z)(f(\zeta)-f(z))}\right) + \overline{L\left(\frac{\eta(\zeta)}{\eta(z)(1-f(z))f(\zeta)}\right)} \right)$$

en vertu de (13). Dans cet anneau $\mathfrak{N}_1(z)$ est une fonction analytique, biunivoque, r est un point de ramification pour $\eta(z)$. Elle se prolonge comme fonction analytique sur l'anneau $P_2 = \{z: \varrho < |z| \leq 1\}$. En fait, si $z^* \in \partial U$ et $\mathfrak{N}(z^*) \neq 0$ dans un certain voisinage du point z^* il existe deux branches univoques de la racine carrée de $\mathfrak{N}(z)$ et l'une d'elles doit être identique à l'une des deux branches $\mathfrak{N}_1(z)$ dans une partie commune de l'anneau P_1 et de ce voisinage. Si, au contraire $\mathfrak{N}(z^*) = 0$, $\mathfrak{N}(z) = (z-z^*)^{2k} \tilde{\mathfrak{N}}(z)$ dans un voisinage du point z^* , où $\tilde{\mathfrak{N}}(z)$ est une fonction holomorphe et elle n'est pas nulle. Donc dans ce voisinage du point z^* il existe deux branches univoques de la racine de $\mathfrak{N}(z)$, de même que précédemment. L'une d'elles est identique à l'une des deux branches de $\mathfrak{N}_1(z)$ dans une partie commune de ce voisinage et de l'anneau P_1 . Ainsi nous avons démontré que $\mathfrak{N}_1(z)$ se prolonge analytiquement sur l'anneau P_2 ; elle est, en outre, réelle sur ∂U .

Considérons maintenant la fonction

$$\mathfrak{N}_2(z) = \sqrt{\frac{(z-r)(1-rz)}{z}} \mathfrak{N}_1(z)$$

dans l'anneau P_2 : c'est une fonction biunivoque, elle n'a pas de points de ramification dans l'anneau P_1 et elle est réelle sur ∂U . Posons

$$\mathfrak{N}_3(z) = -L\left(\frac{\sqrt{z} \sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{\zeta-z}\right) + \overline{L\left(\frac{\sqrt{\bar{z}} \sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{1-\bar{z}\zeta}\right)}.$$

C'est encore, de même que \mathfrak{N}_2 , une fonction biunivoque dans P_2 , elle n'a pas de points de ramification dans P_2 et elle est réelle sur ∂U . Considérons maintenant la fonction

$$\begin{aligned} (17) \quad H(z) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(z-r)(1-rz)}{z}} \mathfrak{N}_1(z) + \mathfrak{N}_3(z) \\ &= L\left(\frac{\sqrt{z} \sqrt{(z-r)(1-rz)} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(f(\zeta)-f(z))} - \frac{\sqrt{z} \sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{\zeta-z}\right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + L \left(\frac{\sqrt{\bar{z}} \sqrt{(\bar{z}-r)(1-r\bar{z})} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(1-f(z)f(\zeta))} + \frac{\sqrt{\bar{z}} \sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{1-\bar{z}\zeta} \right) \\
& = \sqrt{z} \left\{ L \left(\frac{\sqrt{(z-r)(1-rz)} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(f(\zeta)-f(z))} - \frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{\zeta-z} \right) + \right. \\
& \quad \left. + L \left(\frac{\sqrt{(\bar{z}-r)(1-r\bar{z})} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(1-f(z)f(\zeta))} + \frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{1-\bar{z}\zeta} \right) \right\}
\end{aligned}$$

dans l'anneau P_2 . La fonction entre accolades se prolonge comme fonction univoque et holomorphe sur le cercle U , car les fonctions

$$\frac{\sqrt{(z-r)(1-rz)} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(f(\zeta)-f(z))} - \frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{\zeta-z}$$

et

$$\frac{\sqrt{(\bar{z}-r)(1-r\bar{z})} f'(z) \eta(\zeta)}{\eta(z)(1-f(z)f(\zeta))} + \frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{1-\bar{z}\zeta}$$

sont univoques et holomorphes respectivement par rapport aux variables ζ , z et ζ , \bar{z} dans $U_1 \times U$ est encore une conséquence de la représentation intégrale de la fonctionnelle L . Donc la fonction $H(z)$ est analytique, biunivoque et elle possède un point singulier, qui est un point de ramification à l'origine. En outre, elle est réelle sur la circonférence ∂U . $H^2(z)$ est déjà une fonction univoque et holomorphe dans U , réelle sur ∂U , donc d'après le principe de la symétrie de Schwarz elle se prolonge comme fonction holomorphe au plan fermé C . Alors $H^2(z) = \text{const}$, et puisque $H(0) = 0$, $H(z) = 0$ pour tout $z \in U$. Ainsi nous avons obtenu la relation suivante pour la fonction extrémale:

$$\begin{aligned}
(18) \quad & \frac{f'(z)}{\eta(z)} \left[L \left(\frac{\eta(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)} \right) + \overline{L \left(\frac{\eta(\zeta)}{1-f(z)f(\zeta)} \right)} \right] \\
& = \frac{1}{\sqrt{(z-r)(1-rz)}} \left[L \left(\frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{\zeta-z} \right) - \overline{L \left(\frac{\sqrt{(\zeta-r)(1-r\zeta)}}{1-\bar{z}\zeta} \right)} \right]
\end{aligned}$$

pour $z \in P_2$.

Maintenant notre but est de calculer les valeurs de la fonctionnelle (8) pour cette fonction extrémale.

Pour faciliter les calculs introduisons les notations suivantes:

$$w(z) = \sqrt{1-2xz+z^2},$$

où

$$x = \frac{1}{2}(r+1/r).$$

Alors (18) prendra la forme

(19)

$$\frac{f'(z)}{\eta(z)} \left[L\left(\frac{\eta(\zeta)}{f(\zeta)-f(z)}\right) + \overline{L\left(\frac{\eta(\zeta)}{1-f(z)f(\zeta)}\right)} \right] = \frac{1}{w(z)} \left[L\left(\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\right) + \overline{L\left(\frac{w(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\right)} \right].$$

Pour calculer les intégrales de la dernière équation, différentions par rapport à z resp. \bar{z} les fonctions $A(\zeta, z)$ et $B(\zeta, \bar{z})$; Nous obtenons

$$(20) \quad \frac{\partial A(\zeta, z)}{\partial z} = -\frac{f'(z)}{f(\zeta)-f(z)} \frac{\eta(\zeta)}{\eta(z)} + \frac{1}{\zeta-z},$$

$$(21) \quad \frac{\partial B(\zeta, \bar{z})}{\partial \bar{z}} = -\frac{f'(z)}{1-f(z)f(\zeta)} \frac{\eta(\zeta)}{\eta(z)}.$$

En posant (20) et (21) dans (19) et en tenant compte du fait que la fonctionnelle L est continue et linéaire:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial z}(\varphi(\zeta, z))\right) = \frac{d}{dz} L(\varphi(\zeta, z)) \quad \text{et} \quad \overline{L\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\varphi(\zeta, \bar{z}))\right)} = \frac{d}{dz} \overline{L(\varphi(\zeta, \bar{z}))},$$

nous obtenons

$$(22) \quad \frac{d}{dz} L(A(\zeta, z)) + \frac{d}{dz} \overline{L(B(\zeta, \bar{z}))} = L\left(\frac{1}{\zeta-z}\right) - \frac{1}{w(z)} \left[L\left(\frac{w(\zeta)}{\zeta-z}\right) + \overline{L\left(\frac{w(\zeta)}{1-\bar{z}\zeta}\right)} \right]$$

pour $z \in P_2$. Posons

$$(23) \quad \alpha(\zeta, z) = \log \frac{1-x(z+\zeta)+z\zeta-w(z)w(\zeta)}{(\zeta-z)\sqrt{x^2-1}} = \sum_{j,k=0}^{\infty} A_{jk}(x) \zeta^j z^k,$$

$$(24) \quad \beta(\zeta, \bar{z}) = \log \frac{\overline{w(z)w(\zeta)}+x(1+\bar{z}\zeta)-\bar{z}-\zeta}{(1-\bar{z}\zeta)\sqrt{x^2-1}} = \sum_{j,k=0}^{\infty} B_{jk}(x) \zeta^j \bar{z}^k,$$

où ces développements sont valides dans $U_1 \times U_1$, et où seuls les coefficients $A_{00}(x)$ et $B_{00}(x)$ ne sont pas définis univoquement. Un simple calcul montre que

$$(25) \quad \frac{\partial \alpha}{\partial z} = \left(1 - \frac{w(\zeta)}{w(z)}\right) \frac{1}{\zeta-z}$$

et

$$(26) \quad \frac{\partial \beta}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{1-\bar{z}\zeta} \frac{w(\zeta)}{w(z)},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \overline{\beta(\zeta, \bar{z})} = \overline{\left(\frac{\partial \beta(\zeta, \bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)} = -\frac{1}{1-\bar{\zeta}z} \frac{\overline{w(\zeta)}}{w(z)}.$$

Donc finalement

$$(27) \quad \frac{d}{dz} [L(A(\zeta, z)) + \overline{L(B(\zeta, \bar{z}))}] = \frac{d}{dz} [L(\alpha(\zeta, z)) + \overline{L(\beta(\zeta, \bar{z}))}],$$

découle de (22), (23) et (24).

Cette égalité est remplie pour chaque $z \in P_2$, les fonctions qui figurent dans les deux membres de l'équation (27) possèdent un point unique de ramification dans r . Maintenant en calculant les intégrales des deux membres de (27) sur une courbe arbitraire, qui est située dans P_2 et unit $z \in P_2$ avec r , il faut d'abord prendre au point z les mêmes valeurs des fonctions multivoques figurant dans les deux membres de l'égalité (27), et ensuite prolonger ces fonctions sur la courbe mentionnée jusqu'à un point arbitraire $z' \neq r$, alors nous obtenons

$$(28) \quad [L(A(\zeta, z)) + \overline{L(B(\zeta, \bar{z}))}] - [L(A(\zeta, z')) + \overline{L(B(\zeta, \bar{z}'))}] \\ = [L(\alpha(\zeta, z)) + \overline{L(\beta(\zeta, \bar{z}))}] - [L(\alpha(\zeta, z')) + \overline{L(\beta(\zeta, \bar{z}'))}].$$

Ensuite nous constatons que

$$A(\zeta, z') \xrightarrow{z' \rightarrow r} -\log(r - \zeta), \quad B(\zeta, \bar{z}') \xrightarrow{z' \rightarrow r} \log 1, \\ \alpha(\zeta, z') \xrightarrow{z' \rightarrow r} -\log(r - \zeta) + \log \frac{1 - r^2}{2r \sqrt{x^2 - 1}} = -\log(r - \zeta), \\ \beta(\zeta, \bar{z}') \xrightarrow{z' \rightarrow r} -\log \frac{1 - r^2}{2r \sqrt{x^2 - 1}} = \log 1$$

et, en passant à la limite avec $z' \rightarrow r$ dans (28), et en tenant compte du fait que $\text{Im } L(1) = 0$, nous obtenons

$$(29) \quad L(A(\zeta, z)) + \overline{L(B(\zeta, \bar{z}))} = L(\alpha(\zeta, z)) + \overline{L(\beta(\zeta, \bar{z}))} + C,$$

où C est un nombre constant réelle, et dans les deux membres de (29) il existe des fonctions multivoques de la variable $z \in P_2$ avec un point de ramification unique dans r . Puisque les fonctions $A(\zeta, z)$, $B(\zeta, \bar{z})$, $\alpha(\zeta, z)$, $\beta(\zeta, \bar{z})$ examinées dans l'ensemble $\{\zeta: |\zeta| = \rho\} \times P_2$ se prolongent comme fonctions analytiques biunivoques des variables (ζ, z) et ζ, \bar{z} respectivement sur l'ensemble $U_1 \times U_1$ admettant les développements (6), (7) et (23), (24), les fonctions $L(A(\zeta, z))$, $L(B(\zeta, \bar{z}))$, $L(\alpha(\zeta, z))$ et $L(\beta(\zeta, \bar{z}))$ sont des fonctions analytiques biunivoques dans U_1 sans points de ramification et la valeur de la fonctionnelle $\text{Re } L$ pour la fonction qui figure au premier membre de (29), et par ce seul fait au second membre aussi, ne dépend pas du choix des branches respectives; donc nous obtenons l'égalité

$$\text{Re}(L^2(A(\zeta, z)) + |L|^2(B(\zeta, \bar{z}))) = \text{Re}(L^2(\alpha(\zeta, z)) + |L|^2(\beta(\zeta, \bar{z}))).$$

THÉORÈME 1. Soit $f \in F_T$ et $d = f(re^{i\varphi})$, $0 < r < 1$, $x = \frac{1}{2}(r+1/r)$. Si $L \in H'_C(U_1)$, $\text{Im } L(1) = 0$, $\Lambda(h)$ définie par la formule (9) ne s'annule identiquement en aucun point de la famille F_T , et $A(z, \zeta)$, $B(z, \bar{\zeta})$, $\beta(z, \bar{\zeta})$ et $\alpha(z, \zeta)$ sont définies par les formules (6), (7) et (23), (24), l'inégalité suivante est remplie

$$(30) \quad \text{Re} \{L^2(A(z, \zeta)) + |L|^2(B(z, \bar{\zeta}))\} \\ \leq \text{Re} \{L^2(\alpha(ze^{-i\varphi}, \zeta e^{-i\varphi})) + |L|^2(\beta(ze^{-i\varphi}, \bar{\zeta} e^{i\varphi}))\}.$$

L'inégalité (30) est exacte et la fonction extrémale f a la forme

$$f(z) = Tz + \dots$$

et satisfait dans U à l'équation fonctionnelle

$$(31) \quad L\left(\log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(F(z) + F(\zeta))(z - \zeta)}\right) + L\left(\log \frac{1 - F(z)\overline{F(\zeta)}}{1 + F(z)F(\zeta)}\right) + L(i\varphi) \\ = L(\alpha(ze^{-i\varphi}, \zeta e^{-i\varphi})) + \overline{L(\beta(ze^{-i\varphi}, \bar{\zeta} e^{i\varphi}))}.$$

Démonstration. Dans le cas où $\varphi = 0$, ce théorème est une conclusion immédiate des considérations précédentes. Dans le cas où $\varphi \neq 0$ posons

$$(32) \quad L^*(h(z)) = L(h(ze^{-i\varphi})), \quad \text{pour } h \in H(U) \quad (L^*(h(ze^{i\varphi})) = L(h(z))).$$

De plus, $L^* \in H'(U)$, possède les mêmes propriétés que la fonctionnelle L . Posons encore

$$(33) \quad f^*(z) = e^{-i\varphi} f(ze^{i\varphi})$$

et

$$(34) \quad d^* = f^*(r) = e^{-i\varphi} f(re^{i\varphi}) = e^{-i\varphi} d.$$

En tenant compte du fait que $f^* \in F_T$, en posant

$$(35) \quad F^*(z) = \sqrt{\frac{d^* - f^*(z)}{1 - \bar{d}^* f^*(z)}}$$

et en appliquant à la fonctionnelle L^* et à la fonction f^* l'inégalité (30) et l'égalité (31) pour $\varphi = 0$, nous obtenons

$$(36) \quad \text{Re} \left\{ L^{*2} \left(\log \frac{F^*(z) - F^*(\zeta)}{(F^*(z) + F^*(\zeta))(z - \zeta)} \right) + |L^*|^2 \left(\log \frac{1 + F^*(z)\overline{F^*(\zeta)}}{1 - F^*(z)F^*(\zeta)} \right) \right\} \\ \leq \text{Re} \{L^{*2}(\alpha(z, \zeta)) + |L^*|^2(\beta(z, \bar{\zeta}))\},$$

$$(37) \quad L^* \left(\log \frac{F^*(z) - F^*(\zeta)}{(F^*(z) + F^*(\zeta))(z - \zeta)} \right) + \overline{L^* \left(\log \frac{1 - F^*(z)\overline{F^*(\zeta)}}{1 + F^*(z)F^*(\zeta)} \right)} \\ = L^*(\alpha(z, \zeta)) + \overline{L^*(\beta(z, \bar{\zeta}))}.$$

Mais en vertu de (32)–(35) et de la condition $\text{Im } L(1) = 0$ nous constatons que

$$\begin{aligned} & \text{Re} \left\{ L^{*2} \left(\log \frac{F^*(z) - F^*(\zeta)}{(F^*(z) + F^*(\zeta))(z - \zeta)} \right) + |L^*|^2 \left(\log \frac{1 - F^*(z) \overline{F^*(\zeta)}}{1 + F^*(z) \overline{F^*(\zeta)}} \right) \right\} \\ &= \text{Re} \left\{ L^2 \left(\log \frac{F(z) - F(\zeta)}{(F(z) + F(\zeta))(z - \zeta)} \right) + |L|^2 \left(\log \frac{1 - F(z) \overline{F(\zeta)}}{1 + F(z) \overline{F(\zeta)}} \right) \right\}, \end{aligned}$$

$$\text{Re} \{ L^{*2}(\alpha(z, \zeta)) + |L^*|^2(\beta(z, \bar{\zeta})) \} = \text{Re} \{ L^2(\alpha(ze^{-i\varphi}, \zeta e^{-i\varphi})) + |L|^2(\beta(ze^{-i\varphi}, \bar{\zeta} e^{i\varphi})) \}$$

et l'inégalité (30) est équivalente à l'inégalité (36), tandis que l'égalité (37) prend la forme (31), ce qui achève la démonstration.

En vertu de (4) l'inégalité (30) est remplie pour chaque fonction de la classe S_1 et en outre pour chaque b_1 , $0 < b_1 < 1$, il existe une fonction de classe S_1 avec le premier coefficient b_1 , pour laquelle l'inégalité devient une égalité.

De cette manière le théorème suivant a été démontré:

THÉORÈME 2. *Dans chaque classe $S(b_1)$ l'inégalité (30) est remplie et elle est exacte dans cette classe. La fonction extrémale satisfait à l'équation (31).*

Ainsi le problème posé au début est entièrement résolu.

Références

- [1] Z. Charzyński, *Sur les fonctions univalentes bornées*, Rozprawy Mat. 2 (1953), 1–57.
- [2] —, W. Janowski, *Sur l'équation générale des fonctions extrémales dans la famille des fonctions univalentes bornées*, Ann. Univ. M. Curie-Skłodowska 4 (7), Sec. A (1950), 41–56.
- [3] —, H. Śmiałkówna, *Sur certaines conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions holomorphes dans le cercle unité soient univalentes et bornées*, Bull. Soc. Sci. Lettres, Łódź, Sec. III, 8 (2) (1957), 1–7.
- [4] D. W. De Temple, *On coefficient inequalities for bounded univalent functions*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. AI, 469 (1970), 1–19.
- [5] —, *Generalizations of the Grunsky–Nehari inequalities*, Arch. Rational Mech. Anal. 44 (1971), 93–120.
- [6] P. R. Garabedian, M. Schiffer, *The local maximum theorem for coefficients of univalent functions*, ibidem 26 (1967), 1–32.
- [7] Z. Nehari, *Some inequalities in the theory of functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 75 (1953), 256–286.
- [8] —, *Inequalities for the coefficients of univalent functions*, Arch. Rational. Mech. Anal. 34 (1969), 301–330.
- [9] G. Schober, *Univalent Functions — Selected Topics*, Lecture Notes Math. 478. Berlin-Heidelberg-New York 1975, 34–38.

Reçu par la Rédaction le 4.01.1983