ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVI (1979)

Sur un espace complet de champs tayloriens réguliers

par KRYSTYNA WACHTA (Kraków)

Résumé. On étude dans le travail des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace $J(K)$ des champs tayloriens réguliers définis sur un compact $K \subset \mathbf{R}^n$ soit complet dans l'espace $I(K)$ des champs tayloriens sur K avec la topologie de la convergence uniforme des coefficients.

Le sujet de ce travail est l'étude des conditions nécessaires et suffisantes pour que l'espace $J(K)$ des champs tayloriens réguliers définis sur un compact $K \subset \mathbf{R}^n$ soit complet dans l'espace $I(K)$ des champs tayloriens sur K avec la topologie de la convergence uniforme des coefficients.

Le théorème (2.1) montre que $J(K)$ est fermé dans $I(K)$ si et seulement si la topologie naturelle (celle de Fréchet) est la même que la topologie induite de $I(K)$.

Nous donnons ensuite des conditions géométriques. On a constaté que la condition bien connue de Whitney (Théorème (3.1)) qui est suffisante, n'est pourtant pas nécessaire pour que $J(K)$ soit fermé.

Le théorème (3.2) donne une autre condition suffisante dans le cas où K est un arc simple.

En remplaçant dans la condition de Whitney la longueur de l'arc par le diamètre d'un ensemble connexe nous obtenons une condition nécessaire (Théorème (4.1)).

Je tiens à remercier M. S. Łojasiewicz dont les remarques m'ont beaucoup aidé à rédiger ce travail.

1. Soient $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{N}$ l'ensemble des nombres naturels, $\mathbf{Z}$ l'ensemble des nombres entiers. Pour chaque ouvert $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, $C^m(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions réelles de classe C^m sur Ω. Pour $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ posons $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\alpha! = (\alpha_1!) \cdot \ldots \cdot (\alpha_n!)$.

Pour $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ l'inégalité $\alpha \leqslant \beta$ signifie que $\alpha_j \leqslant \beta_j$, $j = 1, \ldots, n$. On écrit

$$\binom{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} \quad \text{lorsque } \alpha \geqslant \beta,$$

$$|x| = \sqrt{(x_1)^2 + \ldots + (x_n)^2} \quad \text{lorsque } x \in \mathbf{R}^n.$$

Soit K un compact dans $\boldsymbol{R}^n$. Un champ taylorien sur K est un système $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n}$ de fonctions réelles continues sur K. (On l'identifie avec le champ des séries formelles

$$f\colon K \ni x \to \sum \frac{f^\alpha(x)}{\alpha!} X_1^{\alpha_1} \ldots X_n^{\alpha_n},$$

donc avec le champ à valeurs dans $R[X_1, \ldots, X_n]$.) Soit $I(K)$ l'espace de tous les champs tayloriens sur K.

La suite des semi-normes:

$$|f|_m = \sup_{\substack{x\in K\\ |\alpha|\leqslant m}} |f^\alpha(x)|, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

donne la structure naturelle d'un espace de Fréchet dans $I(K)$. Pour chaque $\beta \in \boldsymbol{N}^n$ nous pouvons définir l'application linéaire:

$$D^\beta\colon I(K) \ni (f^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n} \to (f^{\beta+\alpha})_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n} \in I(K).$$

On définit pour $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n} \in I(K)$ et $m \in \boldsymbol{N}$ la fonction continue:

$$r_f^m\colon K\times K \ni (x, y) \to f^0(y) - \sum_{|\alpha|\leqslant m} \frac{(y-x)^\alpha}{\alpha!} f^\alpha(x) \in \boldsymbol{R}.$$

DÉFINITION (1.1). On dit que $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n} \in I(K)$ est *régulier* s'il satisfait à la condition suivante:

$$r^k_{D^\alpha f}(x, y) = o(|x-y|^k) \qquad \text{lorsque } |x-y| \to 0,\ x, y \in K$$
$$\text{pour chaque } k \in \boldsymbol{N},\ \alpha \in \boldsymbol{N}^n.$$

Selon le théorème de Whitney [1], $f \in I(K)$ est régulier s'il existe une fonction $F \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ telle que: $D^\alpha F|_K = f^\alpha$ pour chaque α.

Désignons par $J(K)$ l'espace de tous les champs tayloriens réguliers sur K. On définit la suite des semi-normes dans $J(K)$ de la manière suivante:

$$\|f\|_m = |f|_m + \sup_{\substack{x,y\in K\\ x\neq y\\ |\alpha|\leqslant m}} \frac{r^m_{D^\alpha f}(x, y)}{|x-y|^{m-|\alpha|}} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

PROPOSITION (1.1). *$J(K)$ avec la suite $\|f\|_m$ est un espace de Fréchet.*

Démonstration. Soit $f_l = (f_l^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n}$ $(l = 1, 2, \ldots)$ une suite de champs tayloriens réguliers sur K telle que: $\|f_r - f_s\|_m \to 0$ quand $r, s \to \infty$ pour chaque m. Pour chaque α, $f_l^\alpha \to f^\alpha$ uniformément sur K, où f^α est continue sur K.

Pour k, β tels que $|\beta| \leqslant k$:

$$\frac{r^{k-|\beta|}_{D^\beta f_l}(x, y)}{|x-y|^{k-|\beta|}} \to \frac{r^{k-|\beta|}_{D^\beta f}(x, y)}{|x-y|^{k-|\beta|}} \qquad (l \to \infty)$$

uniformément sur K, où $f = (f^\alpha)_{\alpha\in\boldsymbol{N}^n}$.

Donc f est régulier et $\|f_l - f\|_m \to 0$ $(l \to \infty)$ pour chaque m, ce qui termine la démonstration.

Les suites $\{|\ |_m\}$ et $\{\|\ \|_m\}$ ne sont pas toujours équivalentes, ce que montre l'exemple suivant: Prenons comme $K \subset \boldsymbol{R}$ l'ensemble des points $\{\pm 1/n\}_{n\in \boldsymbol{N}} \cup \{0\}$.

Considérons la suite des champs tayloriens réguliers sur K:

$$f_m^0\left(\pm\frac{1}{n}\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{pour} \quad n \leqslant m, \\ \dfrac{1}{m} & \text{pour} \quad n > m, \end{cases}$$

$$f_m^0(0) = \frac{1}{m},$$

$$f_m^\alpha\left(\pm\frac{1}{n}\right) = f_m^\alpha(0) = 0 \quad \text{pour } |\alpha| \geqslant 1,\ m = 1, 2, \ldots$$

Cette suite est convergente dans la topologie de $\{|\ |_m\}$, mais elle n'est pas convergente dans la topologie de $\{\|\ \|_m\}$.

2. Nous allons démontrer le théorème suivant:

Théorème (2.1). *Soit K un compact dans $\boldsymbol{R}^n$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$J(K)$ est fermé dans $I(K)$ dans la topologie de $\{|\ |_m\}$.*

(ii) *Pour chaque $k \in \boldsymbol{N}$ existent, des constantes $C > 0$, $m \in \boldsymbol{N}$ telles que pour chaque $f \in J(K)$ on a*

$$\|f\|_k \leqslant C\,|f|_{k+m}.$$

Démonstration. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) est évidente, car pour chaque k $|f|_k \leqslant \|f\|_k$ et l'espace $I(K)$ est complet avec la topologie $\{\|\ \|_m\}$. La condition (i) implique que $J(K)$ est un espace de Fréchet avec la métrique induite par $\{|\ |_m\}$. Puisque $\mathrm{id}_{J(K)}$ est continue comme application de $(J(K), \{\|\ \|_m\})$ dans $(J(K)\{|\ |_m\})$, on obtient (ii), ce qui termine la démonstration.

3. On a le théorème bien connu:

Théorème (3.1). *Soit K un compact dans $\boldsymbol{R}^n$. Supposons que la condition suivante soit satisfaite:*

(1) *Pour chaque $a \in K$ existent: un voisinage U de a et des constantes $\alpha > 0$, $d > 0$ telles que deux points quelconques $x, y \in K \cap U$ peuvent être joints par un arc λ de longueur $|\lambda| \leqslant d\,|x-y|^\alpha$.*

Alors $J(K)$ est fermé avec la topologie de $\{|\ |_m\}$.

LEMME 3.1 (inégalité de Whitney, [2]). *Soit $\lambda \subset K$ un arc d'extrémités x, y. Soit $f = (f^\beta)_{\beta\in N^n} \in J(K)$. Alors pour chaque $k \in N$ on a*

$$|r_f^k(x, y)| \leqslant M_k \sup_{\substack{|\beta|=k+1 \\ z\in\lambda}} |f^\beta(z)|\; |\lambda|^{k+1}, \tag{2}$$

M_k étant une constante qui ne dépend que de n, k.

Démonstration du Lemme. Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $\delta > 0$ tel que pour chaque $u, v \in \lambda$, $|u-v| < \delta$, on a

$$|r_{D^\beta f}^{k-|\beta|+1}(u, v)| < \varepsilon |u-v|^{k-|\beta|+1} \qquad \text{pour } |\beta| \leqslant k.$$

Choisissons les points $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$ tels que $x_i \in \lambda$, $|x_i - x_{i-1}| < \delta$, $i = 1, \ldots, N$.

Alors on a:

$$r_f^k(x, y) = \sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{1}{\beta!} \sum_{i=1}^{N} (y-x_i)^\beta r_{D^\beta f}^{k-|\beta|}(x_{i-1}, x_i)$$

$$= \sum_{|\beta|\leqslant k} \frac{1}{\beta!} \sum_{i=1}^{N} (y-x_i)^\beta \left[r_{D^\beta f}^{k-|\beta|+1}(x_{i-1}, x_i) + \sum_{|\beta|=k+1} \frac{(x_i - x_{i-1})^\beta}{\beta!} f^\beta(x_{i-1}) \right]$$

d'où l'on obtient

$$|r_f^k(x, y)| \leqslant M_k \big(\varepsilon + \sup_{\substack{|\beta|=k+1 \\ z\in\lambda}} f^\beta(z)\big)$$

ce qui démontre le lemme.

Démonstration du Théorème (3.1). Soit $f_l = (f_l^\beta)_{\beta\in N^n}$ ($l = 1, 2, \ldots$) une suite de champs tayloriens réguliers sur K telle que:

$$f_l^\beta \to f^\beta$$

pour chaque β, uniformément sur K.

Nous montrerons que, pour chaque k, $r_f^k(x, y) = o(|x-y|^k)$ quand $x, y \in K$, $|x-y| \to 0$, $f = (f^\beta)_{\beta\in N^n}$.

Soit $a \in K$. Prenons U, a, d comme dans la condition (1), $x, y \in U$. Soit λ un arc comme dans (1). Le nombre k étant fixé, soit $n+1 \geqslant (k+1)/a$. En vertu de l'inégalité (2) on a:

$$|r_f^m(x, y)| \leqslant M_m d^{m+1} |f_l|_{m+1} |x-y|^{k+1}$$

puisque

$$|r_f^m(x, y)| \leqslant M_m |f_l|_{m+1} |\lambda|^{m+1}$$
$$\leqslant M_m d^{m+1} |f_l|_{m+1} |x-y|^{(m+1)a} \leqslant M_m d^{m+1} |f_l|_{m+1} |x-y|^{k+1}.$$

Donc on a:

$$|r_f^k(x, y)| \leqslant |r_f^m(x, y)| + \Big| \sum_{k+1\leqslant|\beta|\leqslant m+1} \frac{(y-x)^\beta}{\beta!} f^\beta(x) \Big| \leqslant C |f|_{m+1} |x-y|^{k+1},$$

où C ne dépend que de n, k, d, a, ce qui termine la démonstration, K étant compact.

Nous montrerons maintenant que la condition de Whitney [1] n'est pas nécessaire pour que l'espace $J(K)$ soit fermé. D'abord nous donnerons une condition suffisante dans le cas où K est un arc simple et puis nous montrerons que cette condition est effectivement plus faible que celle de Whitney.

THÉORÈME (3.2). *Soit $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^n$ un arc simple tel que:*

(3) *Pour chaque $a \in \Lambda$ il existe: un voisinage U de a et des constantes $d > 0$, $\alpha > 0$ telles que pour $x, y \in (\Lambda \cap U) \setminus \{a\}$ il existe une suite finie de points cosécutifs sur Λ: $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$, vérifiant les conditions suivantes:*

$$\sum_{i=1}^{N} |x_i - x_{i-1}| \leqslant d\,|x-y|^{\alpha}, \tag{3a}$$

$$|\Lambda_{x_i x_{i+1}}| \leqslant d\,|x_{i+1} - x_i|^{\alpha} \tag{3b}$$

($\Lambda_{x_i x_{i+1}}$ *est le sous-arc de Λ entre x_i et x_{i+1}*).

Alors $J(\Lambda)$ est fermé dans $I(\Lambda)$ dans la topologie de $\{|\ \ |_m\}$.

Démonstration. Soit $f = (f^{\beta})_{\beta \in N}$ un champ taylorien régulier sur Λ. Soit $k \in \boldsymbol{N}$, $a \in \Lambda$. Prenons U, d, α comme dans (3) et $l \in \boldsymbol{N}$, $m \geqslant k$ tels que:

$$\alpha(l+1) \geqslant 1, \qquad \alpha^2(m+1) \geqslant k+1. \tag{4}$$

Soit $x, y \in (\Lambda \cap U) \setminus \{a\}$.

Nous établirons l'inégalité

$$|r_f^k(x, y)| \leqslant C\,|f|_{m+l+1}\,|x-y|^{k+1}, \tag{5}$$

où C ne dépend que de k, n, d, α.

Choisissons d'abord $x = x_0, x_1, \ldots, x_N = y$ vérifiant (3a) et (3b). Nous avons:

$$r_f^m(x, y) = \sum_{|\gamma| \leqslant m} \frac{1}{\gamma!} \sum_{i=1}^{N} (y - x_i)^{\gamma}\, r_{D^{\gamma} f}^{m-|\gamma|}(x_{i-1}, x_i), \tag{6}$$

$$r_{D^{\gamma} f}^{m-|\gamma|}(x_{i-1}, x_i) = r_{D^{\gamma} f}^{m-|\gamma|+l}(x_{i-1}, x_i) + \sum_{m-|\gamma|+1 \leqslant |\delta| \leqslant m-|\gamma|+l} \frac{(x_i - x_{i-1})^{\delta}}{\delta!} f^{\delta}(x_{i-1}). \tag{7}$$

D'après l'inégalité de Whitney [1] nous avons aussi

$$|r_{D^{\gamma} f}^{m-|\gamma|+l}(x_{i-1}, x_i)| \leqslant C_1\,|f|_{m+l+1}\,|\Lambda_{x_{i-1} x_i}|^{m-|\gamma|+l+1} \tag{8}$$

quand $|\gamma| \leqslant m$, $i = 1, \ldots, N_j$, C_1 ne dépend que de n, d, a. En vertu de (4), (6), (7), (8) on obtient:

$$|r_f^m(x, y)| \leqslant C_2 \sum_{|\gamma| \leqslant m} |x-y|^{a|\gamma|} |f|_{m+l+1}\Big(|x-y|^{a^2(m-|\gamma|+l+1)} + \\ + \sum_{m-|\gamma|+1 \leqslant |\delta| \leqslant m-|\gamma|+l} |x-y|^{a|\delta|}\Big) \leqslant C_3 |f|_{m+l+1} |x-y|^{a^2(m+1)} \leqslant C_3 |f|_{m+l+1} |x-y|^{k+1},$$

où C_2, C_3 dépendent seulement de n, d, a.

Remarquons que

$$r_f^k(x, y) = r_f^m(x, y) + \sum_{k+1 \leqslant |\delta| \leqslant m} \frac{(y-x)^\delta}{\delta!} f^\delta(x).$$

On en tire

$$|r_f^k(x, y)| \leqslant C |f|_{m+l+1} |x-y|^{k+1},$$

où C dépend de n, d, a seulement, ce qui termine la démonstration de l'inégalite (5).

Supposons maintenant que $g_j = (g_j^\beta)_{\beta \in N^n}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ est une suite de champs tayloriens réguliers telle que $g_j^\beta \to g^\beta$ uniformément sur Λ pour chaque β.

Posons $g = (g^\beta)_{\beta \in N^n}$.

Pour chaque couple j, k on a:

$$|r_{g_j}^k(x, y)| \leqslant C |g_j|_{m+l+1} |x-y|^{k+1}, \quad x, y \in (U \cap \Lambda) \setminus \{a\}.$$

Alors on obtient:

$$|r_g^k(x, y)| \leqslant C |g|_{m+l+1} |x-y|^{k+1}, \quad x, y \in (U \cap \Lambda) \setminus \{a\}.$$

En répétant ce raisonnement nous obtenons des inégalités analogues pour chaque $D^\beta g$, $\beta \in N^n$.

Donc le champ g est régulier.

Maintenant nous donnerons la construction d'un arc simple $\Lambda \subset \boldsymbol{R}^2$ qui satisfait à (3) et ne satisfait pas à la condition de Whitney [1].

Soient $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$, $\{a_i\}_{i=0}^\infty$ deux suites de nombres positifs, $\{N_i\}_{i=1}^\infty$ une suite de nombres naturels telles que: $a_0 = 0$, $\lambda_i > a_i > 0$, $\lambda_i > i(a_i)^{1/i}$, $(\lambda_i)^2 < N_i a_i$,

$$\frac{\lambda_i - a_i}{N_i} \geqslant \frac{\lambda_{i+1} - a_{i+1}}{N_{i+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots), \quad \sum \lambda_i < \infty.$$

Posons $\sigma_n = \sum_{i=0}^n a_i$, $\sigma = \sum_{i=0}^\infty a_i$.

Soit $\Lambda = \bigcup_{l=1}^\infty l_i$, où l_i se compose des segments verticaux

$$I_{i0} = [(\tau_{i0}, 0), (\tau_{i0}, \eta_i)], \quad I_{i1} = [(\tau_{i1}, -\eta_i), (\tau_{i1}, \eta_i)], \quad \ldots \\ \ldots, \quad I_{iN_i} = [(\tau_{iN_i}, -\eta_i), (\tau_{iN_i}, 0)],$$

et des segments horizontaux:

$$J_{i1} = [(\tau_{i0}, \eta_i), (\tau_{i1}, \eta_i)], \quad J_{i2} = [(\tau_{i1}, -\eta_i), (\tau_{i2}, -\eta_i)], \ldots$$
$$\ldots, J_{iN_i} = [(\tau_{iN_{i-1}}, -\eta_i), (\tau_{iN_i}, -\eta_i)],$$

où

$$\tau_{ij} = \sigma_{i-1} + \frac{j \cdot a_i}{N_i}, \quad \eta_i = \frac{\lambda_i - a_i}{2N_i}, \quad (i = 1, 2, \ldots, j = 0, 1, \ldots, N_i).$$

Les inégalités $\lambda_i > i(a_i)^{1/i}$ impliquent que Λ ne satisfait pas à la condition de Whitney.

Cependant la condition (3) est satisfaite pour chaque $a \in \Lambda$: Pour $a \neq (\sigma, 0)$ c'est évident. Soit U un voisinage de $(\sigma, 0)$. Fixons $x, y \in (U \cap \Lambda) \setminus \{(\sigma, 0)\}$. Il suffit maintenant de prendre $d = a = \frac{1}{2}$, $x_1, \ldots, x_N$ étant les points d'intersection de Λ avec la droite horizontale passant par y.

4. Nous démontrerons maintenant une condition nécessaire pour que l'espace des champs tayloriens réguliers définis sur un compact soit complet.

THÉORÈME (4.1). *Soit K un compact dans $\boldsymbol{R}^n$ tel que l'espace $J(K)$ est fermé dans $I(K)$ avec la topologie de $\{|\ |_n\}$. Alors:*

(1) *Pour chaque $a \in K$ il existe: un voisinage U de a et deux constantes $a > 0$, $d > 0$ telles que pour chaque $x, y \in U \cap K$ il existe un ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que*

$$x, y \in \Lambda, \quad d(\Lambda) < d|x-y|^a,$$

où $d(\Lambda)$ est le diamètre de Λ.

Remarquons que dans ce cas K se compose d'un nombre fini de composantes connexes.

D'abord nous établirons deux lemmes.

LEMME (4.1). *Fixons: un compact $K \subset \boldsymbol{R}^n$, $x, y \in K$. Supposons qu'il n'existe pas d'ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que $x, y \in \Lambda$.*

Alors il existe deux compacts M, N tels que $x \in M$, $y \in N$, $K = M \cup N$, $M \cap N = \emptyset$.

Démonstration. Posons

$$\varrho = \{(A, B): A, B \text{ — compacts}, \ x \in A, \ B \neq \emptyset, \ A \cap B = \emptyset, A \cup B = K\},$$

$$S = \bigcap_{(A,B) \in \varrho} A,$$

S est un ensemble compact et $x \in S$. Nous montrerons que $y \notin S$. Il suffit de montrer que S est connexe.

Supposons le contraire: $S = P \cup Q$, P, Q sont compacts, $P \cap Q = \emptyset$, $x \in P$, $Q \neq \emptyset$.

Prenons $(A_i, B_i) \in \varrho$ $(i = 1, 2, \ldots)$ de manière que $A_i \subset A_{i+1}$, $\bigcap A_i = S$.

Pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe $i_\varepsilon \in \boldsymbol{N}$ tel que pour chaque $i \geqslant i_\varepsilon$ on a:

$$A_i \subset S_\varepsilon = \{z \in \boldsymbol{R}^n\colon\ \varrho(z, S) \leqslant \varepsilon\} \quad \text{où } \varrho(z, S) = \inf\{|z-s|\colon\ s \in S\}.$$

Fixons $\varepsilon = \frac{1}{3}\varrho(P, Q)$. Alors on obtient

$$A_{i_\varepsilon} = (A_{i_\varepsilon} \cap P_\varepsilon) \cup (A_{i_\varepsilon} \cap Q_\varepsilon), \quad (A_{i_\varepsilon} \cap P_\varepsilon) \cap (A_{i_\varepsilon} \cap Q_\varepsilon) = \emptyset.$$

En ce cas $\big(A_{i_\varepsilon} \cap P_\varepsilon, (A_{i_\varepsilon} \cap Q_\varepsilon) \cup B_{i_\varepsilon}\big) \in \varrho$, ce qui est impossible.

LEMME (4.2). *Soit K un ensemble compact dans $\boldsymbol{R}^n$, $x, y \in K$, $0 < \delta < 1$. Supposons que pour chaque ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que $x, y \in \Lambda$ on a*

$$d(\Lambda) > \delta. \tag{2}$$

Alors pour chaque $m \in \boldsymbol{N}$ on peut trouver $f \in J(K)$ tel que

$$r_f^1(x, y) > M|f|_m \delta^m \tag{3}$$

où M ne depend que de n, m.

Démonstration. Posons $\varrho = \frac{1}{9}\delta$. Soit $\varphi \in C^\infty(\boldsymbol{R})$ tele que:

$$\varphi(t) = 0 \quad \text{dans un voisinage de } 0, \tag{4}$$

$$\varphi(t) = \varrho^m \quad \text{pour } t \geqslant 2\varrho, \tag{5}$$

$$|\varphi^{(m)}(t)| \leqslant 1 \quad \text{pour chaque } t \in \boldsymbol{R}. \tag{6}$$

Soit $K_1 = K \cap \big(B(x, 2\varrho) \cup B(y, 2\varrho)\big)$, où $(Bx, 2\varrho)$, $B(y, 2\varrho)$ sont des boules fermées de rayon 2ϱ et de centres x et y respectivement.

Il n'existe pas d'ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que $x, y \in \Lambda$. On en déduit que $K_1 = M \cup N$, où M, N sont compacts, $M \cap N = \emptyset$, $x \in M$, $y \in N$.

Nous pouvons définir une fonction $\tilde{f} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^n)$ telle que:

$$\tilde{f}(z) = \varphi(|z-x|) \qquad \text{dans un voisinage de } M,$$

$$\tilde{f}(z) = 2\varrho^m - \varphi(|z-x|) \qquad \text{dans un voisinage de } N,$$

$$\tilde{f}(z) = \varrho^m \qquad \text{dans un voisinage de } K \setminus K_1.$$

Le champ taylorien régulier $(D^\alpha \tilde{f})_{\alpha \in \boldsymbol{N}^n}$ satisfait à la condition (3).

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème (4.1).

Supposons qu'il existe $a \in K$ tel que pour chaque $\varepsilon > 0$, $p, r \in N$ on peut prendre $x, y \in K$ de manière que:

$$|x-a| < \varepsilon, \quad |y-a| < \varepsilon, \tag{7}$$

(8) pour chaque ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que $x, y \in \Lambda$ on a:

$$d(\Lambda) > p\,|x-y|^{1/r}.$$

Pour chaque $l, m \in N$ nous construirons un champ taylorien régulier f et nous trouverons deux points $u, v \in K$ tels que:

$$r_f^1(u, v) > l\,|f|_m\,|u-v|.$$

Fixons l, m. Posons $r = m$, p — tel que $p^m > 1/M$ où M est la constante du lemme (4.2) et $\varepsilon > 0$ est let que $p(2\varepsilon)^{1/m} < 1$.

Alors on peut prendre $u, v \in K$ tels que les conditions (7), (8) sont satisfaites. Dans ce cas pour chaque ensemble connexe $\Lambda \subset K$ tel que $u, v \in \Lambda$ on a:

$$d(\Lambda) > p\,|u-v|^{1/m}.$$

Choisissons f comme dans le lemme (4.2). Alors on obtient:

$$r_f^1(u, v) > M\,|f|_m(p\,|u-v|^{1/m})^m > l\,|f|_m\,|u-v|$$

ce qui termine la démonstration.

Bibliographie

[1] H. Whitney, *Analytic extension of differentiable functions defined in closed sets*, Trans. Amer. Math. Soc. 36 (1934), p. 63–89.

[2] — *Functions differentiable on the boundaries of regions*, Ann. of Math. 35 No. 3 (1934).

Reçu par la Rédaction le 26. 3. 1976