ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVIII (1988)

Charakterisierung der Funktion $1/x$ durch Funktionalgleichungen

von PETER VOLKMANN (Karlsruhe)

Résumé. La fonction $g(x) = 1/x$ est la solution unique du système des équations fonctionnelles (1), (2).

SATZ. *Die einzige Funktion* g: $(0, \infty) \to (-\infty, \infty)$, *welche den Funktionalgleichungen*

(1) $$g(g(x)) = x \quad (x > 0),$$

(2) $$g(x+1) = \frac{g(x)}{g(x)+1} \quad (x > 0)$$

gleichzeitig genügt, ist $g(x) = 1/x$.

Bemerkungen. Unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß g auf einem nichtleeren, offenen Teilintervall von $(0, \infty)$ stetig ist, wurde dieser Satz von L. Dubikajtis [1] bewiesen. Ähnlich wie bei einem Beweis in [2] werden im Folgenden endliche Kettenbrüche herangezogen.

Beweis des Satzes. 1. Mit $P = (0, \infty)$ folgt aus (1), daß g: $P \to P$ bijektiv ist. Setzt man

$$f(x) = 1/g(x) \quad (x > 0),$$

so ist auch f: $P \to P$ bijektiv, und es genügt, die Beziehung

(3) $$f(x) = x \quad (x > 0)$$

nachzuweisen. Zunächst ergeben sich aus (1) bzw. (2) die Funktionalgleichungen

(4) $$f(1/f(x)) = 1/x \quad (x > 0),$$

(5) $$f(x+1) = f(x)+1 \quad (x > 0).$$

Mit $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ folgt aus (5)

(6) $$f(x+m) = f(x)+m \qquad (x > 0,\ m \in N).$$

Die Umkehrfunktion f^{-1}: $P \to P$ ist bijektiv, und sowohl aus (4) als auch aus (5) ergibt sich jeweils die Richtigkeit derselben Funktionalgleichung mit f^{-1} an Stelle von f. Damit gilt jede für f bewiesene Aussage automatisch auch für f^{-1}.

2. Nun soll

(7) $$f(m) = m \qquad (m \in N),$$

(8) $$f((0,\ m)) = (0,\ m), \quad f((m,\ \infty)) = (m,\ \infty) \quad (m \in N)$$

gezeigt werden. Da f: $P \to P$ bijektiv ist und f^{-1} alle Eigenschaften von f besitzt, genügt der Nachweis von (7) und

(9) $$f((0,\ m]) \subseteq (0,\ m] \qquad (m \in N).$$

Wäre (9) falsch, so hätte man für ein $m \in N$ und ein

(10) $$x \in (0,\ m]$$

die Beziehung $f(x) > m$, also

$$f(x) = y+m$$

mit $y > 0$. Da (6) auch für f^{-1} statt f gilt, folgt

$$x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y+m) = f^{-1}(y)+m > m,$$

im Widerspruch zu (10). Damit ist (9) bewiesen, und es bleibt der Nachweis von (7) übrig: Wegen (5) genügt es,

(11) $$f(1) = 1$$

zu zeigen. Auf Grund von (9) und der (9) entsprechenden Beziehung für f^{-1} statt f gilt

(12) $$f((0,\ 1]) = (0,\ 1],$$

und hieraus folgt

(13) $$f((1,\ \infty)) = (1,\ \infty).$$

Wäre (11) falsch, so hätte man nach (12) $f(1) < 1$. Es folgt dann $1/f(1) > 1$, und mit (4), (13) ergibt sich weiter

$$1 = f(1/f(1)) > 1.$$

Das ist unmöglich, also gilt (11).

3. Jede positive rationale Zahl r läßt sich in einen endlichen Kettenbruch entwickeln,

$$r = u_0 + \cfrac{1}{u_1 + \cfrac{1}{u_2 + \dots + \cfrac{1}{u_n}}} \tag{14}$$

mit $u_0 \in N \cup \{0\}$ und $u_1, u_2, \dots, u_n \in N$. Für $n = 1, 2, 3, \dots$ bezeichne K_n die Gesamtheit der Kettenbrüche (14), und es sei $K_0 = N$. Die Beziehungen

$$f(r) = r, \quad f((0, r)) = (0, r), \quad f((r, \infty)) = (r, \infty) \quad (r \in K_n) \tag{15}$$

können durch vollständige Induktion bestätigt werden: Für $n = 0$ gelten sie wegen (7), (8). Um den Schluß von n auf $n+1$ durchzuführen, sei $s \in K_{n+1}$, also

$$s = m + 1/t \quad \text{mit} \quad m \in N \cup \{0\}, \quad t \in K_n. \tag{16}$$

Es geht darum,

$$f(s) = s, \quad f((0, s)) = (0, s), \quad f((s, \infty)) = (s, \infty) \tag{17}$$

herzuleiten. Zunächst wird

$$f([s, \infty)) \subseteq [s, \infty) \tag{18}$$

bewiesen: Für

$$x \geqslant s \tag{19}$$

gilt nach (16) $x \geqslant m + 1/t$, und mit (4) folgt

$$f\left(\frac{1}{f(x-m)}\right) = \frac{1}{x-m} \leqslant t.$$

Wegen $t \in K_n$ ergibt sich mit Hilfe von (15) $1/f(x-m) \leqslant t$; hieraus erhält man mit (6), (16)

$$f(x) = f(x-m+m) = f(x-m) + m \geqslant 1/t + m = s.$$

Das beweist (18). Setzt man in (19) $x = s$ voraus, dann gilt auch in den daraus abgeleiteten Beziehungen die Gleichheit, und man erhält so

$$f(s) = s. \tag{20}$$

Aus (15) ergibt sich (18) auch für f^{-1} an Stelle von f. Zusammen mit (18), (20) gilt demzufolge (17).

4. Es bezeichne Q_+ die Menge der positiven rationalen Zahlen. Aus (15) für $n = 0, 1, 2, \dots$ folgt dann

$$r \leqslant x \leqslant s \Rightarrow r \leqslant f(x) \leqslant s \quad (x \in P;\ r, s \in Q_+).$$

Die einzige Funktion $f\colon P \to P$, welche dieser Bedingung genügt, ist die durch (3) gegebene $f(x) = x$.

Literatur

[1] L. Dubikajtis, *Sur certaines équations fonctionnelles vérifiées par la fonction* $\varphi(x) = x^{-1}$, Ann. Polon. Math. 22 (1969), 199–205.

[2] L. Volkmann, P. Volkmann, *Über die Charakterisierung der Funktion* $f(x) = x$ *durch Funktionalgleichungen, II*, Aequationes Math. 30 (1986), 142–150.

Reçu par la Rédaction le 1985.10.21