ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Über ein geometrisches lineares Objekt des Typus [3, 2, 1]

von Z. KAREŃSKA (Kraków)

In vorliegender Note wird ein rein-differentielles geometrisches Obiekt des Typus [3, 2, 1] mit der linearen nichthomogenen Transformationsformel eingeführt. Dieses Obiekt nenne ich *Derivat*.

Zuerst gebe ich einige Bezeichnungen an. Mit

(1) $$x = \|x_{ik}\|, \quad i, k = 1, 2,$$

bezeichnen wir nichtsinguläre Matrizen zweiter Ordnung über dem Körper der reellen Zahlen R ($x \in \mathrm{GL}(2, R)$). $\Delta = \mathrm{Det}\, x$ bezeichnet die Determinante von x. Bezeichnen wir weiter mit $F(x)$ und $g(x)$ die folgenden Matrixfunktionen von (1):

(2) $$F(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} x_{11}^2 & 2x_{11}x_{12} & x_{12}^2 \\ x_{11}x_{21} & x_{11}x_{22}+x_{12}x_{21} & x_{12}x_{22} \\ x_{21}^2 & 2x_{21}x_{22} & x_{22}^2 \end{Vmatrix},$$

(3) $$g(x) = [F(x) - E]q + g^*(x).$$

E ist die Einheitsmatrix der Ordnung 3, q ist eine beliebige konstante Matrix mit einer Spalte und drei Zeilen, d.h.

$$E = \|\delta_\beta^\alpha\|, \quad \alpha, \beta = 1, 2, 3, \quad q = \|\theta_\alpha\|,$$

und $g^*(x)$ ist eine Matrixfunktion von (1), die durch die nachstehende Formel

$$g^*(x) = \frac{1}{\Delta}\begin{Vmatrix} \begin{vmatrix} \varphi(x_{11}) & \varphi(x_{12}) \\ x_{11} & x_{12} \end{vmatrix} \\ \frac{1}{2}\left[\begin{vmatrix} \varphi(x_{11}) & \varphi(x_{22}) \\ x_{11} & x_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varphi(x_{21}) & \varphi(x_{12}) \\ x_{21} & x_{12} \end{vmatrix}\right] \\ \begin{vmatrix} \varphi(x_{21}) & \varphi(x_{22}) \\ x_{21} & x_{22} \end{vmatrix} \end{Vmatrix}$$

gegeben wird, wo $\varphi(\xi)$ eine beliebige Abbildung des Körpers R in sich die den Funktionalgleichungen

$$\varphi(\xi+\eta) = \varphi(\xi) + \varphi(\eta)$$

und

$$\varphi(\xi\eta) = \eta\varphi(\xi) + \xi\varphi(\eta)$$

für alle ξ und η von R genügt ([8], S. 120).

Die Funktion φ wird *Derivation* des reellen Zahlkörpers R mit den Werten aus R genannt.

In der Arbeit [4] (vgl. auch [8]) wurden grundlegende Eigenschaften der Derivation φ angegeben, unter welchen die folgenden zu nennen sind.

EIGENSCHAFT 1. *Jede meßbare Derivation des reellen Zahlkörpers mit den Werten aus R ist identisch gleich Null für jedes $\xi \in R$.*

EIGENSCHAFT 2. *Beliebige Derivation des reellen Zahlkörpers R mit den Werten aus R verschwindet auf der algebraischen Ergänzung des rationalen Zahlkörpers in dem reellen Zahlkörper R.*

Die Funktion identisch gleich Null im R stellt ein Beispiel der Derivation dar. Wir werden sie die *triviale Derivation* nennen.

Auf Grund der im [8], S. 124 (Corollary 1 und Corollary 1′), enthaltenden Sätze wurden die Beispiele der nichttrivialen Derivationen in der Arbeit [4] konstruiert. Jede solche Derivation ist offensichtlich (Eigenschaft 1) nicht meßbar.

Die Menge der Derivationen ist unabzählbar. Die unmeßbare Derivationen bilden die Beispiele der additiven unmeßbaren und mikroperiodischen Funktionen.

Das Funktionenpaar (3) und (4) stellt — wie man leicht nachprüfen kann — eine Lösung des Funktionalgleichungssystems

$$F(xy) = F(x)F(y)\,,$$
$$g(xy) = F(x)g(y) + g(x)$$

für x und y aus $\mathrm{GL}(2, R)$ dar. (Die allgemeine Lösung dieses Funktionalgleichungssystems wurde in den Arbeiten [2], [3], [4] und [5] bestimmt.) Daraus folgt, daß

$$\omega' = F(A)\omega + [F(A) - E]q + g^*(A)\,,$$

wo

$$A \overset{\mathrm{df}}{=} \|A_\lambda^{\lambda'}\| = \left\|\frac{\partial\xi^{\lambda'}}{\partial\xi^\lambda}\right\|, \quad \lambda = 1, 2\,,\ \lambda' = 1', 2'\,,$$

eine Transformationsregel für ein lineares, nicht homogenes geometrisches Objekt des Typus $[3, 2, 1]$ ([1], S. 15-16, [6], S. 15, 16, 19, 20, 30) ist.

Mit Hilfe der Definition der Äquivalenz von geometrischen Objekte ([7], s. 79) kann man zeigen, daß das Objekt ω dem Objekt d mit der Transformationsregel

$$d' = F(A)d + g^*(A)\,, \tag{4}$$

wo $d = \|\delta^a\|$, $a = 1, 2, 3$, bedeutet, äquivalent ist.

Die vorigen Betrachtungen können im folgenden Satz zusammengefaßt werden:

SATZ. *Die Transformationsformel* (4) *bestimmt ein reindifferentielles, lineares, geometrisches Objekt d erster Klasse mit drei Komponenten im zweidimensionalen Raume.*

DEFINITION. Das Objekt (4) werden wir *Derivat* nennen, wenn die Funktion $g^*(x)$ identisch nicht verschwindet.

Wenn wir uns nur auf meßbare Funktionen beschränken, so gibt es keine Derivate, wie das aus den vorigen Betrachtungen folgt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] Z. Kareńska, *Ogólne rozwiązanie równania funkcyjnego* $F(x\cdot y) = F(x)\cdot F(y)$, *gdzie* x, y *należą do* $\mathrm{GL}(2, R)$, *szukana funkcja* F *jest macierzą* 3×3 (in Vorbereitung).

[3] — *O pewnym równaniu funkcyjnym mającym zastosowanie w teorii obiektów geometrycznych*, Politechnika Krakowska, Zeszyt Naukowy 9 (1965).

[4] — *On some functional equation in the theory of geometric objects* (im Druck).

[5] — *O pewnym układzie równań funkcyjnych znajdującym zastosowanie w teorii obiektów geometrycznych* (in Vorbereitung).

[6] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne XLIII, Warszawa 1964.

[7] — — *Determination of linear differential geometric objects of the first class, with two components, in a two-dimensional space*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), S. 77-84.

[8] O. Zariski and P. Samuel, *Commutative Algebra*, Princeton, New Jersey, Toronto, New York, London 1959, Vol. I, S. 120-131.

Reçu par la Rédaction le 15. 12. 1966