ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1964)

Remarques sur l'allure des solutions des équations différentielles à paramètre retardé

par Z. MIKOŁAJSKA (Kraków)

Les théorèmes démontrés dans la présente note constituent une généralisation des résultats de Ch. G. Cwang [1]. Nous nous occuperons de l'équation

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x\big(t-\Delta(t)\big)\big). \tag{1}$$

Dans le cas $f(t, x, y) = -a^2t/y$ nos théorèmes donnent comme cas particulier les théorèmes de Cwang.

§ 1. Envisageons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES A: *La fonction* $\psi(t) = t-\Delta(t)$ *satisfait aux conditions suivantes*:

(A_1) $\psi(t) = t-\Delta(t) \geqslant 0$ *pour* $t \geqslant 0$, $\Delta(t) > 0$ *pour* $t \geqslant 0$,

(A_2) $\psi'(t) > 0$ *pour* $t \geqslant 0$ (*elle peut être infinie*),

(A_3) $\Delta(0) = 0$, $\psi(t) \to \infty$ *pour* $t \to \infty$,

(A_4) $\gamma(t)$ *est la fonction inverse de* $\psi(t)$, *c'est-à-dire* $\gamma\big(\psi(t)\big) \equiv t$, $\gamma\big(t-\Delta(t)\big) \equiv t$ *et* $\psi\big(\gamma(t)\big) \equiv t$ *c'est-à-dire* $\gamma(t)-\Delta\big(\gamma(t)\big) \equiv t$.

HYPOTHÈSES B. *La fonction* $f(t, x, y)$ *satisfait aux conditions suivantes*:

(B_1) $f(t, x, y)$ *est continue pour* $t \geqslant 0$, $y \neq 0$, $-\infty < x < +\infty$,

(B_2) $f(t, x, y) < 0$ *pour* $t \geqslant 0$, $y > 0$, $-\infty < x < +\infty$,

(B_3) $f(t, \bar{x}, \bar{y}) < f(t, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}})$ *pour* $\bar{x} \leqslant \bar{\bar{x}}$, $\bar{\bar{y}} > \bar{y} > 0$, $t > 0$,

(B_4) $f(t, x, y)$ *satisfait à la condition de Lipschitz par rapport à* (x, y).

(B_5) $f(t, -x, -y) = -f(t, x, y)$ *pour* $y \neq 0$, $t \geqslant 0$.

HYPOTHÈSE C.

$$\int_0^\infty f(\tau, x_0, y_0)\,d\tau = -\infty \qquad \textit{pour chaque} \qquad y_0 \geqslant x_0 > 0\,.$$

HYPOTHÈSE D. (D_1) *Pour chaque $T > 0$ il existe deux fonctions $F_T(y)$ et $G_T(y)$ continues pour $y > 0$ et telles que*

(D_2) $G_T(y) < f(t, x, y) < F_T(y)$ *pour* $y > 0,\ 0 \leqslant t \leqslant \gamma(\gamma(T))$,

(D_3) $\int\limits_0^\delta F_T(y)\,dy = -\infty$,

(D_4) $F_T(y) \to -\infty$ *pour* $y \to 0,\ y > 0$,

(D_5) *pour chaque $z_0 > 0$ tel que $\Delta'(\gamma(z_0)) = -\infty$, il existe une fonction $\sigma_{z_0}(y) > 0$ continue pour $y > 0$ telle que*

$$(D_6) \qquad \lim_{\xi \to z_0} \frac{\psi'(\xi)|z_0 - \xi|}{\sigma_{z_0}(|z_0 - \xi|)} = \Gamma_{z_0} < +\infty, \qquad \Gamma_{z_0} > 0\,,$$

(D_7) $\dfrac{y}{\sigma_{z_0}(y)}$ *est croissante pour* $y > 0$,

(D_8) $\int\limits_0^\delta G_{z_0}(\varrho\sigma_{z_0}(y))\,dy$ *est convergente (finie).*

THÉORÈME T. *Sous les hypothèses* A, B, C, D *chaque solution de l'équation* (1) *passant par le point* $(0, x_0)$, $x_0 > 0$ *appartient à l'une des trois classes suivantes*:

I. *$x(t)$ est définie dans un intervalle $\langle 0, a)$, $x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, a)$, $x(t) \to 0$ pour $t \to a$, $x'(t) \to -\infty$ pour $t \to a$, $x(t)$ ne peut pas être prolongée à droite de a. Dans ce cas $\Delta(a) = 0$*;

II. *$x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, a)$, $x(a) = 0$, $x(t) < 0$ pour $t \in (a, \gamma(a))$, $x(t) \to -\infty$ pour $t \to \gamma(a)$. C'est le cas où $\Delta(a) > 0$ et $\Delta'(\gamma(a)) > -\infty$*;

III. *$x(t) > 0$ pour $t \in \langle 0, a)$, $x(a) = 0$, $x(t) < 0$ pour $a < t < \gamma(a)$, $\lim\limits_{t \to \gamma(a)} x(t) > -\infty$, $x(t)$ peut être prolongée à droite de $\gamma(a)$ (c'est le cas où $\Delta'(\gamma(a)) = -\infty$.*

Nous partageons la démonstration du théorème T en quelques lemmes.

§ **2.** LEMME 1. *Sous les hypothèses* A *et* B *pour chaque (t_0, x_0) il existe un $\xi_0 > 0$ tel que la solution $x(t)$ de l'équation* (1) *issue du point $(0, \xi_0)$ est définie dans tout l'intervalle $\langle 0, t_0\rangle$ et satisfait aux conditions*

$$(2.1) \qquad x(0) = \xi_0\,, \quad x(t_0) = x_0\,.$$

Démonstration. Envisageons l'ensemble ω borné par les fonctions $\sigma(t)$ et $\eta(t)$ définies de la manière suivante:

$$(2.2) \qquad \sigma(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, x_0, x_0)\,d\tau \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

et

$$(2.3) \qquad \eta(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau, \sigma(0), \sigma(0))\,d\tau \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqslant t \leqslant t_0\,.$$

On vérifie facilement que

$$\sigma(t_0) = \eta(t_0) = x_0\,, \tag{2.4}$$

$f(t, x, y)$ étant négative pour $x > 0$, $y > 0$ on a

$$\sigma(t) > x_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0\,, \tag{2.5}$$

$$\eta(t) > x_0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0\,, \tag{2.6}$$

par conséquent, $f(t, x, y)$ étant croissante et négative,

$$\sigma'(t) = f(t, x_0, x_0) < f\big(t, \sigma(t), \sigma(t)\big) < 0 \tag{2.7}$$

d'où

$$\sigma'(t) < f\big(t, \sigma(0), \sigma(0)\big) = \eta'(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

et par suite

$$\sigma(t) > \eta(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < t_0\,. \tag{2.8}$$

Nous avons ainsi démontré que la définition suivante de l'ensemble ω est justifiée:

$$(\omega)\colon \quad 0 \leqslant t < t_0, \ \eta(t) < x < \sigma(t)\,.$$

Dans la suite nous allons démontrer qu'il existe une solution (au moins) $x(t)$ de l'équation (1) définie dans tout l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant t_0$ et contenue dans ω pour tout t de l'intervalle $\langle 0, t_0)$. De la définition de l'ensemble ω il vient que chacune de ces solutions satisfait à la condition $x(t_0) = \sigma(t_0) = \eta(t_0) = x_0$.

Dans la démonstration de l'existence d'une telle solution nous allons utiliser la méthode topologique de T. Ważewski [3]. En supposant que chaque solution $x(t, 0, \xi_0)$ de l'équation (1) telle que $x(0, 0, \xi_0) = \xi_0 \in \langle \eta(0), \sigma(0)\rangle$ sort de l'ensemble ω à un instant $\tau_0 \in \langle 0, t_0)$ et $x(t, 0, \xi_0) \in \big(\eta(t), \sigma(t)\big)$ pour $0 < t < \tau_0$, nous allons évaluer la dérivée de $x(t, 0, \xi_0)$ dans l'intervalle $\langle 0, \tau_0)$.

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= f\big(t, \eta(t_0), \eta(t_0)\big) \leqslant f\Big(t, \eta(t), \eta\big(t-\Delta(t)\big)\Big) \leqslant x'(t, 0, \xi_0)\\ &= f\Big(t, x(t, 0, \xi_0), x\big(t-\Delta(t), 0, \xi_0\big)\Big) \leqslant f\Big(t, \sigma(t), \sigma\big(t-\Delta(t)\big)\Big)\\ &< f\big(t, \sigma(0), \sigma(0)\big) = \eta'(t)\end{aligned}$$

d'où il vient que sur la frontière de l'ensemble ω il n'y a que des points de sortie stricte de l'ensemble ω. On vérifie facilement que dans le cas de l'équation (1) (à paramètre retardé) le conséquent du point $(0, \xi_0)$ sur l'ensemble (S) $\{x = \eta(t)$ ou $x = \sigma(t)$ $(0 \leqslant t < t_0)\}$ est continu par rapport aux ξ_0 tels que $(0, \xi_0) \in Z$ $\{t = 0, \eta(0) \leqslant \xi_0 \leqslant \sigma(0)\}$ et par conséquent on peut appliquer le raisonnement de T. Ważewski [3] basé sur la notion de rétracte et sur la propriété topologique suivante d'un segment Z: l'ensemble composé de deux points $(0, \eta(0))$, $(0, \sigma(0))$ n'est pas un rétracte du segment Z.

L'existence d'un $\xi_0^* \in (\eta(0), \gamma(0))$ tel que

$$x(t) = x(t, 0, \xi_0^*) \in \omega \quad \text{pour chaque} \quad 0 \leqslant t < t_0$$

est ainsi démontrée. On a $x(t_0) = x_0$. L'unicité d'un tel ξ_0^* résulte de ce que la fonction $f(t, x, y)$ est croissante par rapport à (x, y)

$$(2.8) \qquad \begin{aligned} x_1'(t) - x_2'(t) &= x'(t, 0, \xi_1) - x'(t, 0, \xi_2) \\ &= f\big(t, x_1(t), x_1(t - \Delta(t))\big) - f\big(t, x_2(t), x_2(t - \Delta(t))\big), \\ x_1'(0) - x_2'(0) &= f(0, \xi_1, \xi_1) - f(0, \xi_2, \xi_2) > 0 \quad \text{pour} \quad \xi_1 > \xi_2, \end{aligned}$$

d'où

$$x_1(t) - x_2(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \delta$$

et

$$x_1'(t) - x_2'(t) \geqslant 0 \quad \text{pour chaque} \quad 0 \leqslant t < \delta;$$

par conséquent $x_1(t) - x_2(t) > 0$ dans tout intervalle $\langle 0, a)$ dans le quel $x_2\big(t - \Delta(t)\big) > 0$.

§ 3. Lemme 2. *Dans les hypothèses* A, B, C, *à chaque point* $\xi > 0$ *correspond une fonction* $T(\xi) > 0$ *unique telle que*

$$x(t, 0, \xi) > 0 \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < T(\xi), \quad x\big(T(\xi), 0, \xi\big) = 0.$$

La fonction $T(\xi)$ *a les propriétés suivantes:*

1° $T(\xi)$ *est strictement croissante,*

2° $T\big((0, +\infty)\big) = (0, +\infty)$, *c'est-à-dire à chaque* $t_0 > 0$ *correspond un* $\xi_0 > 0$ *tel que* $t_0 = T(\xi_0)$,

3° $T(\xi)$ *est continue pour* $\xi \in (0, \infty)$.

Démonstration. L'existence de $T(\xi) > 0$ pour chaque $\xi > 0$ résulte immédiatement de l'hypothèse C. Il suffit d'evaluer $x'(t, 0, \xi)$

$$x'(t, 0, \xi) = f\big(t, x(t, 0, \xi), x\big(t - \Delta(t)\big), 0, \xi\big) \leqslant f(t, \xi, \xi) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t$$

d'où l'on obtient

$$x(t, 0, \xi) \leqslant \xi + \int_0^t f(\tau, \xi, \xi) d\tau.$$

En supposant que $x(t, 0, \xi) > 0$ pour $0 \leqslant t < +\infty$ on arrive à contradiction $0 \leqslant -\infty$.

L'intégrale $x(t, 0, \xi)$ de l'équation (1) peut être prolongée à droite de chaque point $\tau_0 > 0$ tel que $x(\tau_0) > 0$, $x(t) > 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant \tau_0$ et par conséquent il existe une fonction $T(\xi) > 0$ telle que $x\big(T(\xi), 0, \xi\big) = 0$ et $x(t, 0, \xi) > 0$ pour $0 \leqslant t < T(\xi)$.

Le fait que $T(\xi)$ est croissante résulte presque immédiatement de ce que $f(t, x, y)$ est croissante par rapport à (x, y). De l'inégalité $\bar{\xi} > \bar{\bar{\xi}} > 0$ il vient

$$x'(t, 0, \bar{\xi}) > x'(t, 0, \bar{\bar{\xi}})$$

pour tous les $t > 0$ tels que

$$x(t - \Delta(t), 0, \bar{\bar{\xi}}) > 0,$$

d'où on obtient

$$x(t, 0, \bar{\xi}) > x(t, 0, \bar{\bar{\xi}}) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T(\bar{\bar{\xi}}),$$

$$x(T(\bar{\bar{\xi}}), 0, \bar{\bar{\xi}}) = 0$$

et par suite

$$x(t, 0, \bar{\xi}) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant T(\bar{\bar{\xi}})$$

d'où

$$T(\bar{\xi}) > T(\bar{\bar{\xi}}) \quad \text{pour} \quad 0 < \bar{\bar{\xi}} < \bar{\xi}.$$

La propriété 1° est ainsi démontrée.

Pour démontrer la propriété 2° envisageons un $t_0 > 0$ quelconque et choisissons une suite $\{x_v\}$ telle que

$$x_v \to 0, \quad x_v > 0, \quad x_v > x_{v+1} \quad \text{pour} \quad v = 1, 2, \ldots$$

En vertu du Lemme 1 il existe des nombres $\xi_v > 0$ tels que

$$x(t_0, 0, \xi_v) = x_v \quad \text{pour} \quad v = 1, 2, 3, \ldots$$

Nous avons vu que pour $\bar{\xi} > \bar{\bar{\xi}} > 0$ on a $x(t, 0, \bar{\xi}) > x(t; 0, \bar{\bar{\xi}})$ pour toutes les t tels que $x(t; 0, \bar{\bar{\xi}}) > 0$ et par conséquent comme $x(t_0; t_0, x_v) > x(t_0; t_0, x_{v+1})$, on a

$$\xi_v > \xi_{v+1} > 0 \quad \text{pour} \quad v = 1, 2, \ldots$$

d'où il vient

$$T(\xi_v) > T(\xi_{v+1}) > t_0 \quad \text{pour} \quad v = 1, 2, \ldots$$

et par suite

$$T(\xi_v) \to \bar{t} \geqslant t_0$$

et

$$x(t; 0, \xi_v) > x(t; 0, \xi_{v+1}) > 0$$

d'où

$$x_v(t) = x(t; 0, \xi_v) \to \varphi(t) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t < \bar{t}.$$

Les fonctions $x_v(t)$ sont décroissantes et par suite $\varphi(t)$ est aussi décroissante (au sens large).

Nous avons

$$x_v(t_0) \to \varphi(t_0)$$

et

$$x_v(t_0) = x_v \to 0$$

d'où

$$\varphi(t_0) = 0.$$

Nous allons démontrer que $\varphi(t) > 0$ pour $0 \leqslant t < t_0$. Évaluons $x_v'(t)$ pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$

$$x_v'(t) = f\big(t, x_v(t), x_v(t-\Delta(t))\big) \leqslant f\big(t, x_1(t), x_1(t-\Delta(t))\big) \leqslant f\big(t, x_1(0), x_1(0)\big) ;$$

pour $0 \leqslant t \leqslant t_0$ il résulte de la continuité de $f\big(t, x_1(0), x_1(0)\big)$ qu'il existe une constante $m \leqslant 0$ telle que

$$f\big(t, x_1(0), x_1(0)\big) \leqslant m \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

d'où on obtient

$$x_v(t) \geqslant x_v(t_0) + m(t-t_0) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

$$x_v(t) \geqslant x_v + |m|(t_0 - t) \geqslant |m|(t_0-t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0,$$

donc

$$\varphi(t) \geqslant |m|(t_0-t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

et par suite

$$\varphi(t) > 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0. \tag{3.1}$$

Par conséquent $f\big(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta(t))\big)$ est bien déterminée et on a

$$f\big(t, x_v(t), x_v(t-\Delta(t))\big) \to f\big(t, \varphi(t), \varphi(t-\Delta(t))\big)$$

uniformément dans chaque intervalle fermé contenu dans $\langle 0, t_0)$ et par suite $\varphi(t)$ constitue une solution de l'équation (1) satisfaisant à la condition (3.1) et $\varphi(t_0) = 0$.

Pour terminer la démonstartion il reste à poser $\varphi(0) = \xi_0$. La continuité de la fonction $T(\xi)$ résulte presque immédiatement de 1° et 2°.

§ 4. **Démonstration du théorème** T. Envisageons un esolution quelconque $x(t)$ de l'équation (1) telle que $x(0) > 0$. Posons (par définition) $\xi_0 = x(0) > 0$ et $t_0 = T(\xi_0)$. Trois cas sont possibles:

I. $\Delta(t_0) = 0$,

II. $\Delta(t_0) > 0$ et $|\Delta'(\gamma(t_0))| < +\infty$,

III. $\Delta(t_0) > 0$ et $\Delta'(\gamma(t_0)) = -\infty$.

Dans le cas I, en vertu de l'hypothèse D_4 on a $x'(t) \to -\infty$ pour $t \to t_0$ et en vertu de B_2 et B_5 la solution $x(t)$ ne peut pas être prolongée à droite de t_0.

Dans le cas $\Delta(t_0) > 0$ on vérifie facilement que $x(t)$ est définie dans tout l'intervalle $\langle 0, \gamma(t_0))$. C'est une conséquence de l'inégalité D_2 et B_3.

$$q_a = G_T\big(x(a-\Delta(a))\big) < f\big(t, x(t), x(a-\Delta(a))\big)$$
$$\leqslant f\big(t, x(t), x(t-\Delta(t))\big) = x'(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant a$$

et par suite
$$-\xi_0+x(t)\geqslant q_a t>-\infty \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t\leqslant a<t_0$$
d'où il vient que $x(t)$ reste finie dans tout intervalle ouvert à droite $\langle 0,t_0)$.

Envisageons le cas II. Comme $\psi(t)$ est croissante, on a

$$t_0-\Delta(t_0)=\psi(t_0)<\psi(t)=t-\Delta(t)<\psi\big(\gamma(t_0)\big)=t_0 \quad \text{pour} \quad t_0<t<\gamma(t_0)\,. \tag{4.1}$$

La fonction $f(t,x,y)$ étant continue et croisante il vient
$$x'(\tau)>-a \quad \text{pour} \quad 0\leqslant\tau<t_0\,,$$
d'où
$$x(\tau)<-a(\tau-t_0) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant\tau<t_0$$
et en vertu de (4.1) on obtient
$$x\big(t-\Delta(t)\big)<-a\big(t-\Delta(t)-t_0\big) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t<\gamma(t_0)\,,$$
$$x\big(t-\Delta(t)\big)<-a\big(\psi(t)-\psi(a)\big) \quad \text{pour} \quad 0\leqslant t<\gamma(t_0)\,.$$
De l'hypothèse II on a $\psi'(a)=c>0$, c fini. Pour chaque $\varepsilon>0$ il existe un $\delta_\varepsilon>0$ tel que
$$c+\varepsilon>\frac{\psi(a)-\psi(\tau)}{a-\tau}>c-\varepsilon \quad \text{pour} \quad 0<a-\tau<\delta_\varepsilon$$
posons $\varepsilon=c/2$. On a
$$\tfrac{3}{2}c(a-\tau)>\psi(a)-\psi(\tau)>\tfrac{1}{2}c(a-\tau) \quad \text{pour} \quad 0<a-\tau<\delta_{c/2}$$
d'où
$$x'(t)<f\Big(t,x(t),a\big(\psi(a)-\psi(t)\big)\Big)<f\big(t,x(t),ac\tfrac{3}{2}(a-t)\big)<F_a\big(ac\tfrac{3}{2}(a-t)\big) \quad \text{pour} \quad 0<a-t<\delta_{c/2}\,,$$
$$x(t)<x(a-\delta_{c/2})+\int\limits_{a-\delta_{c/2}}^{t}F_a\big(ac\tfrac{3}{2}(a-\tau)\big)d\tau=x(a-\delta_{c/2})-\int\limits_{\delta_{c/2}}^{a-t}F_a(\bar{a}u)\,du \quad \text{pour} \quad a-\delta_{c/2}\leqslant t<a \ (\text{où } \bar{a}=\tfrac{3}{2}ac)$$
et par suite, en vertu de l'hypothèse D_3, on a
$$\lim_{t\to a}x(t)\leqslant k-\lim_{t\to a}\int\limits_{\delta_{c/2}}^{a-t}F_a(\bar{a}u)\,du=k+\lim_{t\to a}\int\limits_{a-t}^{\delta_{c/2}}F_a(\bar{a}u)\,du=-\infty \quad (\text{où } k=x(a-\delta_{c/2}))\,.$$

Passons au cas $\Delta(t_0)>0$, $\Delta'\big(\gamma(t_0)\big)=-\infty$. Comme dans le cas II, on peut évaluer
$$x'(\tau)<x'(0) \quad \text{pour} \quad 0<\tau\leqslant t_0$$

et par suite

$$x(\tau) > x'(0)(\tau - t_0) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant \tau < t_0$$

$$x\big(t-\Delta(t)\big) > x'(0)\big(t-\Delta(t)-t_0\big) = x'(0)\big(\psi(t)-\psi(\gamma(t_0))\big) = x'(0)\big(\psi'(\xi_t)(t-\gamma(t_0))\big)$$
$$\text{pour} \quad t_0 \leqslant t < \gamma(t_0) \ \ (\text{où } \xi_t \in (t, \gamma(t_0)))$$

posons $z_0 = \gamma(t_0)$. On a

$$(4.2) \qquad x\big(t-\Delta(t)\big) > x'(0)\psi'(\xi_t)(t-z_0) \quad \text{pour} \quad t_0 \leqslant t < \gamma(t_0).$$

En vertu de l'hypothèse D_7 on a

$$\frac{z_0 - t}{\sigma_{z_0}(z_0 - t)} > \frac{z_0 - \xi_t}{\sigma_{z_0}(z_0 - \xi_t)} \quad \text{pour} \quad z_0 - \Delta(z_0) \leqslant t < \xi_t < z_0$$

d'où l'on obtient, en vertu de (4.2),

$$x\big(t-\Delta(t)\big) > -x'(0)\frac{\psi'(\xi_t)(z_0-\xi_t)}{\sigma_{z_0}(z_0-\xi_t)}\sigma_{z_0}(z_0-t) \quad \text{pour} \quad z_0-\Delta(z_0) \leqslant t < z_0.$$

De la convergence D_6 on tire

$$\Gamma_{z_0} + \varepsilon > \frac{\psi'(\xi_t)(z_0-\xi_t)}{\sigma_{z_0}(z_0-\xi_t)} > \Gamma_{z_0} - \varepsilon > 0 \quad \text{pour} \quad z_0 - \delta_\varepsilon \leqslant t < z_0$$

d'où

$$x\big(t-\Delta(t)\big) > -x'(0)(\Gamma_{z_0}-\varepsilon)\sigma_{z_0}(z_0-t) \quad \text{pour} \quad z_0-\delta_\varepsilon \leqslant t < z_0.$$

Posons

$$\varrho = -x'(0)(\Gamma_{z_0} - \varepsilon) > 0.$$

Par suite

$$x\big(t-\Delta(t)\big) > \varrho\sigma_{z_0}(z_0-t),$$

d'où

$$x'(t) = f\Big(t, x(t), x\big(t-\Delta(t)\big)\Big) > f\big(t, x(t), \varrho\sigma_{z_0}(z_0-t)\big) \quad \text{pour} \quad z_0-\delta_\varepsilon \leqslant t < z_0$$

et en vertu de D_2 on a

$$x'(t) > G_{z_0}\big(a\sigma_{z_0}(z_0-t)\big) \quad \text{pour} \quad z_0-\delta_\varepsilon \leqslant t < z_0$$

et par suite

$$0 > x(t) > x(z_0-\delta_\varepsilon) + \int_{z_0-\delta_\varepsilon}^{t} G_{z_0}\big(a\sigma_{z_0}(z_0-\tau)\big)\,d\tau = x(z_0-\delta_\varepsilon) - \int_{\delta_\varepsilon}^{z_0-t} G_{z_0}\big(a\sigma_{z_0}(u)\big)\,du$$
$$> x(z_0-\delta_\varepsilon) - \int_{\delta_\varepsilon}^{t} G_{z_0}\big(a\sigma_{z_0}(u)\big)\,du > -\infty.$$

$x(t)$ étant décroissante, nous avons ainsi démontré que $x(t)$ possède une limite finie pour $t \to \gamma(t_0) = z_0$.

De l'hypothèse D_2 et D_4 il résulte que $x'(t)$ tend vers l'infini pour $t \to z_0$.

Pour terminer la démonstration du théorème T il reste à prouver qu'il existe une solution $y(t)$ de l'équation (1) définie à droite de z_0 et telle que

$$y'(t) = f\big(t, y(t), x(t-\Delta(t))\big) = -f\big(t, -y, -x(t-\Delta(t))\big) \quad \text{pour } z_0 < t < \gamma(z_0),$$

$$y(z_0) = \lim_{t\to z_0-0} x(t).$$

Envisageons l'équation différentielle

$$y' = f\big(t, y, x(t-\Delta(t))\big). \tag{4.3}$$

On a

$$x(\tau) < x'(t_0)(\tau - t_0) \qquad \text{pour} \qquad t_0 < \tau < z_0,$$

$$-x\big(t-\Delta(t)\big) > -x'(t_0)\big(\psi(t)-\psi(z_0)\big) = a_0\big(\psi(t)-\psi(z_0)\big),$$

$$x'(t_0) = f\big(t_0, x(t_0), x(t_0-\Delta(t_0))\big) = -a_0 < 0,$$

$$\psi(t)-\psi(z_0) = \psi'(\bar{\xi}_t)(t-z_0) = \psi'(\bar{\xi}_t)\,\frac{t-z_0}{\sigma(t-z_0)}\,\sigma(t-z_0)$$

$$> \psi'(\bar{\xi}_t)\,\frac{\bar{\xi}_t - z_0}{\sigma(\bar{\xi}_t - z_0)}\,\sigma(t-z_0),$$

$$\frac{t-z_0}{\sigma(t-z_0)} = -\frac{(z_0-t)}{\sigma(|z_0-t|)}, \qquad \frac{t-z_0}{\sigma(t-z_0)} > \frac{\bar{\xi}_t - z_0}{\sigma(\bar{\xi}_t - z_0)},$$

$$-x\big(t-\Delta(t)\big) > a_0\psi'(\bar{\xi}_t)\,\frac{\bar{\xi}_t - z_0}{\sigma(\bar{\xi}_t - z_0)}\,\sigma(t-z_0) \qquad \text{pour} \qquad z_0 < t < \gamma(z_0),$$

$$\Gamma_{z_0} - \varepsilon < \psi'(\bar{\xi}_t)\,\frac{\bar{\xi}_t - z_0}{\sigma(\bar{\xi}_t - z_0)} < \Gamma_{z_0} + \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad z_0 < t < z_0 + \delta_\varepsilon$$

posons

$$\bar{a} = (\Gamma_{z_0} - \varepsilon)a_0 \text{ dans le cas où } \gamma(t-z_0) > 0 \text{ pour } z_0 < t < z_0 + \delta_\varepsilon,$$

et

$$\bar{a} = (\Gamma_{z_0} + \varepsilon)a_0 \text{ dans le cas où } \gamma(t-z_0) < 0 \text{ pour } z_0 < t < z_0 + \delta_\varepsilon$$

on a

$$-x\big(t-\Delta(t)\big) > \bar{a}\sigma(t-z_0) \qquad \text{pour} \qquad z_0 < t < z_0 + \delta_\varepsilon,$$

$$f\big(t, -y(t), -x(t-\Delta(t))\big) > f\big(t, -y(t), \bar{a}\sigma(t-z_0)\big) > G\big(\bar{a}\sigma(t-z_0)\big)$$

d'où pour chaque solution $y(t)$ de l'équation (4.3) on a

$$y'(t) < -G\big(\bar{a}\sigma(t-z_0)\big) \qquad \text{pour} \qquad z_0 < t < z_0 + \delta_\varepsilon,$$

$$y(t) > y(z_0+\delta_\varepsilon) - \int_{z_0+\delta_\varepsilon}^{t} G\big(\bar{a}\sigma(\tau - z_0)\big)\,d\tau = y(z_0+\delta_\varepsilon) - \int_{\delta_\varepsilon}^{t-z_0} G\big(\bar{a}\sigma(u)\big)\,du \tag{4.4}$$

$$= y(z_0+\delta_\varepsilon) + \int_{t-z_0}^{\delta_\varepsilon} G\big(\bar{a}\sigma(u)\big)\,du > y(z_0+\delta_\varepsilon) + \int_{0}^{\delta_\varepsilon} G\big(\bar{a}\sigma(u)\big)\,du$$

$y'(t)$ étant positive pour $z_0 < t < \gamma(z_0)$ on a

$$(4.5)\quad y(z_0+\delta_\varepsilon)+\int_0^{\delta_\varepsilon} G\big(\bar{a}\sigma(u)\big)du < y(t) < y(z_0+\delta_\varepsilon) \quad \text{pour} \quad z_0 < t < z_0+\delta_\varepsilon .$$

Envisageons deux solutions de (4.3) telles que $\bar{y}(\tau_0) > \bar{\bar{y}}(\tau_0)$

$$\bar{y}'(t)-\bar{\bar{y}}'(t) = f\Big(t, \bar{y}(t), x\big(t-\Delta(t)\big)\Big)-f\Big(t, \bar{\bar{y}}(t), x\big(t-\Delta(t)\big)\Big).$$

En vertu de l'hypothèse B_3 on a

$$(4.6)\quad \bar{y}'(t)-\bar{\bar{y}}'(t) \geqslant 0 \quad \text{pour chaque } t \text{ pour lequel } \bar{y}(t)-\bar{\bar{y}}(t) \geqslant 0 .$$

De l'hypothèse B_4 et $\bar{y}(\tau_0) > \bar{\bar{y}}(\tau_0)$ en vertu de l'inégalité (4.5) il vient que $\bar{y}(t) > \bar{\bar{y}}(t)$ pour $z_0 < t < \gamma(z_0)$. Posons $X_0 = \lim\limits_{t\to z_0-0} x(t)$ et

$$(4.7)\quad \bar{y}(\tau_0) = X_0 - \int_0^{\delta_\varepsilon} G\big(\bar{a}\sigma(u)\big)du, \qquad \bar{\bar{y}}(\tau_0) = X_0 .$$

De l'inégalité (4.5) il résulte que chaque solution $y(t, \tau_0, y_0)$ de l'équation (4.3) possède une limite finie pour $t\to z_0+0$. Posons

$$\lim_{t\to z_0} y(t, \tau_0, y_0) = Y(y_0).$$

En vertu de (4.6) $Y(y_0)$ est continue et par suite l'image du segment $\langle\bar{\bar{y}}, \bar{y}\rangle$ par l'intermédiaire de la transformation $Y = Y(y_0)$ est le segment $\langle Y(\bar{\bar{y}}), Y(\bar{y})\rangle$. De (4.3) il vient que le point X_0 appartient à $\langle Y(\bar{\bar{y}}), Y(\bar{y})\rangle$, d'où résulte immédiatement l'existence d'un $y_0 \in (\bar{\bar{y}}, \bar{y})$ tel que

$$\lim_{t\to z_0+0} y(t, \tau_0, y_0) = X_0 = \lim_{t\to z_0-0} x(t).$$

La fonction

$$\varphi(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour} \quad 0 \leqslant t < z_0 , \\ y(t, \tau_0, y_0) & \text{pour} \quad z_0 < t < \gamma(z_0) \end{cases}$$

constitue une solution continue de l'équation (1) dans tout l'ensemble $\langle 0, z_0) + \big(z_0, \gamma(z_0)\big)$.

Travaux cités

[1] Х. Г. Цванг (Ch. G. Cwang), *Об особых точках дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом*, Учен. зап. МГУ 186, Матем. 959, p. 211-218.

[2] А. Д. Мышкис (A. D. Myschkis), *Общая теория дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом*, УМН 4 (5) (1949), p. 99-141.

[3] T. Ważewski, *Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des intégrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Soc. Pol. Math. 20 (1947), p. 279.

Reçu par la Rédaction le 13. 4. 1963