ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLVIII (1988)

Relèvements horizontaux de tenseurs de type (1, 1) au fibré $E = TM \otimes T^* M$

par Jacek Gancarzewicz (Kraków) et Naureddine Rahmani (Oran)

0. Introduction. Soient ∇ une connexion linéaire sur M et $E = TM \otimes T^* M$ le fibré des tenseurs de type (1, 1). ∇ définit une distribution H sur E appelée *distribution horizontal*. Cette distribution définit le relèvement horizontal des champs de vecteurs (voir § 2).

Let but de ce travail est donner des constructions qui à un tenseur t de type (1, 1) sur M font associer un tenseur $\tilde{t}$ de type (1, 1) sur E vérifiant la condition $\tilde{t}(X^H) = (tX)^H$, où X^H désigne le relèvement horizontal de X. On propose dans ce travail deux constructions appelées *relèvements horizontaux de tenseurs*.

Dans § 1 on introduit une famille de fonctions sur E jouant une rôle importante dans ce travail car des champs de vecteurs sur E sont caractérisés par leurs actions sur les fonctions de la famille introduite. Ensuite on caractérise des champs de vecteurs verticaux sur E.

Dans § 2 on étudie le relèvement horizontal des champs de vecteurs et ses propriétés.

Dans § 3 on définit deux relèvements horizontaux de tenseurs de type (1, 1) au fibré $E = TM \otimes T^* M$ et on étudie ses propriétés. Ensuite on utilise ces constructions pour prolonger des structure géométriques définies sur M par des tenseurs de type (1, 1) et on discute l'integrabilité des structures prolongées.

Les propriétés des relèvements horizontaux au fibré $E = TM \otimes T^* M$ sont très analogues aux propriétés des relèvements au fibré tangent (Yano et Ishihara [4], [5]) et au fibré contangent (Yano et Patterson [6]).

Les résultats obtenus dans ce travail pour le fibré $E = TM \otimes T^* M$ peuvent être généralisés au fibré

$$E = \otimes^p TM \otimes \otimes^q T^* M$$

(le fibré des tenseurs de type (p, q)). Ces généralisations seront publiées dans un travail séparé [3].

0'. Notations. Soient M une variété et π: $E = TM \otimes T^* M \to M$ le fibré des teneseurs de type (1, 1) avec sa projection. Si (U, x^i) est une carte sur M, alors on définit la carte induite $(\pi^{-1}(U), x^i, y^i_j)$ sur E par les formules

$$x^i(y) = x^i(\pi(y)), \qquad y = y^i_j(y)\, dx^j \otimes \partial_i,$$

où $y \in \pi^{-1}(U)$, $\partial_1, \ldots, \partial_n$ désigne le repère canonique sur U défini par la carte (U, x^i) et $dx^1, \ldots, dx^n$ désigne le corepère dual. On note par

$$\partial_i = \partial/\partial x^i, \qquad \partial^j_i = \partial/\partial y^i_j$$

le repère canonique sur $\pi^{-1}(U)$ défini par la carte induite.

1. Des champs de vecteurs sur E. Soit s une section de $E = TM \otimes T^* M$. On définit la fonction $\bar{s}$ sur E par la formule

(1.1) $$\bar{s}(y) = \operatorname{trace} s_y \circ y,$$

où les éléments s_y et y de la fibre $E_{\pi(y)} = T_{\pi(y)} M \otimes T^*_{\pi(y)} M$ sont considérées comme des applications linéaires $T_{\pi(y)} M \to T_{\pi(y)} M$. Utilisant une carte induite on peut facilement vérifier

(1.2) $$\bar{s}(y) = s^i_j(\pi(y))\, y^j_i,$$

où s^i_j désignent les coordonnées de s par rapport à (U, x^i). D'où, la fonction $\bar{s}$ est de classe C^∞ sur E. Ces fonctions joueront une rôle importante parce qu'on a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.1. *Si $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ son deux champs de vecteurs de classe C^∞ sur E tels que pour toute section s de E on a $\tilde{X}(\bar{s}) = \tilde{Y}(\bar{s})$, alors $\tilde{X} = \tilde{Y}$.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'égalité $\tilde{X}(\bar{s}) = 0$ pour toute section s implique $\tilde{X} = 0$. Soient (U, x^i) une carte sur M et

$$\tilde{X} = \tilde{X}^i \partial_i + \tilde{X}^i_j \partial^j_i.$$

D'après (1.2) on a

$$\tilde{X}^k(\partial_k s^i_j)\, y^j_i + \tilde{X}^j_i s^i_j = 0$$

pour toutes fonctions s^i_j. D'où $\tilde{X}^k = \tilde{X}^i_j = 0$, c'est-à-dire $\tilde{X} = 0$.

Un champ de vecteurs $\tilde{X}$ sur E s'appelle *projetable* sur M s'il existe un champ de vecteurs X sur M tel que

$$d\pi \circ \tilde{X} = X \circ \pi,$$

où $d\pi$: $TE \to TM$ désigne l'application induite par π: $E \to M$. Le champ de vecteurs X est uniquement déterminé par $\tilde{X}$ et X s'appelle la *projection* de $\tilde{X}$. L'ensemble de tous les champs de vecteurs sur E projetables sur M est une algèbre de Lie. On a la proposition suivante.

PROPOSITION 1.2. *Soient X un champ de vecteurs sur M et $\tilde{X}$ un champ de* *vecteurs sur E. $\tilde{X}$ est projetable sur M et X est sa projection si et seulement si pour toute fonction f de classe C^∞ sur M on a*

$$\tilde{X}(f^V) = (Xf)^V,$$

où $f^V = f \circ \pi$ est le relèvement vertical de f.

Démonstration. Soient (U, x^i) une carte sur M et

$$X = X^i \partial_i, \qquad \tilde{X} = \tilde{X}^i \partial_i + \tilde{X}^i_j \partial^j_i.$$

D'après la définition, $\tilde{X}$ est projectable sur M si et seulement si les fonctions $\tilde{X}^i(y)$ ne dependent que de $\pi(y)$ et X est la projection de $\tilde{X}$ si et seulement si $X^i(\pi(y)) = \tilde{X}(\pi(y))$, d'où la proposition.

La proposition précédente implique

Proposition 1.3. *Soit $\tilde{X}$ un champ de vecteurs sur E. $\tilde{X}$ est un champ de vecteurs verticaux si et seulement si $\tilde{X}(f^V) = 0$ pour toute fonction f sur M.*

Démonstration. Un champ de vecteurs verticaux est projectable et sa projection est zéro.

Soit y un point de E. Comme la fibre $E_{\pi(y)}$ est un espace vectoriel, on a l'isomorphisme canonique

$$\psi_y\colon\ V_y E = T_y(E_{\pi(y)}) \to E_{\pi(y)}. \tag{1.3}$$

Si t est une section de E, alors on peut définir un champ de vecteurs t^V sur E par la formule

$$t^V(y) = \psi_y^{-1}(t_y). \tag{1.4}$$

t^V est un champ de vecteurs verticaux sur E. t^V s'appelle *relèvement vertical de s*. L'expression locale de ce champ est

$$t^V(y) = t^i_j \partial^j_i. \tag{1.5}$$

D'après (1.5) et (1.2) on a

Proposition 1.4. *Si s et t sont deux sections de E, alors on a*

$$t^V(\bar{s}) = (\operatorname{trace} ts)^V.$$

D'après la proposition 1.3 on a

Proposition 1.5. *Si t est une section de E et f est une fonction sur M, alors $t^V(f^V) = 0$.*

Utilisant les propositions 1.4, 1.5 et 1.1 on peut facilement démontrer

Proposition 1.6. *Si t, t' sont des sections de E et f est une fonction sur M, alors*

$$(t+t')^V = t^V + t'^V, \qquad (ft)^V = f^V t^V, \qquad [t^V, t'^V] = 0,$$

où $f^V = f \circ \pi$.

On construit encore un champ de vecteurs verticaux sur E utilisant la proposition suivante.

PROPOSITION 1.7. *Si t est une section de E, alors il existe un et un seul champ de vecteurs $t^{\square}$ sur E tel que pour toute section s de E on a*

$$t^{\square}(\bar{s}) = ts. \tag{1.6}$$

Démonstration. L'unicité de $t^{\square}$ est évidente d'après la proposition 1.1. Pour démontrer l'existence de $t^{\square}$ il suffit de définir un champ de vecteurs V sur $E \mid U = \pi^{-1}(U)$

$$V = t_j^k y_k^i \partial_i^j, \tag{1.7}$$

où (U, x^i) est une carte sur M. D'après (1.2) et (1.7) on a

$$V(\bar{s}) = \widetilde{ts}$$

pour toute section s de $E|U$. Si (U, x^i) et $(U', x^{i'})$ sont deux cartes sur M, alors les champs de vecteurs V et V' définis par (1.7) respectivement sur $E|U$ et $E|U'$ vérifient la condition

$$V(\bar{s}) = \widetilde{ts} = V'(\bar{s})$$

pour toute section s de $E|(U \cap U')$. D'après la proposition 1.1 les champs de vecteurs V et V' coïncident sur $E \mid (U \cap U')$. D'où il existe un champ (global) de vecteurs sur E vérifiant la condition (1.6).

De cette démonstration il vient que $t^{\square}$ est un champ de vecteurs verticaux sur E. Alors d'après la proposition 1.3 on a

PROPOSITION 1.8. *Si t est une section de E et f est une fonction sur M, alors $t^{\square}(f^V) = 0$, où $f^V = f \circ \pi$.*

2. Relèvement horizontal des champs de vecteurs au fibré E. Soit ∇ une connexion linéaire sur M. Alors pour tout point y de $E = TM \otimes T^* M$, ∇ définit un sous-espace H_y de $T_y E$ appelé *espace horizontal*. Si π: $E \to M$ désigne la projection, alors $d_y \pi \mid H_y$: $H_y \to T_{\pi(y)} M$ est un isomorphisme. D'où, si X est un champ de vecteurs sur M, on peut définir le champ de vecteurs X^H sur E par la formule

$$X^H(y) = (d_y \pi \mid H_y)^{-1}(X_{\pi(y)}), \qquad y \in E. \tag{2.1}$$

X^H est appelé *relèvement horizontal de X à E*. De la définition on obtient immediatement

PROPOSITION 2.1. *Si X, Y sont des champs de vecteurs sur M et f est une fonction sur M, alors on a*

$$(X + Y)^H = X^H + Y^H, \quad (fH)^V = f^V X^H.$$

Utilisant la définition de la distribution horizontal on peut trouver l'expression locale de X^H. On a (voir [3])

$$X^H = X^i \partial_i + X^i (\Gamma^k_{ip} y^q_k - \Gamma^q_{ik} y^k_p) \partial^p_q, \tag{2.2}$$

où $X = X^i \partial_i$ et Γ^k_{ip} sont les symboles de Christoffel de ∇.

PROPOSITION 2.2. *Si X est un champ de vecteurs sur M, s est une section de E et f est une fonction sur M, alors on a*

$$X^H(\tilde{s}) = \widetilde{\nabla_X s}, \quad X^H(f^V) = (Xf)^V.$$

Démonstration. Pour vérifier la première formule on utilise (2.2) et (1.2). La deuxième formule est une consequence de la proposition 1.3 et du fait que X^n est projetable sur M et X est sa projection.

Utilisant les propositions 2.2, 1.4, 1.7 et 1.1 on obtient

PROPOSITION 2.3. *Si X, Y sont des champs de vecteurs sur M et t est une section de E, alors on a*

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + (R(X, Y))^\square,$$
$$[X^H, t^V] = (\nabla_X t)^V,$$
$$[X^H, t^\square] = (\nabla_X t)^\square,$$

où $R(X, Y)$ désigne la transformation de courbure ($R(X, Y)$ est une section de E pour des champs fixés X et Y).

Démonstration. On ne vérifie que la première formule car la vérification des autres est entièrement analogue. Soit s une section de E. On a

$$\begin{aligned}[X^H, Y^H](\tilde{s}) &= X^H(Y^H \tilde{s}) - Y^H(X^H \tilde{s}) \\ &= \widetilde{\nabla_X(\nabla_Y s)} - \widetilde{\nabla_Y(\nabla_X s)} \\ &= [X, Y]^H(\tilde{s}) + (R(X, Y))^\square(\tilde{s}),\end{aligned}$$

d'où, d'après la proposition 1.1,

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + (R(X, Y))^\square.$$

3. Relèvements horizontaux de tenseurs de type (1, 1). Soit t un tenseur de type (1, 1) sur M (c'est-à-dire, t est une section de E). On définit deux tenseurs t^{HI} et t^{HII} de type (1, 1) sur E par les formules

$$t^{HI}(X^H) = t^{HII}(X^H) = (tX)^H, \tag{3.1}$$

$$t^{HI}(s^V) = (ts)^V, \quad t^{HII}(s^V) = (st)^V, \tag{3.2}$$

où X est un champ de vecteurs sur M et s est une section de E. Les formules (3.1) et (3.2) déterminent les tenseurs t^{HI} et t^{HII} de la manière unique. t^{HI} et

t^{HII} sont appelés *relèvements horizontaux de t à E* respectivement *de type* 1 et *de type* 2. Utilisant les formules (3.1), (3.2), (2.2) et (1.5) on peut trouver les expressions locales pour des tenseurs t^{HI} et t^{HII}. On a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.1. *Si t est un tenseur de type* (1, 1) *sur M et $t(\partial_i) = t_i^j \partial_j$, alors on a*

$$t^{HI}(\partial_i) = t_i^j \partial_j + \{t_i^p(\Gamma^r_{pk} y^k_s - \Gamma^k_{ps} y^r_k) - t^r_p(\Gamma^p_{ik} y^k_s - \Gamma^k_{is} y^p_k)\} \partial^s_r,$$

$$t^{HI}(\partial^j_i) = t^s_i \partial^j_s,$$

$$t^{HII}(\partial_i) = t_i^j \partial_j + \{t_i^p(\Gamma^r_{pk} y^k_s - \Gamma^k_{ps} y^p_k) - t^p_s(\Gamma^r_{ik} y^k_p - \Gamma^k_{ip} y^r_k)\} \partial^s_r.$$

$$t^{HII}(\partial^j_i) = t^j_s \partial^s_i.$$

On a des propriétés suivantes des relèvements horizontaux de tenseurs à E.

PROPOSITION 3.2. *Si t et s sont deux tenseurs de type* (1, 1) *sur M et f est une fonction sur M, alors*

$$(t+s)^{HI} = t^{HI} + s^{HI}, \tag{3.3}$$

$$(t+s)^{HII} = t^{HII} + s^{HII}, \tag{3.4}$$

$$(ft)^{HI} = f^V t^{HI}, \quad (ft)^{HII} = f^V t^{HII}, \tag{3.5}$$

$$(ts)^{HI} = t^{HI} s^{HI}, \tag{3.6}$$

$$(ts+st)^{HII} = t^{HII} s^{HII} + s^{HII} t^{HII}, \tag{3.7}$$

$$\delta^{HI} = \delta, \quad \delta^{HII} = \delta, \tag{3.8}$$

$$(t^n)^{HI} = (t^{HI})^n, \tag{3.9}$$

$$(t^n)^{HII} = (t^{HII})^n, \tag{3.10}$$

où δ désigne le tenseur d'identité.

Démonstration. Les égalités (3.3), (3.4), (3.6)–(3.8) sont des conséquences immédiates des définitions des tenseurs t^{HI} et t^{HII}. La formule (3.5) résulte des propositions 2.1 et 1.6. La formule (3.9) est une conséquence de (3.6). On vérifie la formule (3.10) par induction utilisant (3.7). En, on a

$$\begin{aligned}(t^{n+1})^{HII} &= \tfrac{1}{2}(t^n t + t t^n)^{HII} \\ &= \tfrac{1}{2}\{(t^n)^{HII} t^{HII} + t^{HII} (t^n)^{HII}\} \\ &= \tfrac{1}{2}\{(t^{HII})^n t^{HII} + t^{HII} (t^{HII})^n\} \\ &= (t^{HII})^{n+1}.\end{aligned}$$

Les propriétés démontrées pour les relèvements horizontaux des tenseurs au fibré $E = TM \otimes T^* M$ sont très analogues aux propriétés des relèvements horizontaux définis par Yano et Ishihara [5] dans le cas du fibré tangent et par Yano et Patterson [7] dans le cas du fibré cotangent. Le relèvement t^{HI} ressemble au relèvement au fibré tangent et le relèvement t^{HII} ressemble au relèvement au fibré contangent.

On peut utiliser les relèvements horizontaux à prolonger des structures géométriques de M au fibré E. On a la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3. *Si P est un polynôme à coefficients réels (constants), alors pour tout tenseur t de type* (1, 1) *sur M on a*

$$P(t^{HI}) = (Pt)^{HI}, \qquad P(t^{HII}) = (Pt)^{HII}.$$

En particulier, si t est une structure presque tangente (resp. presque complexe, f-structure, etc.) *sur M, alors t^{HI} et t^{HII} sont des structures presques tangentes* (resp. presques complexes, f-structures, etc.) *sur E.*

Pour étudier l'intégrabilité des structures relèvées on doit calculer des tenseurs de Nijenhuis de t^{HI} et t^{HII}. Pour faire ce calcul tout d'abord on introduit une opération γ utilisant la proposition suivante.

PROPOSITION 3.4. *Si t et t' sont deux sections de E, alors il existe un et un seul champ de vecteurs $\gamma(t, t')$ sur E tel que pour toute section s de E on a*

$$\gamma(t, t')(\tilde{s}) = \widetilde{tst'}.$$

Démonstration. Le preuve est analogue à la démonstration de la proposition 1.7. Il suffit de définir $\gamma(t, t')$ par la formule

$$\gamma(t, t') = t^s_j y^k_s t'^i_k \partial^j_i. \tag{3.11}$$

$\gamma(t, t')$ est un champ de vecteurs verticaux, en conséquence, $\gamma(t, t')(f^V) = 0$ pour toute fonction f sur M. D'après la proposition 3.4 on a

COROLLAIRE 3.5. $\gamma(t, \delta) = t^{\frown}$.

On a aussi les propositions suivantes.

PROPOSITION 3.6. *L'application*

$$(t, t') \mapsto \gamma(t, t')$$

est bilinéaire et si f est une fonction sur M, alors on a

$$\gamma(ft, t') = \gamma(t, ft') = f^V \gamma(t, t').$$

La démonstration est triviale.

Utilisant la proposition 3.1 et la formule (3.11) on obtient

PROPOSITION 3.7. *Si t et s sont des tenseurs de type* (1, 1) *sur M, alors on a*

$$t^{HII}(s^{\square}) = \gamma(t, s), \qquad t^{HII}(s^{\ }) = \gamma(s, t).$$

Utilisant les propositions précédentes on démontre les formules suivantes pour les tenseurs de Nijenhuis de t^{HI} et t^{HII}.

PROPOSITION 3.8. *Si t, s, s' sont des tenseurs de type* $(1, 1)$ *sur M et X, Y sont des champs de vecteurs sur M, alors*

$$N_{t^{HI}}(X^H, Y^H) = \big(N_t(X, Y)\big)^H + \gamma(\delta, R(tX, tY)) + \\ + \gamma(t^2, R(X, Y)) - \gamma(t, R(tX, Y) + R(X, tY)),$$

$$N_{t^{HI}}(X^H, s^V) = (\nabla_{tX} ts - t\nabla_X ts)^V, \quad N_{t^{HI}}(s^V, s'^V) = 0,$$

$$N_{t^{HII}}(X^H, Y^H) = \big(N_t(X, Y)\big)^H + \{R(tX, tY) + t^2 R(X, Y)\}^{\square} - \\ - \{t\big(R(tX, Y) + R(X, tY)\big)\}^{\square},$$

$$N_{t^{HII}}(X^H, s^V) = (s\nabla_{tX} t - s\nabla_X t - t)^V, \quad N_{t^{HII}}(s^V, s'^V) = 0.$$

Démonstration. Utilisant les formules (3.1) et (3.2), d'après la définition du tenseur de Nijenhuis on a

$$N_{t^{HI}}(X^H, Y^H) \\ = [(tX)^H, (tY)^H] - t^{HI}[(tX)^H, Y^H] - t^{HI}[X^H, (tY)^H] + (t^2)^{HI}[X^H, Y^H].$$

Utilisant les formules

$$[X^H, Y^H] = [X, Y]^H + \big(R(X, Y)\big)^{\square}, \quad t^{HI}\big((R(X, Y))^{\square}\big) = \gamma(t, R(X, Y))$$

on obtient

$$N_{t^{HI}}(X^H, Y^H) = [tX, tY]^H + \big(R(tX, tY)\big)^{\square} - (t[tX, Y])^H - \gamma(t, R(tX, Y)) - \\ -(t[X, tY])^H - \gamma(t, R(X, tY)) + (t^2[X, Y])^H + \gamma(t^2, R(X, Y)) \\ = \big(N_t(X, Y)\big)^H + \gamma(\delta, R(tX, tY)) - \\ - \gamma(t, R(tX, Y) + R(X, tY)) + \gamma(t^2, R(X, Y)).$$

La vérification des autres formules est analogue.

Cette proposition nous permet de démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 3.9. *Si t est une structure kählerienne sur M compactible avec la connexion ∇, alors les structures presques complexes t^{HI} et t^{HII} sont integrables.*

Démonstration. t est une structure kählerienne sur M compatible avec ∇ si et seulement si

$$N_t = 0, \tag{3.12}$$

$$\nabla_X t = 0, \tag{3.13}$$

$$R(tX, tY) = R(X, Y) \tag{3.14}$$

pour tous champs de vecteurs X, Y sur M. Remplaçant Y par $-tY$ dans

(3.14) on obtient

$$R(tX, Y) = -R(X, tY). \tag{3.15}$$

La condition (3.13) implique d'après la proposition 3.8 que

$$N_{t^{HI}}(X^H, s^V) = N_{t^{HII}}(X^H, s^V) = 0.$$

Pour la structure presque complexe t d'après la proposition 3.9 on a

$$\begin{aligned} N_{t^{HI}}(X^H, Y^H) &= (N_t(X, Y))^H + \gamma(\delta, R(tX, tY) - R(X, Y)) \\ &= \gamma(t, R(tX, Y) + R(X, tY)), \\ N_{t^{HII}}(X^H, Y^H) &= (N_t(X, Y))^H + \{R(tX, tY) - R(X, Y)\}^{\square} - \\ &\quad - \{t(R(tX, Y) + R(X, tY))\}^{\square}, \end{aligned}$$

d'où d'après (3.12), (3.14) et (3.15) il vient

$$N_{t^{HI}}(X^H, Y^H) = N_{t^{HII}}(X^H, Y^H) = 0,$$

c'est-à-dire, les structures t^{HI} et t^{HII} sont intégrables.

Ces derniers résultats sont analogues à ceux obtenus par Yano, Ishihara et Patterson [5], [6], [7] dans les cas des fibrés tangents et cotangents.

Bibliographie

[1] J. Gancarzewicz et N. Rahmani, *Relèvement horizontal des connexion linéaires au fibré vectoriel associé avec le fibré principal repères linéaires*, ce fasc., 291–295.

[2] S. Kobayashi and N. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, New York 1963.

[3] N. Rahmani, *Relèvement horizontal des tenseurs de type* (1, 1) *au fibré* $TM \otimes T^* M$, thèse de magister, Université d'Oran, Oran 1983.

[4] —, *Relèvements horizontaux des tenseurs de type* (1, 1) *au fibré des tenseurs de type* (p, q), sous presse.

[5] K. Yano and S. Ishihara, *Horizontal lifts from a manifold to its tangent bundle*, J. Math. Mech. 16 (1967), 1015–1030.

[6] —, —, *Tangent and cotangent bundles*, New York 1973.

[7] K. Yano and E. Patterson, *Horizontal lifts from a manifold to its cotangent bundle*, J. Math. Soc. Japan 16 (1967), 185–197.

INSTYTUT MATEMATYKI
UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI
KRAKÓW, POLOGNE

and

UNIVERSITÉ D'ORAN (ES-SENIA)
INSTITUT DE MATHÉMATIQUES
ORAN, ALGÉRIE

Reçu par la Rédaction le 1985.12.31