ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Über Randwertprobleme für Gleichungen vom gemischten Typ im R^3 (I)

von M. SCHNEIDER (Berlin)

Zusammenfassung. In einem Gebiet $G \subset \boldsymbol{R}^3$ werden lineare Differentialgleichungen

$$(1) \qquad L[u] = (A^{ik}u_{x_i})_{x_k} + B^i u_{x_i} + Ru = 0$$

untersucht; hierbei ist (1) in $G \cap \{x_3 \gtreqless 0\}$ entsprechend vom elliptischen, paraboli. schen und hyperbolischen Typ. Durch Umschreibung von (1) auf eine Pfaffsche Form dritten Grades und die Wahl einer speziellen Pfaffschen Form zweiten Grades mit vier beliebig wählbaren Funktionen, gelingt die Herleitung von Rand- und Koeffizientenforderungen für die Gültigkeit von a priori Abschätzungen für (1). Diese Aussagen führen zu Eindeutigkeitsaussagen für ein spezielles Randwertproblem einer Gleichung (1) mit (2) $A^{11} = A^{22} = k(x_3)$, $A^{33} = 1$, $B^i = 0$, $R \equiv R(x_i)$ und werden speziell auf das Frankl–Morawetz Problem der Gleichung (1) mit (2) angewendet. Es zeigt sich, daß ein von M. H. Protter in [8] angegebener Beweis, zur Angabe von Eindeutigkeitsaussagen für das Frankl–Morawetz Problem, nicht nachvollziehbar ist.

$G \subset \boldsymbol{R}^3$ sei einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet. In G ist der Differentialoperator

$$(1) \qquad \tilde{L}[u] := k(x_3)(u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2}) + u_{x_3x_3} + r(x_i)u$$

mit $k(x_3) \gtreqless 0$ für $x_3 \gtreqless 0$ gegeben.

PROBLEM I (R.W.-Problem). *G werde für $x_3 > 0$ durch eine stückweise glatte Fläche $\Phi^{(0)}(x_i) = 0$ begrenzt, die für $x_3 = 0$ die x_1, x_2 – Ebene in $x_1^2 + x_2^2 = 1$ schneidet und für $x_3 < 0$ durch eine stückweise glatte Fläche $\Phi^{(3)}(x_i) = 0$ mit dem Schnitt $x_1^2 + x_2^2 = 1$ für $x_3 = 0$. $\Phi^{(3)} = 0$ liege innerhalb des durch $x_3 = 0$ und*

$$(2) \qquad \Phi^{(2)}(x_i) := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} - 1 - \int_0^{x_3} (-k(t))^{1/2} dt = 0$$

bestimmten Gebietes. Gesucht werden Bedingungen, sodaß für eine „quasi-reguläre" Lösung $u(x_i)$ von $\tilde{L}[u] = 0$ mit $u|_{\Phi^{(0)} \cup \Phi^{(3)}} = 0$ folgt $u \equiv 0$.

Bemerkung 1. Für „quasi-regulär" siehe die Definition im Abschnitt 2. Dieses Problem I im $\boldsymbol{R}^3$ entspricht dem in [9] untersuchten Randwertproblem im $\boldsymbol{R}^2$.

Im Abschnitt 3 werden sodann einige Aussagen über das Frankl–Morawetz Problem im $\boldsymbol{R}^3$ gewonnen.

Problem II (Frankl–Morawetz Problem). *G werde für $x_3 > 0$ durch eine stückweise glatte Fläche $\Phi^{(0)}(x_i) = 0$ begrenzt – mit dem Schnitt $x_1^2 + x_2^2 = 1$ für $x_3 = 0$ – und für $x_3 < 0$ durch die charakteristische Fläche von* (1)

$$\Phi^{(1)}(x_i) := -(x_1^2+x_2^2)^{1/2} - \int_0^{x_3} \big(-k(t)\big)^{1/2} dt = 0, \tag{3}$$

sowie einer stückweise glatten Fläche $\Phi^{(3)}(x_i) = 0$ mit Schnitt $x_1^2+x_2^2 = 1$ für $x_3 = 0$, die der Bedingung

$$k(x_3)\{\Phi_{x_1}^{(3)^2} + \Phi_{x_2}^{(3)^2}\} + \Phi_{x_3}^{(3)^2} \geqslant 0 \tag{4}$$

genügt. $\Phi^{(3)} = 0$ kann mit der charakteristischen Fläche $\Phi^{(2)} = 0$ zusammenfallen. Gesucht werden Bedingungen, sodaß für eine „quasi-reguläre" Lösung $u(x_i)$ von $\tilde{L}[u] = 0$ mit $u|_{\Phi^{(0)} \cup \Phi^{(3)}} = 0$ folgt $u \equiv 0$.

Bemerkung 2. M. H. Protter gibt in [8] für das Problem II der Gleichung (1) mit $\Phi^{(3)} = \Phi^{(2)}$ und $r(x_i) \equiv 0$ einen Eindeutigkeitssatz (Theorem 3, S. 444). Der in [8] angegebene Beweis ist leider nicht nachvollziehbar, da das auf S. 445 über S_4 (entspricht hier $\Phi^{(1)}$) erstreckte Flächenintegral entgegen der Behauptung *negativ* definit ist. Hierzu siehe auch die Bemerkung 6 im Abschnitt 3.

1. Herleitung von a priori Abschätzungen. A priori Abschätzungen werden für allgemeinere Differentialgleichungen als (1) hergeleitet. Diese geben die Möglichkeit, die Existenz schwacher und halbstarker Lösungen von Randwertproblemen nachzuweisen. Die in [10] gewählte Schreibweise wird beibehalten. Sei

$$L[u] := (A^{ik} u_{x_i})_{x_k} + B^i u_{x_i} + Ru; \qquad i, k = 1, 2, 3, \tag{5}$$

mit

V 1. $A^{ik}(x_j) = 0$ für $i \neq k$; $A^{ii}(x_j), B^i(x_j), R(x_j) \in C^1(\bar{G})$.

Über oben und unten auftretende gleiche Indizes wird stets von 1 bis 3 summiert. Entsprechend [10] sei

$$\begin{aligned} d_n u &= \tfrac{1}{2}\varepsilon_{irl} A^{ik} u_{x_k} [dx^r, dx^l] \\ &= A^{11} u_{x_1} [dx^2, dx^3] - A^{22} u_{x_2} [dx^1, dx^3] + A^{33} u_{x_3} [dx^1, dx^2]; \end{aligned}$$

$$\Theta = \tfrac{1}{2}\varepsilon_{irl} B^i [dx^r, dx^l] = B^1[dx^2, dx^3] - B^2[dx^1, dx^3] + B^3[dx^1, dx^2]; \tag{6}$$

$$\tilde{R} = R - \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial B^i}{\partial x_i}.$$

Die Gleichung (5) lautet dann als Pfaffsche Form dritten Grades

$$L[u][dx^1, dx^2, dx^3] = [d, d_n u] + [d, u\Theta] + \tilde{R}u[dx^1, dx^2, dx^3]. \tag{7}$$

Für die geometrische Deutung von $d_n u$ siehe [3], S. 457 ff. oder [10]. Es seien $a^0(x_j)$, $a^i(x_j)$, $i = 1, 2, 3$, zunächst beliebige, reelle Funktionen mit

V 2. $a^0(x_j) \in C^2(\bar{G}_1) \cap C^2(\bar{G}_2)$, $a^i(x_j) \in C^1(\bar{G}_1) \cap C^1(\bar{G}_2)$; $G_1 = G \cap \{x_3 > 0\}$, $G_2 = G \cap \{x_3 < 0\}$.

Betrachtet man die Pfaffsche Form zweiten Grades

$$\Omega = 2(a^0 u + a^i u_{x_i}) d_n u + (Ru^2 - A^{ii} u_{x_i}^2)\,\omega_2 - u^2 d_n a^0 + a^0 u^2 \Theta \tag{8}$$

mit

$$\omega_2 = a^1[dx^2, dx^3] - a^2[dx^1, dx^3] + a^3[dx^1, dx^2], \tag{9}$$

so ergibt formales Rechnen

$$\begin{aligned}[d, \Omega] = {} & 2(a^0 u + a^i u_{x_i}) L[u][dx^1, dx^2, dx^3] + \\ & + \Big(a_\infty u^2 + \sum_{i,k=1}^{3} a_{ik} u_{x_i} u_{x_k}\Big)[dx^1, dx^2, dx^3]\end{aligned} \tag{10}$$

mit $a_{ik} = a_{ki}$,

$$\begin{aligned}
a_\infty &= -2a^0 R + (Ra^i)_{x_i} - (A^{ii} a^0_{x_i})_{x_i} + (a^0 B^i)_{x_i},\\
a_{11} &= -(A^{11} a^i)_{x_i} + 2A^{11} a^1_{x_1} + 2a^0 A^{11} - 2a^1 B^1,\\
a_{22} &= -(A^{22} a^i)_{x_i} + 2A^{22} a^2_{x_2} + 2a^0 A^{22} - 2a^2 B^2,\\
a_{33} &= -(A^{33} a^i)_{x_i} + 2A^{33} a^3_{x_3} + 2a^0 A^{33} - 2a^3 B^3,\\
a_{12} &= a^2_{x_1} A^{11} + a^1_{x_2} A^{22} - a^1 B^2 - a^2 B^1,\\
a_{13} &= a^3_{x_1} A^{11} + a^1_{x_3} A^{33} - a^1 B^3 - a^3 B^1,\\
a_{23} &= a^3_{x_2} A^{22} + a^2_{x_3} A^{33} - a^2 B^3 - a^3 B^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Für die Probleme I und II wird auf Ω in G_1 und G_2 der Gaußsche Satz angewendet. Die Funktionen a^k sollen sodann derart bestimmt werden, daß

$$0 \leqslant \iint_{\partial G_1 \cup \partial G_2} \Omega = \iiint_{G_1 \cup G_2} [d, \Omega] \leqslant 0 \tag{12}$$

gilt und aus (12) zusätzlich folgt $u \equiv 0$. Im folgenden wird die Form Ω auf den in den Problemen I und II auftretenden Randflächen untersucht. Hierbei wird vorausgesetzt, daß die auftretenden Flächenintegrale existieren und die Funktion u und deren Ableitungen die Umformungen zulassen.

Lemma 1. *Unter* V 1 *gilt* $0 \leqslant \iint\limits_{G\cap\{x_3=0\}} \Omega$, *sofern*

$$(-a_+^k + a_-^k)A^{33} = 0 \quad \text{für } k = 0, 1, 2; \quad (a_+^3 - a_-^3)A^{kk} \geqslant 0 \quad \text{für } k = 1, 2,$$
$$(-a_+^3 + a_+^3)A^{33} \geqslant 0; \quad (-a_+^3 + a_-^3)R + (a_{x_3}^0 - a_{x_3-}^0)A^{33} - (a_+^0 - a_-^0)B^3 \geqslant 0.$$

Beweis. Die Form (8) Ω lautet ausgeschrieben

$$(13) \quad \Omega = [dx^2, dx^3]\{2(a^0u + a^iu_{x_i})A^{11}u_{x_1} + a^1(Ru^2 - A^{ii}u_{xi}^2) - \\ -u^2A^{11}a_{x_1}^0 + a^0u^2B^1\} - [dx^1, dx^3]\{2(a^0u + a^iu_{x_i})A^{22}u_{x_2} + \\ + a^2(Ru^2 - A^{ii}u_{x_i}^2) - u^2A^{22}a_{x_2}^0 + a^0u^2B^2\} + \\ + [dx^1, dx^2]\{2(a^0u + a^iu_{x_i})A^{33}u_{x_3} + a^3(Ru^2 - A^{ii}u_{x_i}^2) - \\ -u^2A^{33}a_{x_3}^0 + a^0u^2B^3\}.$$

Hiermit folgen auf $G\cap\{x_3 = 0\}$ (Normalen nach außen gerichtet) aus

$$\Omega|_{x_3=0+} + \Omega|_{x_3=0-} = -[dx^1, dx^2]\{\ \}_+ + [dx^1, dx^2]\{\ \}_-$$

die Bedingungen in Lemma 1.

Lemma 2. *Die stückweise glatte Fläche $\Phi^{(0)}(x_i) = 0$ habe die Darstellung $\vartheta^{(0)}(s, t) = \{x^i(s, t)\}$ mit grad $\Phi^{(0)} = \varrho(\vartheta_s^{(0)} \times \vartheta_t^{(0)})$, $\varrho > 0$, und grad $\Phi^{(0)}$ ins Äußere von G gerichtet. Dann gilt für $u|_{\Phi^{(0)}} = 0$*

$$(14) \quad \iint\limits_{\Phi^{(0)}} \Omega = \iint\limits_{\Phi^{(0)}} (A^{ii}u_{x_i}^2)\,\omega_2$$

und es folgt $0 \leqslant \iint\limits_{\Phi^{(0)}} \Omega$, sofern der Vektor $a = \{a^1, a^2, a^3\}$ auf $\Phi^{(0)} = 0$ nicht ins Innere von G weist.

Beweis. Auf den glatten Randstücken folgt aus $[dx^i, dx^k] = (x_s^ix_t^k - -x_t^ix_s^k)[ds, dt]$ daß der Bi-vektor $\{[dx^2, dx^3], -[dx^1, dx^3], [dx^1, dx^2]\}$ parallel zu grad $\Phi^{(0)}$ ist. Aus $u|_{\Phi^{(0)}} = 0$ folgt

$$(15) \quad \begin{aligned} u_{x_2}[dx^1, dx^2] + u_{x_3}[dx^1, dx^3] &= 0, & & \Phi_{x_3}^{(0)}u_{x_2} - \Phi_{x_2}^{(0)}u_{x_3} = 0, \\ u_{x_1}[dx^1, dx^2] - u_{x_3}[dx^2, dx^3] &= 0, & \text{bzw.} \quad & \Phi_{x_3}^{(0)}u_{x_1} - \Phi_{x_1}^{(0)}u_{x_3} = 0, \\ u_{x_1}[dx^1, dx^3] + u_{x_2}[dx^2, dx^3] &= 0, & & \Phi_{x_2}^{(0)}u_{x_1} - \Phi_{x_1}^{(0)}u_{x_2} = 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (15) in (13) folgt die Beziehung (14).

Lemma 3. *Die stückweise glatte Fläche $\Phi^{(3)}(x_i) = 0$ mit $A^{ii}(\Phi_{x_i}^{(3)})^2 \geqslant 0$ habe die Darstellung $\vartheta^{(3)}(s, t) = \{x^i(s, t)\}$ mit grad $\Phi^{(3)} = \varrho(\vartheta_s^{(3)} \times \vartheta_t^{(3)})$. $\varrho > 0$ und grad $\Phi^{(3)}$ ins Äußere von G gerichtet. Dann gilt für $u|_{\Phi^{(3)}} = 0$*

$$\text{(i)} \quad \iint\limits_{\Phi^{(3)}} \Omega = \iint\limits_{\Phi^{(3)}} (a^ju_{x_j})^2 \frac{(A^{ii}\Phi_{x_i}^{(3)^2})}{a^k\Phi_{x_k}^{(3)}} \frac{1}{\varrho}[ds, dt] \geqslant 0,$$

falls der Vektor $a = \{a^1, a^2, a^3\}$ *auf* $\Phi^{(3)} = 0$ *ins Äußere von* G *weist.*

(ii) $\iint\limits_{\Phi^{(3)}} \Omega = 0$, *falls* $a^i \Phi^{(3)}_{x_i} = 0$ *ist und*

(iii) $\iint\limits_{\Phi^{(3)}} \Omega = 0$, *falls* $\Phi^{(3)} = 0$ *mit der charakteristischen Fläche* $\Phi^{(2)}(x_i) = 0$ *zusammenfällt.*

Beweis. Aus $u|_{\Phi^{(3)}} = 0$ folgt entsprechend Lemma 2

$$\iint\limits_{\Phi^{(3)}} \Omega = \iint\limits_{\Phi^{(3)}} (A^{ii} u^2_{x_i}) \omega_2 = \iint\limits_{\Phi^{(3)}} (A^{ii} u^2_{x_i})(a^j \Phi^{(3)}_{x_j}) \frac{1}{\varrho} [ds, dt] \tag{16}$$

und die Gültigkeit von (15) auf $\Phi^{(3)} = 0$.

1° Gilt $a^i \Phi^{(3)}_{x_i} = 0$, folgt aus (16) die Behauptung (ii).

2° Durch Ausrechnen bestätigt man mit (15)

$$(A^{ii} u^2_{x_i})(a^j \Phi^{(3)}_{x_j})^2 = (a^i u_{x_i})^2 (A^{jj} \Phi^{(3)2}_{x_j}). \tag{17}$$

Fällt $\Phi^{(3)} = 0$ mit der charakteristischen Fläche $\Phi^{(2)} = 0$ zusammen, d.h. ist $A^{jj} \Phi^{(3)2}_{x_j} = 0$, folgt mit (17) aus (16) die Behauptung (iii). Anderenfalls folgt für $a^i \Phi^{(3)}_{x_i} > 0$ mit (17) aus (4) und (16) die Aussage (i).

Lemma 4. *Die charakteristische Fläche* $\Phi^{(1)} = 0$ *habe die Darstellung* $\vartheta^{(1)}(s, t) = \{x^i(s, t)\}$ *mit* grad $\Phi^{(1)} = \varrho(\vartheta^{(1)}_s \times \vartheta^{(1)}_t)$, $\varrho > 0$ *und* grad $\Phi^{(1)}$ *ins Äußere von* G *gerichtet. Für* $t =$ konst. *beschreibe* $\vartheta^{(1)} = \vartheta^{(1)}(s)$ *die Bicharakteristiken auf* $\Phi^{(1)}$, *sodaß* $A^{ij} \Phi^{(1)}_{x_j} = \lambda x^i_s$. *Dann gilt*

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Phi^{(1)}} \Omega = &\iint\limits_{\Phi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0 \lambda}{\varrho} u^2\right) [ds, dt] + \\ &+ \iint\limits_{\Phi^{(1)}} u^2 \left[-\varrho \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0 \lambda}{\varrho}\right) + R(a^i \Phi^{(1)}_{x_i}) - \lambda \frac{\partial a^0}{\partial s} + \right. \\ &\left. + a^0 (B^i \Phi^{(1)}_{x_i}) \right] \frac{1}{\varrho} [ds, dt] + \iint\limits_{\Phi^{(1)}} \bar{Q}(u_{x_i}, u_{x_j}) \frac{1}{\varrho} [ds, dt] \end{aligned} \tag{18}$$

mit $\bar{Q}(u_{x_i}, x_{x_j}) = \sum\limits_{i,j=1}^{3} \bar{a}_{ij} u_{x_i} u_{x_j}$, $\bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ji}$ *und*

$$\begin{aligned} \bar{a}_{11} &= A^{11}(a^1 \Phi^{(1)}_{x_1} - a^2 \Phi^{(1)}_{x_2} - a^3 \Phi^{(1)}_{x_3}), \\ \bar{a}_{22} &= A^{22}(-a^1 \Phi^{(1)}_{x_1} + a^2 \Phi^{(1)}_{x_2} - a^3 \Phi^{(1)}_{x_3}), \\ \bar{a}_{33} &= A^{33}(-a^1 \Phi^{(1)}_{x_1} - a^2 \Phi^{(1)}_{x_2} + a^3 \Phi^{(1)}_{x_3}), \\ \bar{a}_{12} &= a^1 A^{22} \Phi^{(1)}_{x_2} + a^2 A^{11} \Phi^{(1)}_{x_1}, \\ \bar{a}_{13} &= a^1 A^{33} \Phi^{(1)}_{x_3} + a^3 A^{11} \Phi^{(1)}_{x_1}, \\ \bar{a}_{23} &= a^2 A^{33} \Phi^{(1)}_{x_3} + a^3 A^{2?} \Phi^{(1)}_{x_2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Beweis. Aus $[dx^i, dx^k] = (x_s^i x_t^k - x_s^k x_t^i)[ds, dt]$ folgt mit grad $\Phi^{(1)} = \varrho(\vartheta_s^{(1)} \times \vartheta_t^{(1)})$, für den Bi-vektor

$$\{[dx^2, dx^3], -[dx^1, dx^3], [dx^1, dx^2]\} = \frac{1}{\varrho}\{\Phi_{x_1}^{(1)}, \Phi_{x_2}^{(1)}, \Phi_{x_3}^{(1)}\}[ds, dt]. \tag{20}$$

Da grad $\Phi^{(1)}$ äußere Normale, ist $[ds, dt]$ als „positiv" orientiertes Flächenelement zu wählen.

Mit (20) folgt aus (6):

$$\begin{aligned} d_n u &= \frac{1}{\varrho}(A^{ii}\Phi_{x_i}^{(1)} u_{x_i})[ds, dt] = \frac{\lambda}{\varrho} u_{x_i} x_s^i [ds, dt] \\ &= \frac{\lambda}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial s}[ds, dt], \end{aligned}$$

sodaß

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Phi^{(1)}} 2a^0 u d_n u &= \iint\limits_{\Phi^{(1)}} 2a^0 u \frac{\lambda}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial s}[ds, dt] = \iint\limits_{\Phi^{(1)}} a^0 \frac{\lambda}{\varrho}\frac{\partial u^2}{\partial s}[ds, dt] \\ &= \iint\limits_{\Phi^{(1)}} \left\{\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0\lambda}{\varrho} u^2\right) - u^2 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0\lambda}{\varrho}\right)\right\}[ds, dt]. \end{aligned} \tag{21}$$

Aus (8) Ω folgt mit (20) die Behauptung (18).

Bemerkung 3. Für das Problem II ist $u|_{\Phi^{(1)}}$ nicht vorgegeben. Um aus (18) Forderungen für $0 \leqslant \iint\limits_{\Phi^{(1)}} \Omega$ zu erhalten, benötigt man Aussagen über $\iint\limits_{\Phi^{(1)}} \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0\lambda}{\varrho} u^2\right)[ds, dt]$.

Nach Integration über „s" verschwindet der Integrand an der „unteren" Grenze, da $u = 0$ im Schnitt der Flächen $\Phi^{(1)} = 0$ und $\Phi^{(3)} = 0$. Für die „obere" Grenze erhält man die Forderung

$$\lim_{x_3 \to 0-} \left\{\frac{a^0\lambda}{\varrho} u^2|_{\Phi^{(1)}}\right\} = 0. \tag{22}$$

(22) ist eine Bedingung an das Singularitätenverhalten von u im Nullpunkt.

Aus Lemma 4 folgt

Lemma 5. *Die Voraussetzungen von Lemma 4 und (22) seien erfüllt. Es gilt $0 \leqslant \iint\limits_{\Phi^{(1)}} \Omega$, sofern*

$$\begin{aligned} -\varrho\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{a^0\lambda}{\varrho}\right) + R(a^i\Phi_{x_i}^{(1)}) - \lambda\frac{\partial a^0}{\partial s} + a^0(B^i\Phi_{x_i}^{(1)})|_{\Phi^{(1)}} &\geqslant 0, \\ \bar{Q} = \sum_{i,k=1}^{3} \bar{a}_{ik} u_{x_i} u_{x_k}|_{\Phi^{(1)}} &\geqslant 0 \quad \textit{mit } (19). \end{aligned} \tag{23}$$

Da $\Phi^{(1)} = 0$ charakteristische Mannigfaltigkeit ist, ergeben sich für $\bar{Q}(u_{x_i}, u_{x_k})$ folgende Aussagen:

Mit $A^{ii}\Phi_{x_i}^{(1)^2} = 0$ folgt aus (19)

$$\Phi_{x_1}^{(1)}\bar{a}_{1k}+\Phi_{x_2}^{(1)}\bar{a}_{2k}+\Phi_{x_3}^{(1)}\bar{a}_{3k} = 0 \quad \text{für } k = 1, 2, 3. \tag{24}$$

Hieraus folgt

$$\Phi_{x_3}^{(1)^2}\begin{vmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{13}\\ \bar{a}_{31} & \bar{a}_{33}\end{vmatrix} = \Phi_{x_2}^{(1)^2}\begin{vmatrix}\bar{a}_{11} & \bar{a}_{12}\\ \bar{a}_{21} & \bar{a}_{22}\end{vmatrix}; \quad \Phi_{x_3}^{(1)^2}\begin{vmatrix}\bar{a}_{22} & \bar{a}_{23}\\ \bar{a}_{32} & \bar{a}_{33}\end{vmatrix} = \Phi_{x_1}^{(1)^2}\begin{vmatrix}\bar{a}_{22} & \bar{a}_{21}\\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{11}\end{vmatrix};$$

$$\Phi_{x_3}^{(1)^2}\begin{vmatrix}\bar{a}_{12} & \bar{a}_{13}\\ \bar{a}_{23} & \bar{a}_{33}\end{vmatrix} = \Phi_{x_1}^{(1)}\Phi_{x_2}^{(1)}\begin{vmatrix}\bar{a}_{21} & \bar{a}_{11}\\ \bar{a}_{22} & \bar{a}_{21}\end{vmatrix},$$

sodaß für $\bar{a}_{33}|_{\Phi^{(1)}} > 0$

$$\bar{Q} = \frac{1}{\bar{a}_{33}}\left\{(\bar{a}_{13}u_{x_1}+\bar{a}_{23}u_{x_2}+\bar{a}_{33}u_{x_3})^2+\frac{\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}-\bar{a}_{12}^2}{\Phi_{x_3}^{(1)2}}(\Phi_{x_2}^{(1)}u_{x_1}-\Phi_{x_1}^{(1)}u_{x_2})^2\right\}$$

mit

$$\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}-\bar{a}_{12}^2 = \Phi_{x_3}^{(1)^2}\{A^{22}A^{33}(\alpha^1)^2+A^{11}A^{33}(\alpha^2)^2+A^{11}A^{22}(\alpha^3)^2\}. \tag{25}$$

Somit gilt $\bar{Q} \geqslant 0$, sofern $\bar{a}_{33} > 0$ und $\bar{a}_{11}a_{22}-\bar{a}_{12}^2 \geqslant 0$ auf $\Phi^{(1)} = 0$.

Die in den Problemen I und II in (12) auftretenden Flächenintegrale wurden untersucht. Für das Volumenintegral über G (bzw. G_1 und G_2) in (12) gilt folgende Aussage:

Lemma 6. *Sei $L[u] = 0$ in G, dann gilt $\iiint_G [d, \Omega] \leqslant 0$, sofern mit* (11)

$$-a_{\infty} \geqslant 0; \quad Q(u_{x_i}, u_{x_k}) = \sum_{i,k=1}^{3}(-a_{ik})u_{x_i}u_{x_k} \geqslant 0. \tag{26}$$

Ist in $G_2 \subset G$ die Differentialgleichung (5) vom hyperbolischen Typ, so folgt für die Form Q in (26)

Lemma 7. *Ist $\Phi(x_i) = 0$ mit $\Phi(x_i) \in C^2(G_2)$ charakteristische Mannigfaltigkeit von* (5) *$L[u] = 0$ und $\mu(x_i) \in C^1(G_2)$ eine beliebige Funktion, so folgt mit*

$$\begin{aligned} a^i &= \mu A^{ik}\Phi_{x_k}, \quad i = 1, 2, 3,\\ 2a^0 &= \mu\{(A^{ii}\Phi_{x_i})_{x_i}+B^i\Phi_{x_i}\},\\ \det a_{ik} &= 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Beweis. Mit $a^i\Phi_{x_i} = 0$ folgt für $K = 1, 2, 3$

$$\Phi_{x_1}a_{1k}+\Phi_{x_2}a_{2k}+\Phi_{x_3}a_{3k} = -\delta^{kj}A^{jj}\Phi_{x_j}\{\mu[(A^{ii}\Phi_{x_i})_{x_i}+B^i\Phi_{x_i}]-2a^i\}.$$

Bemerkung 4. Mit der speziellen Setzung (27) $a^i = \mu A^{ik}\Phi_{x_k}^{(1)}$ folgt für die quadratische Form $\bar{Q}$ in Lemma 4 $\bar{Q}|_{\Phi^{(1)}} = 2\mu(A^{ii}\Phi_{x_i}^{(1)}u_{x_i})^2$.

2. Behandlung von Problem I.

Definition. Eine Funktion $u(x_j)$ wird quasi-reguläre Lösung des Problems I in G genannt, falls

a) $u(x_j)\in C^0(\bar{G}\setminus\{x_i\,|\,x_1^2+x_2^2=1,\ x_3=0\})\cap C^1(G)$ Lösung von (1) in G_1 und G_2;

b) auf die Integrale $\iiint u\tilde{L}[u]d\tau$, $\iiint u_{x_i}\tilde{L}[u]d\tau$, jeweils erstreckt über G_1 und G_2 der Gaußsche Satz anwendbar ist, wobei die auftretenden Flächenintegrale erstreckt über innere Flächen, die gegen ∂G_1 und ∂G_2 konvergieren, existieren.

Aus Lemma 1, 2, 3 und 6 ergeben sich für die Funktionen a^k für die Gültigkeit von (12) die Forderungen:

Übergangsbedingungen ($x_3=0$);

$$a_+^k-a_-^k=0 \quad \text{für } k=0,1,2; \qquad -a_+^3+a_-^3\geqslant 0;$$

$$(-a_+^3+a_-^3)r+(a^0_{x_3+}-a^0_{x_3-})\geqslant 0.$$

G_1 und G_2:

$$a\cdot\operatorname{grad}\Phi^{(0)}|_{\Phi^{(0)}}\geqslant 0; \qquad a\cdot\operatorname{grad}\Phi^{(3)}|_{\Phi^{(3)}}\geqslant 0 \qquad \text{mit } a=\{a^1,a^2,a^3\};$$

$$-a_\infty\geqslant 0, \qquad Q=\sum_{i,k=1}^{3}(-a_{ik})u_{x_i}u_{x_k}\geqslant 0 \qquad \text{mit} \quad a_\infty,\,a_{ik} \quad \text{gemäß (11).}$$

Zur Untersuchung der quadratischen Form Q in G_2 wird Lemma 7 verwendet. Wird als charakteristische Mannigfaltigkeit von (1) gewählt

$$\Phi^{(1)}=-(x_1^2+x_2^2)^{1/2}-\int_0^{x_3}\big(-k(t)\big)^{1/2}dt$$

$$\text{und gesetzt} \quad \mu(-k)\frac{1}{(x_1^2+x_2^2)^{1/2}}\bigg|_{\Phi^{(1)}}=1,$$

so folgt auf $\Phi^{(1)}=0$:

$$a^1=x^1, \quad a^2=x^2, \quad a^3=-(-k)^{-1/2}\int_{x_3}^{0}\big(-k(t)\big)^{1/2}dt,$$

(28)

$$2a^0=1+\tfrac{1}{2}(-k)^{-3/2}k'\int_{x_3}^{0}\big(-k(t)\big)^{1/2}dt.$$

Die auf $\Phi^{(1)}=0$ erhaltenen Beziehungen (28) legen die im Satz 1 unter (29) angegebene Wahl der Funktionen a^k nahe; man erhält damit die Aussage:

SATZ 1. VORAUSSETZUNG. *Für* (1) $\tilde{L}[u] = 0$ *gelte:*

(i) $k(x_3) \gtreqless 0$ *für* $x_3 \gtreqless 0$; $k(x_3) \in C^0(\bar{G}) \cap C^3(\bar{G} \cap \{x_3 \neq 0\})$; $r(x_j) \in C^0(\bar{G}) \cap$ $\cap C^1(\bar{G} \cap \{x_3 \neq 0\})$.

(ii) *Mit* x_1^0, x_2^0 *beliebig wählbare, reelle Konstanten, sei*

$$(29)\quad \begin{gathered} a^1 = x_1 - x_1^0; \quad a^2 = x_2 - x_2^0; \quad a^3 = -|k(x_3)|^{-1/2} \int\limits_{x_3}^{0} |k(\tau)|^{1/2} d\tau; \\ 2a^0 = 1 - \operatorname{sign} x_3 \tfrac{1}{2} k' |k(x_3)|^{-3/2} \int\limits_{x_3}^{0} |k(\tau)|^{1/2} d\tau \end{gathered}$$

und gelte:

$$(30)\quad \begin{gathered} a_+^0 - a_-^0 = 0, \quad a_+^3 - a_-^3 = 0, \quad a_{x_3-}^0 - a_{x_3+}^0 = 0, \\ -a_\infty = 2a^0 r - (ra^i)_{x_i} + k(x_3)(a_{x_1x_1}^0 + a_{x_2x_2}^0) + a_{x_3x_3}^0 > 0 \end{gathered}$$

in G_1 *und* G_2.

(iii) *Für* $\Phi^{(0)} = 0$ *und* $\Phi^{(3)} = 0$ *gelte*

$$(31)\quad a \cdot \operatorname{grad} \Phi^{(0)}|_{\Phi(0)} \geqslant 0; \quad a \cdot \operatorname{grad} \Phi^{(3)}|_{\Phi(3)} \geqslant 0.$$

BEHAUPTUNG. *Für jede quasi-reguläre Lösung des Problems* I *von* $\tilde{L}[u] = 0$ *mit* $u|_{\Phi(0) \cup \Phi(3)} = 0$ *folgt* $u \equiv 0$.

Beweis. Mit (29) folgt $Q = \sum\limits_{i,k=1}^{3} (-a_{ik}) u_{x_i} u_{x_k} \equiv 0$. Die Forderungen (30) sichern die Übergangsbedingungen und ergeben mit (iii)

$$0 \leqslant \iint\limits_{\partial G} \Omega = \iiint\limits_{G} [d, \Omega] < 0, \quad \text{so daß } u \equiv 0.$$

Bemergung 5. Die Voraussetzung $a_+^3 - a_-^3 = 0$ ist erfüllt, sofern $\lim\limits_{x_3 \to 0+} \dfrac{k}{k'} = 0$.

Die Randforderungen (31) bedeuten eine „Sternförmigkeit" des Gebietes G bezüglich des frei wählbaren Punktes $P(x_1^0, x_2^0, 0)$. Wegen der speziellen Gestalt der a^k gemäß (29) ist es möglich, Singularitäten der ersten Ableitungen der Lösungsfunktion $u(x_j)$ in P zuzulassen. Die zusätzlichen Abschätzungen im Gaußschen Satz sind dann entsprechend, wie in der Arbeit von C. S. Morawetz [7], durchzuführen.

Für spezielles $k(x_3)$ folgt aus Satz 1

SATZ 2. VORAUSSETZUNG. *Für* (1) $\tilde{L}[u] = 0$ *gelte*

(i) $k(x_3) = \operatorname{sign} x_3 |x_3|^m$ *mit* $m > 0$, $r(x_j) \in C^0(\bar{G}) \cap C^1(G \cap \{x_3 \neq 0\})$.

(ii) *Mit*

$$a^1 = x_1 - x_1^0; \qquad a^2 = x_2 - x_2^0; \qquad a^3 = \frac{2}{m+2} x_3; \qquad a^0 = \frac{m+1}{m+2}$$

sei

$$-\frac{4}{m+2} r - a \cdot \operatorname{grad} r > 0 \qquad \text{in } G_1 \text{ und } G_2;$$

$$a \cdot \operatorname{grad} \Phi^{(0)}|_{\Phi(0)} \geqslant 0; \qquad a \cdot \operatorname{grad} \Phi^{(3)}|_{\Phi(3)} \geqslant 0.$$

BEHAUPTUNG. *Für jede quasi-reguläre Lösung $u(x_j)$ des Problems* I *von $\tilde{L}[u] = 0$ mit $u|_{\Phi(0) \cup \Phi(3)} = 0$ folgt $u \equiv 0$. Gilt in den Sätzen* 1 *bzw.* 2 *$a_\infty \equiv 0$, jedoch $a \cdot \operatorname{grad} \Phi^{(3)}|_{\Phi(3)} > 0$, und ist $\Phi^{(3)} = 0$ nirgends charakteristisch, so folgt aus Lemma* 3, *daß mit $u|_{\Phi(3)} = 0$ auch $a \cdot \operatorname{grad} u|_{\Phi(3)} = 0$ ist. Eindeutigkeitsaussagen in einer geeigneten Funktionenklasse in G_2 folgen aus der eindeutigen Lösbarkeit der Cauchyschen Anfangswertaufgabe und in G_1 mit dem* 1. *Hopfschen Lemma.*

3. Bemerkungen zum Problem II (Frankl-Morawetz Problem). Quasi--reguläre Lösungen des Problems II sind entsprechend der Definition im Abschnitt 2 erklärt. Zu den im Abschnitt 2 angegebenen Forderungen an die Funktionen a^k treten Zusatzforderungen auf der Fläche $\Phi^{(1)} = 0$ nach Lemma 4 hinzu. Die Fläche $\Phi^{(1)} = 0$ hat eine Darstellung

$$\vartheta^1(s, t); = \vartheta^1(x_3, \varphi) = \left\{ \int_{x_3}^{0} \left(-k(t)\right)^{1/2} dt \cos\varphi,\ \int_{x_3}^{0} \left(-k/t)\right)^{1/2} dt \sin\varphi,\ x_3 \right\},$$

mit $\vartheta^1_{x_3} \times \vartheta^1_\varphi$ ins Äußere von G gerichtet. Man berechnet (Lemma 4)

$$\frac{1}{\varrho} = \int_{x_3}^{0} \left(-k(t)\right)^{1/2} dt, \qquad \lambda = -\left(-k_{(x_3)}\right)^{1/2} \tag{32}$$

und erhält mit (25), daß $\overline{Q}(u_{x_i}, u_{x_j})|_{\Phi(1)} \geqslant 0$ gilt, sofern

$$\begin{aligned} \bar{a}_{33} &= -a^1 \Phi^{(1)}_{x_1} - a^2 \Phi^{(1)}_{x_2} + a^3 \Phi^{(1)}_{x_3}|_{\Phi(1)} > 0, \\ \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} - \bar{a}_{12}^2 &= k(x_3)\{(a^1)^2 + (a^2)^2 + k(x_3)(a^3)^2\}|_{\Phi(1)} \geqslant 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Aus Lemma 1 bis 6 erhält man für die Gültigkeit von (12) die Forderungen.

Übergangsforderungen: $a^k_+ - a^k_- = 0$ für $k = 0, 1, 2$; $-a^3_+ + a^3_- \geqslant 0$;

$$(-a^3_+ + a^3_-) r + (a^0_{x_3+} - a^0_{x_3-}) \geqslant 0. \tag{34}$$

G_1 und G_2: $a\cdot\operatorname{grad}\Phi^{(0)}|_{\Phi(0)} \geqslant 0$, $a\cdot\operatorname{grad}\Phi^{(3)}|_{\Phi(3)} \geqslant 0$ mit $a = \{a^1, a^2, a^3\}$;

(35) $-a_\infty \geqslant 0, \quad Q = \sum_{i,k=1}^{3} (-a_{ik}) u_{x_i} u_{x_k} \geqslant 0$ mit a_∞, a_{ik} gemäß (11);

$$-\varrho \frac{\partial}{\partial_{x_3}}\left(\frac{a^0\lambda}{\varrho}\right) + r(a^i \Phi^{(1)}_{x_i}) - \lambda \frac{\partial a^0}{\partial x_3}\,|_{\Phi(1)} \geqslant 0;$$

(36)

$$\bar a_{33}|_{\Phi(1)} > 0, \quad \bar a_{11}\bar a_{22} - \bar a_{12}^2|_{\Phi(1)} \geqslant 0 \quad \text{mit (32) und (33).}$$

Eindeutigkeitsaussagen für das Frankl–Morawetz Problem sind auf die Bestimmung der Funktionen a^k mit (34), (35) und (36) zurückgeführt.

Bemerkung 6. 1° Wird zur Untersuchung der Form (35) Q entsprechend Abschnitt 2 $\Phi = \Phi^{(1)}$ in Lemma 7 gewählt, führt dies ($B^i \equiv 0$) auf $\Phi^{(1)} = 0$ in (36) zu einem Widerspruch.

2° Wird in Lemma 7 in G_2 die charakteristische Mannigfaltigkeit von (1)

(37) $$\Phi = x_1 + x_2 - \sqrt{2}\int_0^{x_3} \left(-k(t)\right)^{1/2} dt$$

gewählt, so folgt

$$a^1 = \frac{(-k)^{1/2}}{\sqrt{2}} a^3, \quad a^2 = \frac{(-k)^{1/2}}{\sqrt{2}} a^3, \quad a^3 = -4\frac{k}{k'}, \quad 2a^0 = \mu \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{k'}{(-k)^{1/2}}.$$

Mit $a^0 = -1$ gesetzt, d.h. $\mu = -\dfrac{4}{\sqrt{2}}\dfrac{(-k)^{1/2}}{k'}$, erhält man die von M. H. Protter in [8] angegebene Setzung $a{:} = a^0 = -1$, $b{:} = a^1$, $c{:} = a^2$, $d{:} = a^3$. Wie aus (36) zu entnehmen, ist bei dieser Festsetzung ($a^0 = -1$) die quadratische Form $\bar Q$ auf (3) $\Phi^{(1)} = 0$ *negativ* definiert. Der Beweis von Protter in [8] ist somit auf diese Weise nicht durchführbar.

Hierzu beachte auch die Bemerkung von Karatoprakliev in [6], in der Fußnote auf S. 1598, daß der Beweis in [8] fehlerhaft sei.

3° Wird wie unter 2° Φ entsprechend (37) gewählt, $\mu|_{\Phi(1)} \geqslant 0$ gefordert, so sind die Forderungen (36) auf $\Phi^{(1)} = 0$ erfüllt. Man hat dann jedoch zur Erfüllung von (35) $\mu(x_j)$ in G_2 derart festzusetzen, daß $\mu(x_j)$ für $x_3 \to 0-$ unendlich wird. Zur Herleitung von Eindeutigkeitssätzen für quasi-reguläre Lösungen des Problems II sind Zusatzforderungen an u und u_{x_3} für $x_3 \to 0\pm$ zu stellen, damit die Integrale in (12) existieren.

Eindeutigkeitsaussagen für das Frankl–Morawetz Problem sollen in einer anschließenden Arbeit angegeben werden.

Literatur

[1] A. V. Bicadze, *Mixed type equations in three-dimensional regions*, Soviet Math. Doklady 3 (1962), S. 510–512. Übersetzung von Doklady Akad. Nauk SSSR 143 (1962), S. 1017–1019.

[2] V. P. Didenko, *Über einige Randwertprobleme für eine mehrdimensionale Gleichung gemischten Typs* (Russisch), Differencial'nye Uravnenija 9 (1973), S. 172–174.

[3] W. Haack und W. Wendland, *Über Partielle und Pfaffsche Differentialgleichungen*, Birkhäuser Basel u. Stuttgart 1969.

[4] G. D. Karatoprakliev, *Über einige Randwertprobleme für eine Gleichung gemischten Typs in mehrdimensionalen Gebieten* (Russisch), C. R. Acad. Bulgare Sci. 23 (1970), S. 1183–1186.

[5] — *Equations of a mixed type in multidimensional regions and positiv symmetric systems* (Russisch), ibidem 24 (1971), S. 995–998.

[6] — *On some equations of a mixed type in multidimensional regions* (Russisch), ibidem 24 (1971), S. 1597–1600.

[7] C. S. Morawetz, *A uniqueness theorem for Frankls problem*, Comm. Pure Appl. Math. 7 (1954), S. 697–703.

[8] M. H. Protter, *New boundary value problems for the wave equations and equations of mixed type*, J. Rat. Mech. Anal. 3, No 4 (1954), S. 435–446.

[9] M. Schneider, *Über die Eindeutigkeit von Randwertproblemen für partielle Differentialgleichungen vom hyperbolischen und gemischt elliptisch-hyperbolischen Typ*, Meth. u. Verf. der math. Physik, H. B. I. Bd. 7 (1972), S. 63–77.

[10] — *Über Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom gemischten Typ im R^3*, Math. Nach. 66 (1975), S. 57–66.

[11] N. G. Sorokina, *Energetische Relationen für mehrdimensionale Gleichungen gemischten Typs* (Russisch), Differencial'nye Uravnenija 9 (1973), S. 158–161.

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN
FACHBEREICH 3 — MATHEMATIK, BERLIN

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1974