ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Sur l'allure asymptotique des solutions d'une équation différentielle à paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Dans la présente note nous allons démontrer un théorème sur l'évaluation des solutions de l'équation

$$x'(t) = F\big(t, x(t), x(t-\Delta(t))\big) \tag{1}$$

par les solutions des équations différentielles sans retard

$$x' = F\big(t, x, u(t)\big), \tag{2}$$

où la fonction $u(t)$ est convenablement choisie. L'application des théorèmes 1 et 2 (sur l'évaluation) permet d'obtenir certaines informations sur la croissance ou la stabilité des solutions de l'équation (1). Il est facile de vérifier que la méthode basée sur le théorème 1 peut aussi être appliquée dans plusieurs autres problèmes concernant l'allure des solutions de l'équation (1).

§ 1. Envisageons une équation différentielle à paramètre retardé

$$x'(t) = F\big(t, x(t), x(t-\Delta(t))\big), \tag{1.1}$$

où les fonctions $F(t, x, y)$ et $\Delta(t)$ satisfont aux hypothèses suivantes:

Hypothèses A. A_1. *La fonction $\psi(t) = t-\Delta(t)$ est continue et croissante pour $t \geqslant 0$, $\Delta(t) \geqslant 0$ pour $t \geqslant 0$;*

A_2. *$\psi(t) \geqslant 0$ pour t suffisamment grand.*

Hypothèses B: *La fonction $F(t, x, y)$ est de classe C^2,*

$$F_y(t, x, y) > 0 \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0,\ x, y \ \textit{quelconques}, \tag{1.2}$$

$$\lim_{y\to-\infty} F(t, x, y) = -\infty, \qquad \lim_{y\to+\infty} F(t, x, y) = +\infty, \tag{1.3}$$

$$y[F_y(t, x, y)F(t, y, y)+F_t(t, x, y)] < 0 \quad \textit{pour} \quad 0 < x/y \leqslant 1, \tag{1.4}$$

$$yF_t(t, x, y) < 0 \quad \textit{pour} \quad 0 < x/y \leqslant 1. \tag{1.5}$$

Introduisons les notations suivantes:

1° γ est un nombre non négatif tel que

$$\gamma - \Delta(\gamma) = 0, \quad \gamma \geqslant 0,$$

2° $g(t, x, y)$ est une fonction de classe C^2 telle que,

$$F\big(t, x, g(t, x, u)\big) \equiv u \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0, x, u \text{ quelconque}. \tag{1.6}$$

(L'existence d'une telle fonction $g(t, x, u)$ résulte des hypothèses (1.2) et (1.3)).

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* A *et* B *il existe pour chaque fonction $\varphi(t)$ continue dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant \gamma$ un couple de fonctions $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t)\}$ (de classe C^1) tel que les solutions $y_i(t)$ des équations*

$$\frac{dy_i}{dx} = F\big(t, y_i, \sigma_i(t)\big) \quad \textit{pour} \quad i = 1, 2, \tag{1.7$_i$}$$

pour lesquelles

$$y_1(0) \geqslant \varphi(t) \geqslant y_2(0) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \gamma \tag{1.8}$$

satisfont à l'inégalité

$$y_1(t) > x(t) > y_2(t), \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t < +\infty, \tag{1.9}$$

où $x(t)$ est la solution de l'équation (1.1) *avec la condition*

$$x\big(t - \Delta(t)\big) = \varphi(t) \quad \textit{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \gamma. \tag{1.10}$$

Le couple de fonctions $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t)\}$ en question peut être défini par les relations suivantes:

$$\sigma_i(t) = g(t, x_i, r_i), \quad i = 1, 2, \; 0 \leqslant t < +\infty, \tag{1.11}$$

où

$$x_1 = \max_{0 \leqslant t \leqslant \gamma} |\varphi(t)|, \quad x_2 = -x_1, \tag{1.12}$$

r_1 étant un nombre positif tel que

$$g(0, x_1, r_1) > x_1, \quad r_1 > 0 \tag{1.13}$$

et r_2 un nombre négatif tel que

$$g(0, x_2, r_2) \leqslant x_2, \quad r_2 > 0. \tag{1.14}$$

§ 2. Démonstration. La fonction $x(t)$ étant une solution de l'équation (1), on a

$$x'(t) = F\Big(t, x(t), x\big(t - \Delta(t)\big)\Big), \tag{2.1}$$

d'où en vertu de (1.10) on obtient dans l'intervalle $[0, \gamma]$

$$x'(t) = F\big(t, x(t), \varphi(t)\big) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \gamma.$$

En vertu de (1.2) la fonction $F(t, x, y)$ est strictement croissante par rapport à y et par suite il suffit (pour obtenir l'inégalité (1.9) dans l'intervalle $[0, \gamma]$) de prouver que

$$\sigma_1(t) > x_1 \geqslant \varphi(t) \geqslant x_2 > \sigma_2(t) \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant t \leqslant \gamma. \tag{2.2}$$

On a

$$\sigma_i^2(0) = g^2(0, x_i, r_i) \geqslant x_i^2, \tag{2.3}$$

et, par conséquent, il suffit de prouver que $\sigma_i^2(t)$ est croissante. Envisageons donc la dérivée de $\sigma_i^2(t)$

$$\frac{d}{dt}\sigma_i^2(t) = 2\sigma_i(t)\sigma_i'(t) = 2\sigma_i(t)g_t(t, x_i, r_i).$$

En vertu de (1.6) on a

$$g_t(t, x_i, r_i) = \frac{-F_t\big(t, x_i, g(t, x_i, r_i)\big)}{F_y\big(t, x_i, g(t, x_i, r_i)\big)},$$

d'où en vertu de (1.11) on obtient

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{d}{dt}\sigma_i^2(t) = \frac{-\sigma_i(t)F_t\big(t, x_i, \sigma_i(t)\big)}{F_y\big(t, x_i, g(t, x_i, \sigma_i(t)\big)}.$$

De l'hypothèse (1.2) et (1.5) il résulte que

$$\frac{d}{dt}\sigma_i^2(t) > 0 \quad \text{pour chaque } t \geqslant 0 \text{ tel que } 0 < \frac{x_i}{\sigma_i(t)} \leqslant 1, \tag{2.4}$$

d'où en vertu de (2.3) on déduit que $\sigma_i^2(t)$ est croissante pour $t \geqslant 0$ et par suite on obtient l'inégalité

$$\sigma_i^2(t) > x_i^2 \quad \text{pour} \quad t > 0, \tag{2.5}$$

et l'inégalité (2.2) et (1.9) dans l'intervalle $[0, \gamma]$. La croissance de $\sigma_i^2(t)$ n'est pas suffisante pour l'inégalité (1.9) dans un intervalle plus large que $[0, \gamma]$. Supposons que les inégalités (1.9) sont satisfaites dans un intervalle $[0, a)$ où $a \geqslant \gamma$; $\Delta(a)$ étant non négatif on obtient pour $t = a$

$$\begin{aligned} F\big(a, x(a), y_2(a-\Delta(a))\big) &\leqslant x'(a) \\ &= F\big(a, x(a), x(a-\Delta(a))\big) \leqslant F\big(a, x(a), y_1(a-\Delta(a))\big) \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\sigma_i^2(t)$ étant croissante dans tout l'intervalle $[0, \infty)$ il suffit de prouver que $y_1(t) < \sigma_1(t)$ et $\sigma_2(t) < y_2(t)$ pour $0 \leqslant t$, c'est-à-dire que

$$\frac{y_i(t)}{\sigma_i(t)} < 1 \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0,\ i = 1, 2. \tag{2.7}$$

En vertu de (1.8), (1.12), et (1.14) l'inégalité est satisfaite pour $t=0$

$$\frac{y_i(0)}{\sigma_i(0)}=\frac{y_i(0)}{g(0,x_i,r_i)}\leqslant\frac{x_i}{x_i}=1\,.$$

Envisageons la fonction $V_i(t,y)$:

$$V_i(t,y)=\frac{y}{\sigma_i(t)}\,.$$

On a

$$V_i\big(0,y_i(0)\big)=\frac{y_i(0)}{\sigma_i(0)}\leqslant 1\,. \tag{2.9}$$

Nous allons calculer la dérivée complète de la fonction $V_i(t,y)$ ainsi définie par rapport à l'équation (1.7_i), c'est-à-dire le long des intégrales de l'équation (1.7_i)

$$\frac{d}{dt}[V_i(t,y]_{(1.7_i)}=\frac{y'\sigma_i-y\sigma_i'(t)}{\sigma_i^2}=\frac{F(t,y,\sigma_i)\,\sigma_i+y\dfrac{F_t\big(t,x_i,\sigma_i(t)\big)}{F_y\big(t,x_i,\sigma_i(t)\big)}}{\sigma_i^2(t)}$$

$$=\frac{1}{\sigma_i^2(t)F_y\big(t,x_i,\sigma_i(t)\big)}\Big\{\sigma_i(t)F\big(t,y,\sigma_i(t)\big)F_y\big(t,x_i,\sigma_i(t)\big)+yF_t\big(t,x_i,\sigma_i(t)\big)\Big\}$$

en chaque point (t,y) où $y=\sigma_i(t)$ on a donc

$$\frac{d}{dt}[V_i(t,y]_{(1.7_i)}=\frac{1}{\sigma_i^2(t)F_y}\,\sigma_i(t)\{F(t,\sigma_i,\sigma_i)F_y(t,x_i,\sigma_i)+F_t(t,x_i,\sigma_i)\}\,,$$

d'où, en vertu de (1.2), (1.4) et (2.5), on obtient l'inégalité

$$\frac{d}{dt}[V_i(t,y)]_{(1.7_i)}<0\,,$$

en tout point (t,y) tel que $y=\sigma_i(t)$. En vertu de (2.9) on a donc

$$V_i\big(t,y_i(t)\big)<V_i\big(0,y_i(0)\big)<1\qquad\text{pour}\qquad t\geqslant 0,\ i=1,2$$

et par suite on a (2.7), d'où en vertu de (2.6) on obtient (1.9) pour $0\leqslant t<+\infty$.

§ 3. Remarque 1. De la démonstration du théorème 1 il est évident qu'il suffit de supposer l'existence d'une constante positive R telle que (1.4) et (1.5) sont satisfaites pour $|y|>R$.

Remarque 2. On vérifie facilement que sans l'hypothèse A_2 on obtient pour chaque φ borné un résultat analogue à théorème 1. Dans le cas où il n'existe pas de $\gamma\geqslant 0$ fini tel que $\gamma-\Delta(\gamma)=0$, toute la démonstration se réduit à la première partie de la démonstration donnée au § 2, c'est-à-dire on a toujours

$$F\Big(t,x(t),x\big(t-\Delta(t)\big)\Big)=F\big(t,x(t),\varphi(t)\big)\qquad\text{pour}\qquad 0\leqslant t<+\infty\,.$$

§ 4. THÉORÈME 2. *Désignons par* $z_i(t, x)$ *les fonctions suivantes*:

$$z_i(t, x) = F\big(t, x, \sigma_i(t)\big), \quad i = 1, 2, \ t \geqslant 0. \tag{4.1}$$

Les hypothèses A *et* B *étant admises, les fonctions ainsi définies satisfont aux conditions*

$$z_i(t, x) = F\Big(t, x, g\big(t, x, z_i(t, x)\big)\Big), \quad i = 1, 2, \tag{4.2}$$

$$z_i(t, x_i) = r_i \quad \textit{pour} \quad t \geqslant 0, \ i = 1, 2. \tag{4.3}$$

Démonstration. L'identité (4.2) et (4.3) résulte immédiatement de la définition (4.1), (1.11) et (1.6). Le théorème 2 est ainsi démontré.

De la relation (4.1), (4.2) et (4.11) il vient que $\sigma_i(t) \equiv g\big(t, x, z_i(t, x)\big)$ et par suite la fonction $g\big(t, x, z_r(t, x)\big)$ ne depend pas de la variable x.

§ 5. Application des théorèmes 1 et 2. Dans la suite nous allons montrer quelques applications des théorèmes 1 et 2 dans le cas où on a donné quelques évaluations spéciales de la dérivée $F_x(t, x, y)$. Introduisons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES D. *Il existe deux fonctions* $p(u)$ *et* $q(u)$ *continues telles que*

$$p\big(F(t, x, y)\big) < F_x(t, x, y) < q\big(F(t, x, y)\big) \quad \textit{pour} \quad 0 < x/y \leqslant 1. \tag{5.1}$$

Désignons par $U(x; x_0, z_0)$ la solution de l'équation

$$U' = q(U) \tag{5.2}$$

telle que

$$U(x_0; x_0, z_0) = z_0,$$

c'est-à-dire de l'équation

$$\int_{z_0}^{U(x;x_0,z_0)} \frac{ds}{q(s)} = x - x_0. \tag{5.3}$$

D'une façon analogue désignons par $v(x; x_0, z_0)$ la solution de l'équation

$$v' = p(v) \tag{5.4}$$

telle que

$$v(x_0; x_0, z_0) = z_0,$$

c'est-à-dire la solution de l'équation

$$\int_{z_0}^{v(x;x_0,z_0)} \frac{ds}{p(s)} = x - x_0. \tag{5.5}$$

Posons par définition

$$(5.6)\qquad f_1(x;\, x_0, z_0) = \begin{cases} U(x;\, x_0, z_0) & \text{pour} \quad x \geqslant x_0\,, \\ v(x;\, x_0, z_0) & \text{pour} \quad x \leqslant x_0 \end{cases}$$

et

$$(5.7)\qquad f_2(x;\, x_r, z_0) = \begin{cases} v(x;\, x_0, z_0) & \text{pour} \quad x \geqslant x_0\,, \\ U(x;\, x_0, z_0) & \text{pour} \quad x \leqslant x_0\,. \end{cases}$$

THÉOREMÈ 3. *Dans les hypothèses* A, B *et* D *la solution de l'équation* (1) $x(t)$ *peut être évaluée par les solutions* $w_i(t)$ *des équations*

$$(5.8)\qquad \begin{aligned} w_i' &= f_i(w_i;\, x_i, r_i)\,, \qquad & i &= 1, 2\,, \\ w_i(0) &= y_i(0)\,, & i &= 1, 2\,. \end{aligned}$$

Démonstration. En vertu du théorème 1 on a

$$y_2(t) < x(t) < y_1(t) \qquad \text{pour} \qquad t > 0\,.$$

Du théorème 2 résulte que les fonctions $y_i(t)$ satisfont aux équations

$$y_i' = z_i(t, y_i)\,, \qquad i = 1, 2$$

où les fonctions $z_i(t, y)$ sont des solutions de l'équation (4.2) avec la condition (4.3); en vertu de (5.1) on obtient de là

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} z_i(t, x) &= F_x\big(t, x, g\big(t, x, z_i(t, x)\big)\big) < q\Big(F\big(t, x, g\big(t, x, y, z_i(t, x)\big)\big)\Big) \\ &= q\big(z_i(t, x)\big)\,, \qquad i = 1, 2\,. \end{aligned}$$

D'une façon analogue on obtient

$$\frac{\partial}{\partial x} z_i(t, x) > p\big(z_i(t, x)\big)$$

et par suite

$$z_1(t, x) < f_1(x;\, x_1, r_1) \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que } f_1 \text{ est défini,}$$

et

$$z_2(t, x) > f_2(x;\, x_2, r_2) \qquad \text{pour tout } x \text{ tel que } f_2 \text{ est défini,}$$

d'où en vertu de (5.5) on obtient

$$w_2(t) < y_2(t) < x(t) < y_1(t) < w_1(t)\,.$$

§ 6. Remarque. Il est évident que dans le théorème 3 on peut remplacer l'inégalité (5.1) par une inégalité de la forme

$$(6.1)\qquad h\big(x, F(t, x, y)\big) < F_x(t, x, y) < H\big(x, F(t, x, y)\big)$$

et les équations (5.2) et (5.4) respectivement par les équations

$$(6.2)\qquad U' = H(x, U)\,,$$

$$(6.3)\qquad v' = h(x, v)\,.$$

Les inégalités obtenues sont valables dans tout intervalle dans lequel les fonctions $w_i(t)$ sont définies.

§ 7. Applications des théorèmes 1, 2 et 3 à l'étude de l'allure asymptotique des solutions de l'équation (1). En vertu du théorème 1 la connaissance de l'allure des intégrales de l'équation (1.7_i) pour $\sigma_1(t) > y > \sigma_2(t)$, $t \geqslant 0$ permet d'obtenir certaines informations sur l'allure des intégrales de l'équation (1), lorsque $t \to \infty$.

Par exemple: Soit $a(t) > 0$ pour $t \geqslant 0$. Alors:

1) Supposons que $y_i(t) = O\big(a(t)\big)$. De l'inégalité (1.9) on obtient

$$x(t) = O\big(a(t)\big) .$$

2) Supposons que $y_i(t) = o\big(a(t)\big)$. En vertu de (1.9) on a

$$x(t) = o\big(a(t)\big) .$$

3) Supposons qu'il existe une suite $\{t_v\}$, $t_v \geqslant 0$, $t_v \to +\infty$ telle que

$$y_1(t_v) = 0$$

et une suite $\{\bar{t}_v\}$, $\bar{t}_v > 0$, $\bar{t}_v \to \infty$ telle que

$$y_2(\bar{t}_v) = 0 .$$

En vertu de (1.9) on vérifie facilement qu'il existe une suite $\{\tau_v\}$, $\tau_v > 0$, $\tau_v \to \infty$ telle que

$$x(\tau_v) = 0 .$$

4) Supposons que la fonction $y \equiv 0$ soit une solution stable au sens de Liapunov ([1]) pour les équations (1.7_i) pour une certaine fonction $\{\sigma_1(t), \sigma_2(t)\}$ avec $x_i = \mathring{x}_i$, $r_i = \mathring{r}_i$. En s'appuyant sur le théorème 1 on vérifie que $y \equiv 0$ est une solution stable aussi pour l'équation (1).

En vertu des théorèmes 2 et 3 il suffit de choisir convenablement les fonctions $p(u)$ et $q(u)$ pour obtenir 1), 2), 3) ou 4).

Travaux cités

[1] Л. Э. Эльсгольц (L. E. Elsgolc), *Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений,* Успехи Математычеcких Наук 9 (4) (62) (1954), p. 98-112.

Reçu par la Rédaction le 4. 7. 1963