ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1970)

Краевые задачи для систем линейных многомерных разностных уравнений

Зенон Шода (Варшава)

Темой работы являются проблемы существования и единственности решений краевых задач для систем линейных многомерных разностных уравнений. В работе ставится краевые разностные задачи, даётся конструкция сопряженных краевых задач и употребляя понятие сопряженных краевых задач даётся необходимое условие разрешимости рассматриваемых задач. Дальше приводится формулировка и доказательство достаточного условия разрешимости. В последней части этой работы формулируется теорема единственности решения краевой задачи и приводится её доказательство.

1. Определения. Пусть множество

$$D = \{X\colon\ X = (x^1, \ldots, x^n)\,,\ a^j \leqslant x^j \leqslant b^j \text{ для } j = 1, \ldots, n\}$$

принадлежит n-мерному вещественному пространству R_n и пусть будет дано n-мерное множество

$$\mathfrak{M} = \{k\colon\ k = (k_1, \ldots, k_n)\,,\ k_j = 0, 1, \ldots, N_j \text{ для } j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Вводя обозначения $X_0 = (a^1, \ldots, a^n)$, $h_j = (b^j - a^j)/N_j$ для $j = 1, \ldots, n$, e_j n-мерный вектор с j-той координатой равной 1, а остальными равными 0, определим множество

$$D_h = \{X_k\colon\ X = X_k \in D,\, X_{k+e_j} - X_k = e_j h_j,\, k,\, k+e_j \in \mathfrak{M} \quad \text{для } j = 1, \ldots, n\}$$

и множество граничных точек множества D_h

$$\Gamma_h = \{X_k\colon\ X_k \in D_h,\ k_j = 0 \text{ либо } k_j = N_j \text{ для } j = 1, \ldots, n\}\,.$$

Пусть дальше

$$u_k = u(X_k) = \begin{vmatrix} u_k^1 \\ \vdots \\ u_k^p \end{vmatrix}$$

где u_k^i (для $i = 1, \ldots, p$) принимают вещественные значения в каждой точке $X_k \in D_h$.

Пусть $\pi(D_h)$ обозначает унитарное пространство функции u_k определенных в множестве D_h со скалярным произведением

$$(1.1)\qquad (v, u)_{\mathfrak{M}} = H \sum_{k \in \mathfrak{M}} v_k^* u_k\,, \qquad v_k, u_k \in \pi(D_h)\,,$$

$$H = h_1 \dots h_n\,, \qquad v_k^* = (v_k^1, \dots, v_k^p)\,.$$

В пространстве функции $\pi(D_h)$ определим следующий линейный разностный оператор

$$(1.2)\qquad Au_k = \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathfrak{N}} D_\beta^\alpha A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'} D_{\beta'}^{\alpha'} u_k\,,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta' = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha' = (\alpha_1', \dots, \alpha_n')$, $\beta' = (\beta_1', \dots, \beta_n')$, коэффициенты $\alpha_j \beta_j \alpha_j', \beta_j'$ принимают целые неотрицательные значения для $j = 1, \dots, n$.

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \alpha', \beta, \beta' \colon \alpha + \alpha' + \beta + \beta' = \gamma\,,\ \alpha + \beta - \alpha' - \beta' = \bar{\gamma}\,,$$
$$\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)\,,\ \bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \dots, \bar{\gamma}_n)\,,\ 0 \leqslant \gamma_j \leqslant 2q_j\,,\ 0 \leqslant \bar{\gamma}_j \leqslant 1\}\,,$$

q_j — фиксированное натуральное число для $j = 1, \dots, n$, $A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'}$ — квадратные матрицы порядка p, столбцы которых принадлежат $\pi(D_h)$,

$$D_\beta^\alpha = D_{\beta_1}^{\alpha_1} \dots D_{\beta_n}^{\alpha_n}\,, \qquad D_{\beta_j}^{\alpha_j} = \Delta_j^{\alpha_j} \nabla_j^{\beta_j} \quad \text{для } j = 1, \dots, n\,,$$

$$\Delta_j u_k = \frac{1}{h_j}(u_{k+e_j} - u_k)\,, \qquad \nabla_j u_k = \frac{1}{h_j}(u_k - u_{k-e_j})\,.$$

Будем предполагать, что существуют такие $A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'} \neq \theta$ (для $X_k \in D_h$), для которых существует система векторов $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ таких что $\gamma_j = 2q_j$ для $j = 1, \dots, n$. Здесь θ — нулевая матрица порядка p.

Число $2q_j$ будем называть *порядком* разностного оператора A по j-той переменной, а число $2q = 2\max\limits_j q_j$ *максимальным порядком*.

Оператор A определён в точке $X_k \in D_h$ если в этой точке определена функция Au_k, для $u_k \in \pi(D_h)$.

Точку $X_k \in D_h$, в которой определён оператор A будем называть *узлом* оператора A в множестве D_h.

Множество всех узлов оператора A в множестве D_h будем обозначать D_A. Из определения оператора следует, что $Au_k \in \pi(D_A)$.

Пусть $\pi_0(D_h)$ будет пространством функций u_k определенных в множестве D_h и принимающих нулевое значение в точках множества $D_h - D_A$.

Определение. *Сопряженным оператором к оператору* A будем называть такой оператор A^*, который удовлетворяет

$$(v, Au)_{\mathfrak{M}_A} = (A^* v, u)_{\mathfrak{M}_A} \qquad \text{для } v_k, u_k \in \pi_0(D_h)\,,$$

здесь множество $\mathfrak{M}_A = \{k \colon X_k \in D_A\}$.

Лемма. *Существует единственный оператор A^* сопряженный к A. Оператор A^* имеет вид*

$$A^* = \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta' \in \mathfrak{N}} (-1)^{|\alpha+\beta+\alpha'+\beta'|} D_{\alpha'}^{\beta'} (A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'})^* D_\alpha^\beta \,, \tag{1.3}$$

где $(A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'})^*$ — *транспонированная матрица* $A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'}$,

$$|\alpha+\beta+\alpha'+\beta'| =$$
$$= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n + \alpha_1' + \ldots + \alpha_n' + \beta_1' + \ldots + \beta_n' \,.$$

Доказательство леммы простое и оно проводится с использованием следующей формулы суммирования по частям:

$$h \sum_{i=0}^{N-1} U_i^* \Delta V_i = -h \sum_{i=1}^{N} V_i^* \nabla U_i + U_N^* V_N - U_0^* V_0 \,.$$

Приведена формула относится к одной переменной.

Пусть

$$H' = \begin{cases} h_1 \ldots h_{j-1} h_{j+1} \ldots h_n & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h, \text{ для которых } k_j = 0 \,, \\ -h_1 \ldots h_{j-1} h_{j+1} \ldots h_n & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h, \text{ для которых } k_j = N_j \,, \end{cases}$$

и $\mathfrak{M}_0 = \{k\colon X_k \in \Gamma_h\}$.

Пользуясь введенными обозначениями можем для произвольных функций v_k, $u_k \in \pi(D_h)$ написать следующее соотношение:

$$(v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^* v, u)_{\mathfrak{M}_A} = H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} \Phi(v_k, u_k) \,. \tag{1.4}$$

Определим ещё псевдонормальный разностный граничный оператор в каждой точке $X_k \in \Gamma_h$

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j(X_k) \delta_j^+ + \beta_j(X_k) \delta_j^-] \,,$$

где

$$\delta_j^+ = \begin{pmatrix} E \\ E\Delta_j \\ \vdots \\ E\Delta_j^{q_j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \delta_j^- = \begin{pmatrix} E \\ E\nabla_j \\ \vdots \\ E\nabla_j^{q_j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

E — единичная матрица порядка p. δ_j^+, δ_j^- являются матричными разностными операторами имеющими p столбцов и pq строк.

$$\alpha_j(X_k) = \begin{cases} 1 & \text{для } X_k \in \Gamma_h, \text{ для которых } k_j = 0\,, \\ 0 & \text{для остальных } X_k \in \Gamma_h; \end{cases}$$

$$\beta_j(X_k) = \begin{cases} 1 & \text{для } X_k \in \Gamma_h, \text{ для которых } k_j = N_j\,, \\ 0 & \text{для остальных } X_k \in \Gamma_h\,. \end{cases}$$

Теперь (1.4) запишем в следующей форме

$$(1.5) \qquad (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} (\delta u_k^* R_1 \delta v_k - \delta v_k^* R_2 \delta u_k) = \\ = (\delta u, R_1 \delta v)_{\mathfrak{M}_0} - (R_2 \delta u, \delta v)_{\mathfrak{M}_0}\,,$$

R_1, R_2 — разностные операторы определенные в точках множества Γ_h.

2. Разностная краевая задача. Пусть пространства $\pi_F = \pi(D_A)$, $\pi_\Phi = \pi(\Gamma_h)$, $\pi_U = \pi(D_h)$ и пусть будут данные $F_k \in \pi_F$, $\Phi_k \in \pi_\Phi$, где

$$F_k = \begin{pmatrix} f_k^1 \\ \vdots \\ f_k^p \end{pmatrix}, \qquad \Phi_k = \begin{pmatrix} \varphi_k^1 \\ \vdots \\ \varphi_k^{pq} \end{pmatrix}.$$

Формулировка краевой задачи. Надо найти вектор $u_k \in \pi_U$ удовлетворяющий системе разностных уравнений

$$(2.1) \qquad Au_k = F_k \quad \text{для } X_k \in D_h$$

и граничным условиям

$$(2.2) \qquad B\delta u_k = \Phi_k \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h\,,$$

где B — разностный матричный оператор порядка pq определён в точках множества Γ_h.

3. Сопряженная разностная краевая задача. Сопряженной разностной краевой задачей к задачи (2.1), (2.2) будем называть задачу

$$(3.1) \qquad A^*v_k = 0 \quad \text{для } X_k \in D_A\,,$$

$$(3.2) \qquad B^*\delta v_k = 0 \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h\,,$$

где оператор B^* удовлетворяет соотношению

$$(3.3) \qquad (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = (B^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0}$$

для всех $u_k, v_k \in \pi(D_h)$.

Теорема 1. *Если в задаче* (2.1), (2.2) *оператор* $B = B_s + R_2$, *где* B_s *определён в* Γ_h *и такой, что существует* B_s^*, *т. е.* $(\varphi, B_s\psi)_{\mathfrak{M}_0} = (B_s^*\varphi, \psi)_{\mathfrak{M}_0}$ *для произвольных* φ_k, $\psi_k \in \pi_\Phi$, *то*

$$B^* = B_s^* + R_1 .$$

Доказательство. Умножая

$$B\delta u_k = (B_s + R_2)\delta u_k$$

на δv_k и вычитывая $\delta v_k^* R_2 \delta u_k$ получаем

$$\delta v_k^* R_2 \delta u_k = \delta v_k^* B \delta u_k - \delta v_k^* B_s \delta u_k .$$

Подставляя последнее равенство в (1.5) получаем соотношение

$$(v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = (R_1\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} + (\delta v, B_s\delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0} .$$

Проводя суммирование по частям и используя существование оператора B_s^* получаем

$$(v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = \big((B_s^* + R_1)\delta_k, \delta u\big)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0} .$$

А это означает, что

$$B^* = B_s^* + R_1 .$$

Теорема 2. *Если задача* (2.1), (2.2) *удовлетворяет предположениям теоремы* 1, *то*

$$A^{**} = A , \quad B^{**} = B .$$

Доказательство. Равенство $A^{**} = A$ непосредственно следует из леммы. Используя равенство $A^{**} = A$ и формулу (1.5) получаем

$$\begin{aligned}(3.4) \qquad (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} - (v, A^{**}u)_{\mathfrak{M}_A} &= (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} - (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} = \\ &= (\delta v, R_2\delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (R_1\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} .\end{aligned}$$

Вычисляя $R_1\delta v_k$ с $B^*\delta v_k = (B_s^* + R_1)\delta v_k$ и подставляя в (3.4) получаем

$$(A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} - (v, A^{**}u)_{\mathfrak{M}_A} = (\delta v, R_2\delta u)_{\mathfrak{M}_0} + (B_s^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (B^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} .$$

Проводя в последнем соотношении суммирование по частям и используя существование оператора B_s^*, а затем и существование оператора $B_s^{**} = B_s$ получаем

$$\begin{aligned}(3.5) \qquad (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} - (v, A^{**}u)_{\mathfrak{M}_A} &= \\ &= (\delta v, R_2\delta u)_{\mathfrak{M}_0} + (\delta v, B_s u)_{\mathfrak{M}_0} - (B^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} .\end{aligned}$$

Из этого соотношения получаем

$$B^{**} = B_s + R_2 .$$

4. Существование решений разностных краевых задач. Соотношение (3.5) можно написать в следующим виде

(4.1) $$(v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = (B^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0}.$$

Пусть теперь u_k будет решением краевой задачи (2.1), (2.2) и v_k решением сопряженной задачи (3.1), (3.2); тогда (4.1) принимает следующий вид

(4.2) $$(v, F)_{\mathfrak{M}_A} + (\delta v, \Phi)_{\mathfrak{M}_0} = 0$$

Теорема 3. *Необходимым условием существования решения краевой задачи* (2.1), (2.2) *удовлетворяющей условиям теоремы* 1 *является выполнение соотношения* (4.2) *для всякого решения* v_k *сопряженной краевой задачи* (3.1), (3.2).

Доказательство. Доказательство теоремы очевидно и получаем его непосредственным образом из (4.1).

Замечание. Если краевые условия (2.1) даны в виде $B\delta u_k = \delta u_k = \Phi_k$ для $X_k \in \Gamma_h$, то невозможно применить теорему 3 и в таком случае нада привести другую формулировку необходимого условия разрешимости. Пользуясь формулой суммирования по частям переобразуем соотношение (1.5) так, чтобы из $(\delta u, R_1\delta v)_{\mathfrak{M}_0}$ невозможно было вычислить часть типа $(R_2\delta u, \delta v)_{\mathfrak{M}_0}$.

Такое представление R_1 и R_2 является единственное. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему:

Теорема 4. *Необходимым условием существования решений краевой задачи* (2.1), (2.2) *для* $B\delta u_k = \delta u_k$ *является равенство*

(4.3) $$(v, F)_{\mathfrak{M}_A} - (R_1\delta v, \Phi)_{\mathfrak{M}_0} = 0,$$

которое должно быть выполнено для любого решения следующей краевой задачи:

(4.4) $$A^*v_k = 0 \quad \text{для } X_k \in D_A,$$

(4.5) $$\delta v_k = 0 \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h.$$

Доказательство. Пусть u_k будет решением задачи (2.1), (2.2) для $B\delta u_k = \delta u_k$ и v_k решением задачи (4.4), (4.5). Подставляя u_k, v_k в равенство (1.5) получаем доказательство теоремы.

Теорема 5. *Необходимое условие существования решения задачи* (2.1), (2.2) *является достаточным если*

$$l_A + l_B \leqslant p \prod_{j=1}^{n} (1 + N_j),$$

где l_A *число алгебраических уравнений отвечающих разностному уравнению* (2.1), l_B *число алгебраических уравнений отвечающих краевым условиям* (2.2).

Доказательство. Разностное уравнение (2.1) определяет в каждой точке $X_k \in D_A$ алгебраическое уравнение. Эти алгебраические уравнения расписаны для всех точек $X_k \in D_A$ составляют алгебраическую систему, которая имеет столько уравнений сколько узлов имеет оператов A в множестве D_h умноженых на число p (p — число разностных уравнений в системе (2.1)). Граничные условия (2.2) определяют тоже соответственную алгебраическую систему. Объединяя систему полученную из (2.1) с системой из (2.2) получаем систему соответствующую задачи (2.1), (2.2). Если $l_A + l_B < p \prod_{j=1}^{n} (1+N_j)$, то к этой системе присоединим тривиальные уравнения, т. е. уравнения с коэффициентами и правой частью равной 0, чтобы получить систему с квадратной матрицей. Эту матрицу обозначим $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$, а систему запишем следующим образом:

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} F \\ \Phi \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим однородную систему (4.7) сопряженную к системе (4.6)

$$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^T v = 0 . \tag{4.7}$$

Пусть Q будет векторным пространством размерности равной порядку матрицы $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$. Тогда решения системы (4.7) образут подпространство P^T пространства Q. Обозначим через $U \in Q$ вектор составленный из решения v_k задачи (3.1), (3.2) следующим образом:

$$U = \begin{pmatrix} Hv \\ H'\delta v \end{pmatrix},$$

где Hv обозначает элементы вектора v_k для $X_k \in D_A$ и умножение на H; $H'\delta v$ элементы δv_k для $X_k \in \Gamma_h$ и умножение на H'. Если к системе (4.6) присоединим тривиальные уравнения, тогда к вектору U надо присоединить элементы равны 0 в соответственных точках $X_k \in \Gamma_h$ так, чтобы получить вектор $U \in Q$. Пусть P^* обозначает подпространство пространства Q составлено из всех векторов U. Из необходимого и достаточного условия разрешимости линейной алгебраической системы (смотри [3], стр. 60) следует, что $P^* \subset P^T$. В другом случае правая сторона должна удовлетворять добавочному условию ортогональности к решению сопряженной задачи (3.1), (3.2) не принадлежащему P^T. Это следует из теоремы 3.

Теперь достаточно доказать, что

$$\dim P^* = \dim P^T .$$

Пусть P будет подпространством пространства Q составленным из всех решений алгебраической системы

$$(4.8)\qquad \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}^{TT} v = \begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix} v = 0 ,$$

а P^{*T} — подпространство пространства Q составлено из всех решений следующей системы

$$(4.9)\qquad \begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}^{T} v = 0 ,$$

где $\begin{pmatrix}A^*\\B^*\end{pmatrix}$ матрица составлена для задачи (3.1), (3.2) анологично как была составлена матрица системы (4.6). Пусть дальше P^{**} будет подпространством пространства Q составленным из всех векторов $W = \begin{pmatrix}Hw\\H'\delta w\end{pmatrix}$ соответствующих решениям задачи

$$A^{**}w_k = 0 \quad \text{для } X_k \in D_A ,$$
$$B^{**}\delta w_k = 0 \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h .$$

Из теоремы 2 следует, что $P^{**} = P$.

Дальше имеем $P^{**} \subset P^{*T}$ (по аналогичным причинам как и $P^* \subset P^T$). Суммируя сказанное, получаем

$$\dim P = \dim P^{**} \leqslant \dim P^{*T} = \dim P^* \leqslant \dim P^T = \dim P .$$

Из последнего возникает, что $\dim P^* = \dim P^T$. Учитывая факт, что $P^* \subset P^T$ получаем $P^* \equiv P^T$, а это кончает доказательство.

Теорема 6. *Необходимое условие существования решения задачи* (2.1), (2.2) *для* $B\delta u_k = \delta u_k = \Phi_k$, $X_k \in \overline{\Gamma}_h$, *где* $\overline{\Gamma}_h$ — *множество всех точек* $X_k \in \Gamma_h$, *в которых оператор* $R_1 \neq \theta$ *является достаточным.*

Доказательство. Из определения $\overline{\Gamma}_h$ видно, что к $\overline{\Gamma}_h$ принадлежат точки $X_k \in \Gamma_h$, которые оператор A связывает с точками множества $D_h - \Gamma_h$. Из этого факта следует, что матрица алгебраической системы соответствующая рассматриваемой краевой задачи будет иметь не больше строк чем столбцов. Вводя векторы:

$$V = \begin{pmatrix}Hv\\-H'R_1\delta v\end{pmatrix}, \quad \text{где } v_k \text{ — решение (4.4), (4.5)} ,$$

$$Z = \begin{pmatrix}Hz\\-H'R_1\delta z\end{pmatrix}, \quad \text{где } z_k \text{ — решение задачи}$$

$$A^{**}z_k = Az_k = 0 \quad \text{для } X_k \in D_A ,$$
$$\delta z_k = 0 \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h .$$

Мы можем провести доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 5.

5. Единственность решения разностных краевых задач. Пусть теперь задача (2.1), (2.2) удовлетворяет условиям теоремы 5.

Введём понятие эквивалентных функций в смысле некоторых функционалов. Пусть

$$W(u,u) = H \sum_{k\in\widetilde{\mathfrak{M}}_A} \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\mathfrak{N}} (-1)^{|\alpha+\beta|+q} D_\alpha^\beta u_k^* A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'} D_{\beta'}^{\alpha'} u_k , \tag{5.1}$$

$$W_S(u,u) = (-1)^q H' \sum_{k\in\mathfrak{M}_0} \delta u_k^* S \delta u_k , \tag{5.2}$$

где оператор S определён в точках множества Γ_h.

Определение. Функции v_k, $u_k \in \pi(D_h)$ *эквивалентны в смысле функционалов* $W(u,u)$, $W_S(u,u)$, если

$$W(u,u) = W(v,v) \quad \text{и} \quad W_S(u,u) = W_S(v,v) .$$

Множество всех эквивалентных между собой функций принадлежащих $\pi(D_h)$ будем называть *классом эквивалентных функций*, а пространство, элементами которого являются эти классы обозначать $\overline{\pi}(D_h)$. Дальше будем рассматривать единственность решения краевой задачи в пространстве $\overline{\pi}(D_h)$, и называть её общенной единственностью. Пусть в равенстве (3.3) $v_k = u_k$, тогда

$$(u, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*u, u)_{\mathfrak{M}_A} = (B^*\delta u, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta u, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0} . \tag{5.3}$$

Предположим, что u_k — решение задачи (2.1), (2.2), тогда равенство (5.3) можно переписать в следующей форме

$$(u, F)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*u, u)_{\mathfrak{M}_A} = (B^*\delta u, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta u, \Phi)_{\mathfrak{M}_0} .$$

Проводя в этом равенстве суммирование по частям получаем

$$\begin{aligned} H \sum_{k\in\widetilde{\mathfrak{M}}_A} \sum_{\alpha,\alpha',\beta,\beta'\in\mathfrak{N}} (-1)^{|\alpha+\beta|} D_\alpha^\beta u_k^* A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha'} D_{\beta'}^{\alpha'} u_k &= \\ &= (u, F)_{\mathfrak{M}_A} + (\delta u, \Phi)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta u, G\delta u)_{\mathfrak{M}_0} , \end{aligned} \tag{5.4}$$

где множество

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_A = \{k;\ \max_{\alpha\in\mathfrak{N}} \alpha_j \leqslant k_j \leqslant N_j - \max_{\beta\in\mathfrak{N}} \beta_j \ \text{для}\ j = 1, \ldots, n\} ,$$

а G является оператором полученным из объединения оператора B^* с оператором полученным из суммирования по частям.

Теорема 7. *Если краевая задача* (2.1), (2.2) *удовлетворяет следующим условиям*:

1. $W(u, u) \geqslant 0$ *для всех* $u_k \in \pi(D_h)$,

2. *Существует операторы* R, S *определёны в точках множества* Γ_h *для которых* $W_S(u, u) \geqslant 0$ *для всех* $u_k \in \pi(D_h)$ *и*

$$(-1)^{q+1}(\delta u, G\delta u) \leqslant (-1)^{q+1}(\delta u, RB\delta u)_{\mathfrak{M}_0} - W_S(u, u) ,$$

то эта задача однозначно разрешима в пространстве $\overline{\pi}(D_h)$.

Доказательство. Пусть v_k, u_k будут рещениями задачи (2.1), (2.2), тогда $w_k = u_k - v_k$ является решением задачи (2.1), (2.2) при $F_k \equiv 0$ и $\Phi_k \equiv 0$.

Подставляя w_k в (5.4) и используя определение функционала (5.1), соотношение (5.4) можем записать в следующей форме

$$W(w, w) = (-1)^{q+1}(\delta w, G\delta w)_{\mathfrak{M}_0} .$$

Используя условия теоремы получаем

$$W(w, w) \leqslant (-1)^{q+1}(\delta w, RB\delta w)_{\mathfrak{M}_0} - W_S(w, w) . \tag{5.5}$$

Учитывая, что $B\delta w_k = 0$, а тем самым $R(B\delta w_k) = 0$, с (5.5) получаем

$$W(w, w) + W_S(w, w) \leqslant 0 .$$

Используя предположения $W(w, w) \geqslant 0$ и $W_S(w, w) \geqslant 0$ для $u_k \in \pi(D_h)$ получаем $W(w, w) = 0$ и $W_S(w, w) = 0$, а это означает, что w_k эквивалентно нулевой функции принадлежащей пространству $\pi(D_h)$. Из определения пространства $\overline{\pi}(D_h)$ следует, что задача (2.1), (2.2) однозначна в этом пространстве.

Следствие. *Если к предположению теоремы 7 прибавить условие* $W(u, u) + W_S(u, u) > 0$ *при всех* $u_k \in \pi(D_h)$ *кроме* $u_k \equiv 0$, *то задача* (2.1), (2.2) *является однозначно разрешима в пространстве* $\pi(D_h)$.

Теорема 8. *Если в задаче* (2.1), (2.2) $B\delta u_k = \delta u_k = \Phi_k$ *для* $X_k \in \overline{\Gamma}_h$ *и* $W(u, u) \geqslant 0$ *для* $u_k \in \pi(D_h)$, *то она однозначно разрешима в пространстве* $\overline{\pi}(D_h)$.

Доказательство. Пусть u_k, v_k решения рассматриваемой задачи. Функция $w_k = u_k - v_k$ является решением однородной задачи. Очевидно, что $W_S(w, w) = 0$ независимо от оператора S. Если теперь в формуле (1.5) вместо v_k и u_k положим w_k, то

$$(A^* w, w)_{\mathfrak{M}_A} = 0 .$$

Проводя суммирование по частям и используя определение функционала $W(u, u)$, получаем следующее соотношение

$$W(w, w) = (\delta w, \overline{G}\delta w)_{\mathfrak{M}_0} ,$$

где $\bar{G}$ — оператор определён в $\pi(\bar{\Gamma}_h)$. Учитывая, что $\delta w_k = 0$ для $X_h \in \Gamma_h$, получаем $W(w, w) = 0$, т. е. w_k эквивалентно функции $\Theta \in \pi(D_h)$.

Следствие. *Если в задачи*

$$A u_k = \Phi_k \quad \text{для } X_h \in D_A\,,$$
$$\delta u_k = \Phi_h \quad \text{для } X_h \in \bar{\Gamma}_h$$

оператор A такой, что с $W(w, w) = 0$ следует $D^{\alpha}_{\beta} w_k = 0$ для $X_k \in D_A$ и $\alpha_j + \beta_j \geqslant q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то эта задача однозначно разрешима в пространстве $\pi(D_h)$.

Действительно, если с $W(w, w) = 0$ следует, что $D^{\alpha}_{\beta} w_k = 0$ для $X_k \in D_A$ и $\alpha_j + \beta_j \geqslant q_j$ $(j = 1, \ldots, n)$, то условию $W(w, w) = 0$ удовлетворяют только полиномы, порядка не больше чем $q_j - 1$ по j-той переменной, с произвольными коэффициентами. Из условия $\delta w_k = 0$ для $X_k \in \bar{\Gamma}_h$ следует, что коэффициенты этих полиномов должны быть равны 0. Получаем, что $w_k = 0$, т. е. $u_k = w_k$.

В заключению автор считает своим приятным долгом выразить благодарность доц. др Б. Лаврукy и проф. др А. Туровичу за многие и ценные советы, которые оказались очень помощные при выполнению этой работы.

Литература

[1] О. А. Ладыженская, *Метод конечных разностей в теории уравнений с частными производными*, Успехи Мат. Наук, Т. 12, вып. 5 (1957).

[2] Б. Лаврук, *Об одном методе построения сопряженных задач*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), стр. 67-91.

[3] В. А. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 3, Ч. 1, 1953.

[4] M. Schechter, *General boundary value problems for elliptic partial differential equations*, Comm. Pure and Appl. Math. 12 (1959), стр. 457-486.

Reçu par la Rédaction le 15. 10. 1968