ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Einige Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte erster Klasse

von M. KUCHARZEWSKI (Katowice)

Einleitung. Das lineare homogene geometrische Objekt erster Klasse ist durch folgende Transformationsformel

(1) $$\omega^{\alpha'} = F^{\alpha'}_{\beta}(A^{i'}_{k})\,\omega^{\beta}\,, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m$$

vollständig bestimmt. In dieser Formel sind ω^{α} bzw. $\omega^{\alpha'}$ die Komponenten des Objektes in dem ursprünglichen (ξ^{i}) bzw. neuen $(\xi^{i'})$ Koordinatensystem und $A^{i'}_{k}$ sind die ersten partiellen Ableitungen der Koordinatentransformation

$$\xi^{i'} = \varphi^{i'}(\xi^{k})\,,$$

die von den ursprünglichen zu den neuen Koordinaten führt

$$A^{i'}_{k} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^{k}}\,.$$

Dabei muß die Jacobische Determinante J der Matrix $A = \|A^{i'}_{k}\|$ von Null verschieden sein

(2) $$J = \operatorname{Det} A \neq 0\,.$$

Im weiteren werden wir die Transformationsformel (1) in der Matrizenform

(3) $$\omega' = F(A)\,\omega$$

schreiben. Um die Komponenten des geometrischen Objektes in jedem zulässigen Koordinatensystem eindeutig bestimmen zu können, muß die Matrixfunktion $F(A)$ folgende Funktionalgleichung

(4) $$F(A)F(B) = F(AB)$$

mit der Bedingung

(5) $$F(E) = e$$

erfüllen. In (4) sind A und B beliebige quadratische nichtsinguläre Matrizen der Ordnung n, F ist eine quadratische Matrixfunktion der Ordnung m, die wegen (5) auch nichtsingulär sein muß und E bzw. e ist die Einheitsmatrix der Ordnung n bzw. m.

Zu den linearen homogenen Objekte gehören unter anderen Skalare, Biskalare, gewöhnliche und Weylsche Dichten, Tensordichten beliebiger Valenz also alle so genannten Größen ([10], S. 68).

In der letzten Zeit wurden neue lineare homogene geometrische Objekte von S. Gołąb und A. Jakubowicz ([2], [3], [4], [5]) eingeführt. Ich möchte in dieser Note die linearen homogenen Objekte von einem allgemeineren Standpunkt betrachten. Diese Betrachtung läßt viele Beweise vereinfachen, Sätze verallgemeinern und auch neue Objekte solcher Art erhalten.

Die vorliegende Note besteht aus vier Paragraphen. Paragraph 1 enthält allgemeine Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte. Im § 2 wir der Begriff des Tensors auf die F-Tensoren verallgemeinert. Dann werden einige Beispiele der F-Vektoren dargestellt (§ 3) (so gennante D-Vektoren (1), S-Vektoren (1) verschiedener Art, L-Vektoren und M-vektoren) und endlich (§ 4) einige Eigenschaften dieser bewiesen.

§ 1. Allgemeine Bemerkungen über die linearen homogenen geometrischen Objekte. Wir bemerken zuerst, daß jede Funktion F, welche (4) und (5) erfüllt, ein Homomorphismus der Gruppe $\mathrm{GL}(n, R)$ in $\mathrm{GL}(m, R)$ ist und natürlich umgekehrt. Die Bestimmung aller linearen homogenen geometrischen Objekte kann also auf Bestimmung aller Homomorphismen der Gruppe $\mathrm{GL}(n, R)$ in $\mathrm{GL}(m, R)$ zurückgeführt werden.

Jetzt stelle ich einige Eigenschaften der Lösung F der Gleichung (4) mit der Bedingung (5) dar. Vorher gebe ich noch einige Bezeichnungen an. Mit $\Phi(\xi)$ werde ich die skalare Matrixfunktion einer reellen Veränderlichen ξ bezeichnen. Die skalare Matrixfunktion ist eine Diagonalmatrix, deren alle auf der Hauptdiagonale stehenden Elemente untereinander gleich sind. $\Phi(\xi)$ hat also folgende Gestalt

$$\Phi(\xi) = \begin{Vmatrix} \varphi(\xi) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \varphi(\xi) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \varphi(\xi) \end{Vmatrix}$$

Außerdem werden wir voraussetzen, daß $\Phi(\xi)$ multiplikative Funktionalgleichung

$$\Phi(\xi)\Phi(\eta) = \Phi(\xi\eta) \tag{1.1}$$

(1) D-Vektoren sind mit den von A. Jakubowicz ([5]) eingeführten Deffinoren und S-Vektoren mit den von S. Gołąb und A. Jakubowicz ([2]) eingeführten S-Affinoren identisch.

für alle reellen von Null verschiedenen Zahlen ξ, η und die Bedingung

$$\Phi(1) = e \tag{1.2}$$

erfüllt. Aus der Gestalt $\Phi(\xi)$ folgt, daß (1.1) und (1.2) mit den Bedingungen

$$\varphi(\xi)\varphi(\eta) = \varphi(\xi\eta) , \tag{1.3}$$

$$\varphi(1) = 1 \tag{1.4}$$

äquivalent sind.

Weiter werden wir mit X^{-1} bzw. X^T die zur X inverse bzw. transponierte Matrix bezeichnen.

Mit Hilfe der obigen Bezeichnungen kann man folgenden Satz angeben:

SATZ 1.1. *Ist $F(X)$ ein Homomorphismus der Gruppe* $\mathrm{GL}(n, R)$ *in* $\mathrm{GL}(m, R)$, *so kann man nachstehende Homomorphismen derselben Art bilden*

$$F_1 = [F(X^{-1})]^T, \tag{1.5}$$

$$F_2 = [F(X^T)]^T , \tag{1.6}$$

$$F_3 = F\big((X^{-1})^T\big) , \tag{1.7}$$

$$F_4 = \Phi(\Delta)F(X) , \qquad \Delta = \mathrm{Det} X , \tag{1.8}$$

$$F_5 = CF(X)C^{-1} . \tag{1.9}$$

In diesen Formeln ist C eine beliebige nichtsinguläre Matrix und Δ ist die Determinante von X.

Durch das unmittelbare Überprüfen, daß die Funktionen F_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, die Funktionalgleichung (4) und die Bedingung (5) erfüllen, kann dieser Satz bewiesen werden.

Jetzt gebe ich zwei Sätze über die Determinanten der Matrixfunktionen, die der Gleichung (4) genügen.

SATZ 1.2. *Ist F eine Lösung der Funktionalgleichung* (4), *so ist die Determinante von F nur von der Determinante Δ der Matrix X abhängig. Diese Abhängigkeit hat die Form*

$$|F(X)| = \varphi(\Delta) , \tag{1.10}$$

wo φ eine multiplikative d.h. der Gleichung (1.3) *genügende Funktion ist.*

Beweis. Da die Determinante $f(X) = |F(X)|$ der Matrix F eine skalare Funktion der Matrix ist, die wegen (4) die multiplikative Funktionalgleichung

$$f(X)f(Y) = f(XY) \tag{1.11}$$

erfüllt, folgt (1.10) unmittelbar aus dem Satz 1 der Arbeit [7].

Ist die Determinante der Matrix F gegeben, so kann man die Determinanten der Matrizen F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 leicht berechnen. Entsprechendes Ergebnis enthält folgender

SATZ 1.3. *Bezeichnen wir mit f die Determinante der Matrix F, so sind die Determinanten der Matrizen F_i, $i = 1, 2, \ldots, 5$, durch nachstehende Formeln bestimmt*

$$|F_1| = |F_3| = f^{-1}, \quad |F_2| = |F_5| = f, \quad |F_4| = \varphi^m f. \tag{1.12}$$

Dieser Satz folgt aus der Gestalt der Matrizen F_i und aus den wohlbekannten Eigenschaften der Determinanten.

Wir machen noch die Aufmerksamkeit auf folgenden Satz, der ganz analog wie in [9] (S. 32, lemma 1) bewiesen werden kann.

SATZ 1.4. *Die linearen homogenen geometrischen Objekte ω und $\underset{5}{\omega}$, die durch die Funktionen F und $\underset{5}{F}$ bestimmt sind, sind untereinander stark äquivalent. Die starke Äquivalenz erzeugt die Funktion $\underset{5}{\omega} = C\omega$.*

Der Begriff der starken Äquivalenz (strictly equivalent) ist in [8], S. 262, erklärt.

Wegen des Satzes 1.4 werden wir im weiteren die linearen homogenen geometrischen Objekte mit den Funktionen F und $\underset{5}{F}$ nicht unterscheiden.

Umgekehrt gilt folgender von S. Gołąb (vgl. [4], S. 104) herrührender Satz

SATZ 1.5. *Ist ω ein lineares homogenes geometrisches Objekt mit der Transformationsformel* (3), *so ist*

$$\sigma = C\omega, \tag{1.13}$$

wo C eine beliebige nichtsinguläre Matrix bedeutet, auch ein lineares homogenes geometrisches Objekt mit der Transformationsformel

$$\sigma' = (CFC^{-1})\sigma, \tag{1.14}$$

σ und ω sind offensichtlich stark äquivalent.

Die von A. Jakubowicz eingeführten Bevektoren (Beffinoren) [4] sind Objekte dieser Art. Sie sind nämlich aus den kontravarianten Vektoren mit Hilfe der Formel (1.13) erhalten.

Aus dem Satz 1.5 folgt nachstehender Satz noch

SATZ 1.6. *Es sei ω ein lineares homogenes geometrisches Objekt mit den Komponenten ω^a, $a = 1, 2, \ldots, m$, und mit der Transformations-*

formel (3). *Ist* ϱ_α *eine beliebige Permutation der Zahlen* $1, 2, \ldots, m$, *so ist das Objekt* σ *mit den Komponenten*

$$\sigma^\alpha = \omega^{\varrho_\alpha} \tag{1.15}$$

auch ein lineares homogenes geometrisches Objekt, dessen Transformationsformel die Form (1.14) *hat, wo* C *entsprechende nichtsinguläre Matrix bedeutet.* ω *und* σ *sind also stark äquivalent.*

Beweis. Da jede Permutation der Komponenten des Objektes ω durch das linksseitige Multiplizieren der Matrix ω mit einer nichtsingulären Matrix C ersetzt werden kann, können wir die Beziehungen (1.15) in folgender Form

$$\sigma = C\omega \tag{1.16}$$

umschreiben, wo C entsprechende nichtsinguläre Matrix ist. Mit Hilfe des Satzes 1.5 erhalten wir aus (1.16) den Satz 1.6 und der Beweis ist beendet.

§ 2. Verallgemeinerung der Tensoren. Jeder Funktion F, welche die Funktionalgleichung (4) und die Bedingung (5) erfüllt, ist ein lineares homogenes geometrisches Objekt zugeordnet, das durch die Transformationsformel (1) bzw. (3) bestimmt ist. Ist z.B. $F(X) = X$, bzw. $F(X) = (X^{-1})^T$, so erhalten wir den kontravarianten bzw. kovarianten Vektor, d.h. Tensor mit der Valenz (1.0) bzw. (0.1). Aus diesen kann man auf wohlbekannte Weise die Tensordichten beliebiger Valenz bilden. Wir können den Begriff des Vektors auf folgende Weise verallgemeinern.

DEFINITION 2.1. Das lineare homogene geometrische Objekt, das durch die Funktion F bestimmt ist, werde ich den verallgemeinerten Vektor genau *F-Vektor* nennen.

Bezeichnen wir mit $F_Q^{P'}(A)$ die Elemente der Matrix F, so kann die Transformationsformel des F-Vektors so

$$\omega^{P'} = F_Q^{P'}(A)\,\omega^Q\,, \qquad P, Q = 1, 2, \ldots, m \tag{2.1}$$

geschrieben werden. Nach dem Satz 1.1 sind fünf weitere Homomorphismen (1.5)-(1.9) mit jedem Homomorphismus F verbunden. Wir können also aus jedem F-Vektor fünf weitere lineare homogene geometrische Objekte erhalten. Da man den F_5-Vektor wegen des Satzes 1.4 weglassen kann, sind noch vier F-Vektoren aus diesen übriggeblieben. Wir werden sie entsprechend mit $\underset{1}{\omega}, \underset{2}{\omega}, \underset{3}{\omega}, \underset{4}{\omega}$ bezeichnen. Bezeichnen wir mit $G(A)$ die Matrix $F(A^T)^T$ mit den Elementen $G_Q^{P'}(A)$

$$G(A) = [F(A^T)]^T = \|G_Q^{P'}(A)\| \tag{2.2}$$

und mit $F_{Q'}^{P}(A)$ bzw. $G_{Q'}^{P}(A)$ die Elemente der zu F bzw. G inversen Matrix

$F^{-1}(A)$ bzw. $G^{-1}(A)$, so haben die Transformationsformeln dieser Objekte nachstehende Formen

$$\underset{1}{\omega}_{P'} = F^{Q}_{P'}(A)\,\underset{1}{\omega}_{Q}\,, \tag{2.3}$$

$$\underset{2}{\omega}^{P'} = G^{P'}_{Q}(A)\,\underset{2}{\omega}^{Q}\,, \tag{2.4}$$

$$\underset{3}{\omega}_{P'} = G^{Q}_{P'}(A)\,\underset{3}{\omega}_{Q}\,, \tag{2.5}$$

$$\underset{4}{\omega}^{P'} = \Phi(J)F^{P'}_{Q}(A)\,\underset{4}{\omega}^{Q}\,. \tag{2.6}$$

Um die Beziehungen der Objekte $\underset{1}{\omega}$, $\underset{2}{\omega}$, $\underset{3}{\omega}$ und $\underset{4}{\omega}$ mit der Funktion F auszudrücken, werde ich diese auf folgende Weise nennen. Das Objekt mit der Transformationsformel

(2.1) nenne ich den kontravarianten F-Vektor der ersten Art
(2.3) nenne ich den kovarianten F-Vektor der ersten Art
(2.4) nenne ich den kontravarianten F-Vektor der zweiten Art
(2.5) nenne ich den kovarianten F-Vektor der zweiten Art
(2.6) nenne ich die Φ Dichte des F-Vektors.

Jetzt kann man ganz ähnlich wie die Tensoren der höheren Valenz, die F-Tensoren der höheren Valenz bilden (vgl. [4], S. 108, [5], S. 61, [2]). Z.B. das Objekt $\mathfrak{W}$ mit der Transformationsformel

$$\mathfrak{W}^{P'_1 \ldots P'_k R'_1 \ldots R'_t}_{Q'_1 \ldots Q'_l S'_1 \ldots S'_u}$$
$$= \Phi(J) F^{P'_1}_{P_1} \cdots F^{P'_k}_{P_k} F^{Q_1}_{Q'_1} \cdots F^{Q_l}_{Q_l} G^{R'_1}_{R_1} \cdots G^{R'_t}_{R_t} G^{S_1}_{S'_1} \cdots G^{S_u}_{S'_u} \mathfrak{W}^{P_1 \ldots P_k R_1 \ldots R_t}_{Q_1 \ldots Q_l S_1 \ldots S_u}$$

ist eine Φ-Dichte des F-Tensors der Valenz erster Art (k, l) und zweiter Art (t, u) (kurz F-Tensordichte (k, l) und (t, u)).

Die F-Tensordichten kann man addieren, multiplizieren mit den reellen Zahlen und miteinander, dann hinsichtlich der Indizes der gleichen Art verjüngen. Diese letzte Eigenschaft folgt aus den Relationen

$$F(A)F(A^{-1}) = \|F^{P'}_{Q} F^{Q}_{R'}\| = \|\delta^{P'}_{R'}\|\,,$$
$$G(A)G(A^{-1}) = \|G^{P'}_{Q} G^{Q}_{R'}\| = \|\delta^{P'}_{R'}\|$$

die die Homomorphismen F und G erfüllen. Alle diese Operationen sind den, die für gewöhnliche Tensoren gelten, ganz analog.

§ 3. Beispiele. Jetzt gebe ich einige Beispiele der F-Vektoren an.

1. A. Jakubowicz [5] hat folgende Objekte eingeführt, die er Deffinoren gennant hatte. Das sind die linearen homogenen geometrischen Objekte mit $\binom{n}{2}$ Komponenten im n-dimensionalen Raume. Für diese

Objekte ist die Funktion F, die wir jetzt mit D bezeichnen werden, durch nachstehende Formel definiert

$$(3.1)\qquad \begin{gathered} F = D = \|D_Q^{P'}\|\,, \qquad i, k, r, s = 1, 2, \ldots, n\,,\ \ P, Q = 1, 2, \ldots, \binom{n}{2} \\ D_Q^{P'}(A) = 2A^{i'}_{[r}A^{k'}_{s]}\,, \qquad i < k\,,\ r < s\,, \end{gathered}$$

wo P und Q alle Paare (i, k), $i < k$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$, in einer bestimmten Ordnung durchlaufen.

Bemerkung. Die Formeln (3.1) sind auf folgende Weise zu verstehen. Wir ordnen jedem Paare (i, k), $i < k$ der natürlichen Zahlen i und k, wo $i, k = 1, 2, \ldots, n$ gleich sind, eine und nur eine Zahl P von der Folge $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ in ganz beliebiger aber bestimmter Weise. In (3.1) ist der Index P bzw. Q eine Zahl, welche dem Paare (i, k) bzw. (r, s) zugeordnet ist. Da die natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ umkehrbar eindeutig auf die Pare (i, k) abgebildet sind, kann man die Indizes P auch mit den Paaren, die ihnen entsprechen, bezeichnen. Wenn wir die Paare (i, k) auf eine andere Weise auf die Zahlen $1, 2, \ldots, \binom{n}{2}$ ein-eindeutig abbilden, so erhalten wir ein anderes Objekt. Diese sind aber wegen des Satzes 1.6 miteinander stark äquivalent.

Die obigen Bemerkungen mit entsprechenden leichtverständlichen Veränderungen betreffen auch die Formeln (3.2)-(3.5), (3.10), (3.11), (3.12).

Gemäß unserer Bezeichnung ist das obendefinierte Objekt das kontravariante D-Vektor erster Art. Der kovariante D-Vektor der diesem entspricht, ist durch die Funktion

$$D^P_{Q'} = 2A^i_{[r'}A^k_{s']}$$

definiert.

Da die Bezeichnung

$$D(A^T)^T = D(A)$$

für die Funktion D gilt, gibt es keine D-Vektoren zweiter Art. Gemäß der am Ende des vorigen Paragraphen dargestellten Betrachtungen kann man die D-Tensordichten beliebiger Valenz bilden und diese auf gewöhnliche Weise umformen (vgl. [5], S. 61).

2. S. Gołąb und A. Jakubowicz [5] haben ein anderes Objekt eingeführt, so genanntes S-Tensor. Im n-dimensionalen Raume hat es $\binom{n+1}{2}$ Komponenten und ist durch nachstehende Funktion bestimmt. Diese Funktion werden wir mit S bezeichnen $F(A) = S(A)$

$$(3.2)\qquad \begin{gathered} S(A) = \|S_Q^{P'}\|\,, \qquad S_Q^{P'}(A) = \begin{cases} A^{i'}_r A^{k'}_r\,, \\ 2A^{i'}_{(r}A^{k'}_{s)}\,, \end{cases} \\ i \leqslant k\,,\ r < s\,, \qquad P, Q = 1, 2, \ldots, \binom{n+1}{2}\,. \end{gathered}$$

Die Funktion (3.2) bestimmt also einen kontravarianten S-Vektor erster Art. Man kann noch drei weitere S-Vektoren bilden, d.h. den kovarianten S-Vektor erster Art und den kontravarianten und kovarianten S-Vektor zweiter Art. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{S}$ die Matrix $[S(A^T)]^T$, so können die Funktionen, welche diese S-Vektoren bestimmen, durch folgende Formel ausgedrückt werden

$$[S(A^{-1})]^T\colon\ S^P_{Q'}(A)=\begin{cases} A^i_{(r'}A^k_{r')}\,, \\ 2A^i_{(r'}A^k_{s')}\,,\ r'<s'\,, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\mathfrak{S}=[S(A^T)]^T\colon\ \mathfrak{S}^{P'}_Q(A)=\begin{cases} A^{r'}_{(i}A^{r'}_{k)}\,, \\ 2A^{r'}_{(i}A^{s'}_{k)}\,,\ r'<s' \end{cases} \tag{3.4}$$

$$S\big((A^{-1})^T\big)\colon\ \mathfrak{S}^P_{Q'}(A)=\begin{cases} A^r_{(i'}A^r_{k')}\,, \\ 2A^r_{(i'}A^s_{k')}\,,\ r<s\,, \end{cases} \tag{3.5}$$

Unter diesen vier Objekten, die durch Matrizen (3.2), (3.3), (3.4), (3.5) bestimmt sind, sind (3.2) mit (3.4) und (3.3) mit (3.5) stark äquivalent. In der Tat erfüllen entsprechende Matrizen niedergeschriebene Beziehungen

$$S=C\,\mathfrak{S}\,C^{-1}\,,$$

$$[S(A^{-1})]^T=C^{-1}S\big((A^{-1})^T\big)\,C\,,$$

wo C eine diagonale Matrix ist. Die Elemente von C sind durch die Formeln

$$C^P_P=1\,,\quad P=(i,i)\,,\quad C^P_P=\tfrac{1}{2}\,,\quad P=(i,k)\,,\quad i<k\,,\quad C=0\,,\quad P\neq Q$$

bestimmt.

Wegen des Satzes 1.4 folgt daraus, daß entsprechende Objekte stark äquivalent sind. Wir haben also folgenden

Satz 3.1. *Der kontravariante (kovariante) S-Vektor der ersten Art ist dem kontravarianten (kovarianten) S-Vektor der zweiten Art stark äquivalent.*

Für die S-Vektoren in dem zweidimensionalen Raume gilt noch folgender

Satz 3.2. *In dem zweidimensionalen Raume ist der kontravariante S-Vektor der ersten Art einer kovarianten S-Vektordichte der zweiten Art stark äquivalent.*

Beweis. Für die Matrizen der zweiten Ordnung gilt die Relation

$$(A^{-1})^T=J^{-1}CAC^{-1}\,, \tag{3.6}$$

wo J die Determinante der Matrix A und C die Matrix

$$\begin{Vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}$$

bedeutet. Bezeichnen wir mit $S(A)$ die Matrix des kontravarianten S-Vektors der ersten Art, so ist der kovariante S-Vektor der zweiten Art durch die Matrix

$$S\big((A^{-1})^T\big)$$

bestimmt. Aus (3.6) ergibt sich also

$$S\big((A^{-1})^T\big) = S(J^{-1})S(C)S(A)[S(C)]^{-1}\,. \tag{3.7}$$

Aus der Formel (3.2) erhalten wir, daß $S(J^{-1})$ eine skalare Matrix ist, derer alle auf der Hauptdiagonale stehenden Elemente J^{-2} gleich sind.

$$S(J^{-1}) = \begin{Vmatrix} J^{-2} & & \\ & J^{-2} & \\ & & J^{-2} \end{Vmatrix} = J^{-2}\,. \tag{3.8}$$

Überdies muß $S(C)$ nicht singulär sein, weil C eine nicht singuläre Matrix ist.

$$S(C) = \bar{C}\,, \qquad \operatorname{Det}\bar{C} \neq 0\,. \tag{3.9}$$

Wegen des Satzes 1.4 drückt die letzte Beziehung aus, daß der kovariante Esaffinor der zweiten Art der kontravarianten S-Vektordichte der ersten Art stark äquivalent ist. Der Satz 3.2 ist also bewiesen.

Aus den Sätzen 3.1 und 3.2 folgt, daß jede S-Vektordichte im zweidimensionalen Raume einer kontravarianten S-Vektordichte erster Art stark äquivalent ist. Von den zerlegbaren abgesehen sind diese die einzigen linearen homogenen geometrischen Objekte mit drei Komponenten im zwei dimensionalen Raume erster Klasse, wie das Z. Kareńska [6] gezeigt hat. (Das geometrische Objekt nennen wir zerlagbar, wenn es einem Vereinigungsobjekt ([1], S. 13) stark äquivalent ist, das aus den Objekten mit weniger Anzahl der Komponenten besteht.)

3. Betrachten wir noch das lineare homogene geometrische Objekt mit der Transformationsregel (3), wo F durch nachstehende Formel bestimmt ist. Die Matrixfunktion F werde ich in diesem Falle mit L bezeichnen $F(A) = L(A) = \|L_Q^{P'}\|$

$$L_Q^{P'}(A) = A_r^{i'} A_s^{k'}\,, \qquad i, k, r, s = 1, 2, \dots, n;\ P, Q = 1, 2, \dots, n^2\,. \tag{3.10}$$

In (3.10) laufen P bzw. Q über alle Paare der Zahlen (i, k), $i, k = 1, 2, \dots, n$, bzw. (r, s), $r, s = 1, 2, \dots, n$, die auf beliebige Weise geordnet sind. Es ist leicht nachzuprüfen, daß die Matrix L die Funktionalgleichung (4) und die Bedingung (5) erfüllt. Dieses Objekt werde ich das L-Vektor nennen. Es hat also n^2 Komponenten im n-dimensionalen Raume.

Nach dem Satz 1.1 kann man aus dem obendefinierten Objekt noch drei weitere Objekte, die durch Funktionen

$$L(A^{-1})^T, \quad L(A^T)^T, \quad L\big((A^T)^{-1}\big)$$

bestimmt sind, bilden. Da aber die Beziehung

$$L(A^T)^T = L(A)$$

in diesem Falle gilt, ist die Funktion $L(A^{-1})^T$ der $L\big((A^{-1})^T\big)$ und $L(A^T)^T$ der $L(A)$ gleich. Es gibt also nur das kontravariante und kovariante L-Vektor der ersten Art.

4. Wir definieren jetzt die Matrixfunktion F auf folgende Weise. Ist A eine Matrix mit den Elementen $A_k^{i'}$, so bezeichnen wir mit B mit den Elementen $B_k^{i'}$ die zur A inverse und transponierte Matrix. Wir haben also

$$B = (A^T)^T, \quad B_k^{i'} = A_{i'}^k .$$

Jetzt bilden wir die Matrix $M(A)$ mit nachstehenden Elementen

$$M_Q^{P'}(A) = A_r^{i'} B_s^{k'}, \quad i, k, r, s = 1, 2, \dots, n, \quad P, Q = 1, 2, \dots, n^2 \tag{3.11}$$

In (3.11) laufen die Indizes P und Q über alle geordneten Paare (i, k), wo $i, k = 1, 2, \dots, n$ sind.

Man kann nachprüfen, daß die Matrixfunktion M die Funktionalgleichung (4) und die Bedingung (5) erfüllt. Das lineare homogene geometrische Objekt, das durch die Funktion M bestimmt ist, nenne ich den M-Vektor. Er hat n^2-Komponenten im n-dimensionalen Raume.

Die Matrix M erfüllt die Relation

$$M(A^T)^T = M(A),$$

aus welcher die Beziehung

$$M\big((A^{-1})^T\big) = [M(A^{-1})]^T$$

folgt. Diese zeigen, daß die M-Vektoren zweiter Art den entsprechenden erster Art gleich sind. Wir haben also nur den kontravarianten und kovarianten M-Vektor der ersten Art.

Ganz analog kann man die D-Vektoren, S-Vektoren, L-Vektoren und M-Vektoren der höheren Ordnung bilden. Z.B. der L-Vektor der Ordnung r kurz L-Vektor ist ein lineares homogenes geometrisches Objekt, das durch die Funktion $\underset{r}{L}(A) = \|\underset{r}{L}{}_Q^{P'}\|$

$$L_Q^{P'}(A) = A_{k_1}^{i_1'} \dots A_{k_r}^{i_r'} \tag{3.12}$$

bestimmt ist. In (3.12) laufen die Indizes P und Q über alle geordneten m-Tupel $(i_1, \dots, i_r)$, wo $i_1, \dots, i_r = 1, 2, \dots, n$, sind.

§ 4. Die Determinanten der Matrizen D, S, L **und** M. Sehr oft müßen wir die Determinante der Matrizen der F-Vektoren bestimmen (vgl. [2], [3], [4], [5]). In der Arbeit [2] bzw. [3] haben die Verfasser die Determinanten der D-Vektoren und S-Vektoren mit Hilfe eines Satzes von S. Gołąb ([1], S. 55) berechnet. Ich möchte hier einen anderen Weg für die Berechnung der Determinanten von D, S, L und M zeigen. Ich beweise nämlich folgenden

SATZ 4.1. *Die Determinanten der Matrizen* D, S, L, M, *die durch die Formeln* (3.1), (3.2), (3.10), (3.11) *definiert sind, drücken sich durch die Determinante* J *der Matrix* A *auf folgende Weise*

$$|D| = J^{n-1}\,, \quad |S| = J^{n+1}\,, \quad |L| = J^{2n}\,, \quad |M| = 1\,, \quad J = \operatorname{Det} A \tag{4.1}$$

aus.

Beweis. Nach dem Satz 1.2 ist jede dieser Determinanten eine multiplikative Funktion der Determinante J. Wir haben also

$$|D| = \varphi_1(J)\,, \quad |S| = \varphi_2(J)\,, \quad |L| = \varphi_3(J)\,, \quad |M| = \varphi_4(J)\,, \tag{4.2}$$

wo die Funktion φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$, die Funktionalgleichung (1.3) erfüllen.

Um die Gestalt der Funktionen φ_i zu erhalten, setzen wir in (4.2) statt A eine niederdefinierte diagonale Matrix

$$A_k^{i'} = a^i \delta_k^i\,, \quad a^1 = a \neq 0, \quad a^2 = a^3 = \ldots = a^n = 1\,. \tag{4.3}$$

Dann ergibt sich

$$D_Q^{P'} = \begin{cases} a^i a^k\,, & P = Q\,,\ i < k\,, \\ 0\,, & P \neq Q\,; \end{cases} \qquad S_Q^{P'} = \begin{cases} a^i a^k\,, & P = Q\,,\ i \leqslant k\,, \\ 0\,, & P \neq Q\,; \end{cases}$$

$$L_Q^{P'} = \begin{cases} a^i a^k\,, & P = Q\,, \\ 0\,, & P \neq Q\,; \end{cases} \qquad M_Q^{P'} = \begin{cases} a^i a^{-k}\,, & P = Q\,, \\ 0\,, & P \neq Q\,. \end{cases}$$

Daraus folgt, daß die Determinanten der Matrizen D, S, L, M die Form

$$|D| = a^{n-1}\,, \quad |S| = a^{n+1}\,, \quad |L| = a^{2n}\,, \quad |M| = 1 \tag{4.4}$$

haben.

Da die Determinante J der Matrix A gleichzeitig die Form

$$J = a \tag{4.5}$$

hat, erhalten wir aus (4.2), (4.4), (4.5) die Gestalten der Funktionen φ_i. Sie sind durch folgende Formeln

$$\varphi_1(a) = a^{n-1}\,, \quad \varphi_2(a) = a^{n+1}\,, \quad \varphi_3(a) = a^{2n}\,, \quad \varphi_4(a) = 1$$

ausgedrückt. Dies zieht nach sich die Beziehungen (4.1).

Mit Hilfe der Sätze 4.1 und 1.3 können die Determinanten der Matrizen von den kontravarianten bzw. kovarianten D-Vektoren, S-Vektoren, L-Vektoren und M-Vektoren der ersten und zweiten Art berechnet werden.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb i A. Jakubowicz, *O pewnym obiekcie geometrycznym czysto różniczkowym typu* $(m, n, 1)$, *gdy* $m = \binom{n+1}{2}$ $2 \leqslant n$ $(m < n^2)$, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej 57 (1964), S. 5-18.

[3] — — *O pewnych komitantach algebraicznych S-afinorów*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej (unter der Presse).

[4] A. Jakubowicz, *O pewnych obiektach geometrycznych równoważnych afinorom*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej 17 (1960), S. 103-116.

[5] — *O kompresji wskaźników dla afinorów antysymetrycznych*, Zeszyty Naukowe Politechniki Szczecińskiej 39 (1963), S. 57-88.

[6] Z. Kareńska, *Ogólne rozwiązanie równania macierzowego* $F(a)\cdot F(b) = F(a\cdot b)$, *gdzie F jest macierzą rzędu* 3, *a a i b są macierzami rzędu* 2 (noch nicht publiziert).

[7] M. Kucharzewski, *Über die Funktionalgleichung* $f(a^i_k)f(b^i_k) = f(b^i_\alpha a^\alpha_k)$, Publ. Math. Debrecen, 6 (1959), S. 181-198.

[8] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Some remarks on geometric objects and their equivalence I, II*, Tensor 13 (1963), S. 251-260, 261-268.

[9] — — *Determination of geometric objects of the type* $[2, 2, 1]$ *with a linear homogeneous transformation formula*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), S. 29-48.

[10] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

Reçu par la Rédaction le 12. 4. 1965