ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Problème généralisé de Hilbert pour un système infini de fonctions

par Z. Rojek (Warszawa)

Soit dans le plan de la variable complexe un ensemble de p courbes fermées de Jordan $L_1, L_2, \ldots, L_p$, n'ayant pas de points communs et limitant les domaines disjoints $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$. Soit en outre une courbe fermée de Jordan L_0 entourant toutes les lignes $L_1, L_2, \ldots, L_p$ et ne les coupant pas. Désignons par S_0^- le domaine infini situé à l'extérieur de la ligne L_0 et par S^+ le domaine limité par la courbe L_0 et les courbes $L_1, L_2, \ldots, L_p$.

Nous admettons que les lignes $L_0, L_1, \ldots, L_p$ ont une tangente continue en tout point. Les lignes $L_0, L_1, \ldots, L_p$ sont orientées positivement par rapport à un domaine S^+.

Nous posons le problème de Hilbert suivant pour un système infini de fonctions:

Trouver une suite de fonctions de la variable complexe $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ qui soient holomorphes dans les domaines $S^+, S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$ séparément et dont les valeurs limites $\Phi_n^+(t), \Phi_n^-(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ satisfassent en tout point $t \in L = L_0 + L_1 + \ldots + L_p$ aux relations

$$\Phi_n^+(t) = G_n(t)\Phi_n^-(t) + \lambda_n \int_L \frac{F_n[t, \tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \Phi_2^+(\tau), \Phi_2^-(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

D. Przeworska-Rolewicz [5] a posé et résolu le problème de Hilbert suivant:

$$\Phi_n^+(t) = G_n(t)\Phi_n^-(t) + F_n[t, \Phi_1^+(t), \Phi_1^-(t), \Phi_2^+(t), \Phi_2^-(t), \ldots] \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Nous admettons les hypothèses suivantes:

I. *Les fonctions $G_n(t)$ sont déterminées pour $t \in L$ et elles vérifient la condition de Hölder*

$$|G_n(t) - G_n(t')| \leqslant g_n |t - t'|^\mu \qquad (0 < \mu < 1;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{2}$$

En outre nous supposons que

$$G_n(t) \neq 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{3}$$

pour $t \in L$.

II. *Les fonctions* $F_n(t, \tau, u_1, u_2, \ldots)$, $n = 1, 2, \ldots$ *sont déterminées pour* $t, \tau \in L$, $|u_n| \leqslant R$ *et elles vérifient la condition*

$$(4) \qquad |F_n(t, \tau, u_1, u_2, \ldots) - F_n(t', \tau', u_1', u_2', \ldots)|$$

$$\leqslant k_n\Big[|t-t'|^{\mu_1} + |\tau-\tau'|^{\mu} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}|u_i - u_i'|\Big] \quad (0 < \mu < \mu_1 < 1;\ n = 1, 2, \ldots),$$

où les séries $\sum_{i=1}^{\infty} a_{ni}$ *à termes positifs sont convergentes pour chaque* n *et leurs sommes forment une suite bornée*

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} a_{ni} = a_n \leqslant A.$$

En supposant que la solution $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ du problème posé (1) existe et que les fonctions $\Phi_n^{\pm}(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ vérifient les conditions de Hölder aux coefficients bornés et avec l'exposant μ, nous pouvons affirmer, que la solution vérifie les relations (voir [3], [1])

$$(6) \qquad \Phi_n(z) = \lambda_n \frac{X_n(z)}{2\pi i} \int_L \frac{1}{X_n^+(\tau)(\tau - z)} \left[\int_L \frac{F_n[\tau, \tau_1, \Phi_1^+(\tau_1), \Phi_1^-(\tau_1), \ldots]}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \right] d\tau + $$
$$+ X_n(z) P_n(z), \qquad n = 1, 2, \ldots$$

où $X_n(z)$ est la solution canonique du problème de Hilbert homogène

$$X_n^+(t) = G(t) X_n^-(t),$$

et $P_n(z)$ sont des fonctions entières arbitrairement choisies.

D'après les formules connues de Plemelj, nous pouvons affirmer que les fonctions limites $\Phi_n^+(t), \Phi_n^-(t)$, $n = 1, 2, \ldots$ vérifient la suite d'équations intégrales singulières:

$$\Phi_n^+(t) = \frac{\lambda_n}{2} \int_L \frac{F_n[t, \tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau +$$
$$+ \frac{\lambda_n}{2\pi i} X_n^+(t) \int_L \frac{1}{X_n^+(\tau)(\tau - t)} \left[\int_L \frac{F_n[\tau, \tau_1, \Phi_1^+(\tau_1), \Phi_1^-(\tau_1), \ldots]}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \right] d\tau + X_n^+(t) P_n(t),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

(7)

$$\Phi_n^-(t) = -\frac{\lambda_n}{2} \cdot \frac{X_n^-(t)}{X_n^+(t)} \int_L \frac{F_n[t, \tau, \Phi_1^+(\tau), \Phi_1^-(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau +$$
$$+ \frac{\lambda_n}{2\pi i} X_n^-(t) \int_L \frac{1}{X_n^+(\tau)(\tau - t)} \left[\int_L \frac{F_n[\tau, \tau_1, \Phi_1^+(\tau_1), \Phi_1^-(\tau_1), \ldots]}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \right] d\tau + X_n^-(t) P_n(t),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

en tout point $t \in L$.

Les fonctions $X_n^{\pm}(t)$ vérifient les conditions de Hölder

(8) $$|X_n^{\pm}(t)-X_n^{\pm}(t')| \leqslant x_n|t-t'|^{\mu}$$

et les inégalités

(9) $$0 < x_n'' \leqslant |X_n^{\pm}(t)| \leqslant x_n',$$

où x_n, x_n', x_n'' sont des constantes positives.

Posons

(10) $$\Phi_n^{+}(t) = \varphi_{2n-1}(t), \quad \Phi_n^{-}(t) = \varphi_{2n}(t),$$

(11) $$Y_{2n-1}(t) = \frac{1}{2}, \quad Y_{2n}(t) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{X_n^{-}(t)}{X_n^{+}(t)},$$

(12) $$Y_{2n-1}^{*}(t) = \frac{X_n^{+}(t)}{2\pi i}, \quad Y_{2n}^{*}(t) = -\frac{X_n^{-}(t)}{2\pi i},$$

(13) $$Y_{2n-1}^{**}(t) = X_n^{+}(t)P_n(t), \quad Y_{2n}^{**}(t) = X_n^{-}(t)P_n(t),$$

$n = 1, 2, \ldots$

Le système (7) peut être écrit sous la forme

(14) $$\varphi_n(t) = \lambda_n Y_n(t)\int_L \frac{F_n[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t}\, d\tau +$$
$$+\lambda_n Y_n^{*}(t)\int_L \frac{1}{X_n^{+}(\tau)(\tau-t)}\left[\int_L \frac{F_n[\tau, \tau_1, \varphi_1(\tau_1), \varphi_2(\tau_1), \ldots]}{\tau_1-\tau}\, d\tau_1\right] d\tau + Y_n^{**}(t)$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Nous avons ramené notre problème à la résolution d'un système (14) d'équations intégrales non linéaires, à singularité forte et à une infinité de fonctions inconnues $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots$

Pour résoudre le système (14) nous appliquerons le théorème de Tichonov [6] relatif au point invariant:

Dans un espace métrique linéaire, localement convexe et complet, toute transformation continue d'un ensemble convexe, fermé et compact en son sous-ensemble a au moins un point invariant.

Considérons l'espace fonctionnel E^{∞} composé de toutes les suites $U = \{\varphi_n(t)\}$ de fonctions continues de la variable complexe déterminées sur L.

On définit, comme d'habitude, la somme de deux points $U = \{\varphi_n(t)\}$ et $V = \{\psi_n(t)\}$ de l'espace E^{∞} par la formule

$$U+V = \{\varphi_n(t)+\psi_n(t)\}$$

et le produit du point $U = \{\varphi_n(t)\}$ par un nombre γ par la formule

$$\gamma U = \{\gamma\varphi_n(t)\}.$$

La distance des deux points $U = \{\varphi_n(t)\}$ et $V = \{\psi_n(t)\}$ de l'espace E^∞ est donnée par la formule

$$(15)\qquad \varrho(U, V) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \cdot \frac{\sup\limits_{t\in L} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|}{1 + \sup\limits_{t\in L} |\varphi_i(t) - \psi_i(t)|}.$$

L'espace E^∞ est donc linéaire, métrique, localement convexe et complet.

Considérons maintenant dans l'espace E^∞ l'ensemble T de tous les points $U = \{\varphi_n(t)\}$ vérifiant les inégalités

$$(16)\qquad |\varphi_n(t)| \leqslant R,$$

$$(17)\qquad |\varphi_n(t) - \varphi_n(t')| \leqslant \varkappa |t - t'|^\mu, \quad n = 1, 2, \ldots$$

où $\varkappa$ est une constante positive arbitrairement fixée. L'ensemble T est convexe, fermé et compact.

Nous transformons l'ensemble T par les formules suivantes:

$$(18)\qquad \psi_n(t) = \lambda_n Y_n(t) \int_L \frac{F_n[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau + \\ + \lambda_n Y_n^*(t) \int_L \frac{1}{X_n^+(\tau)(\tau - t)} \left[\int_L \frac{F_n[\tau, \tau_1, \varphi_1(\tau_1), \varphi_2(\tau_1), \ldots]}{\tau_1 - \tau} d\tau_1 \right] d\tau + Y_n^{**}(t), \\ n = 1, 2, \ldots,$$

qui font correspondre à tout point $U = \{\varphi_n(t)\}$ de l'ensemble T un point $V = \{\psi_n(t)\}$ de l'espace E^∞. Désignons par T' l'ensemble des points transformés $V = \{\psi_n(t)\}$.

Nous chercherons les conditions pour que l'ensemble T' soit un sous-ensemble de T.

D'après les hypothèses (4) et (17)

$$(19)\qquad |F_n[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots] - F_n[t', \tau', \varphi_1(\tau'), \varphi_2(\tau'), \ldots]| \\ \leqslant k_n(1 + A\varkappa)[|t - t'|^{\mu_1} + |\tau - \tau'|^\mu].$$

Appliquant le théorème de Privaloff [4] à la fonction

$$(20)\qquad I_n(t) = \int_L \frac{F_n[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau, \quad n = 1, 2, \ldots$$

nous avons

$$(21)\qquad |I_n(t)| \leqslant \pi f_n + D k_n (1 + A\varkappa),$$

où

$$f_n = \sup_{t,\tau\in L} |F_n[t, \tau, \varphi_1(\tau), \varphi_2(\tau), \ldots]|, \qquad D = \sup_{t\in L} \int_L |\tau - t|\, dl_\tau$$

et

$$(22) \qquad |I_n(t)-I_n(t')| \leqslant Ck_n(1+A\varkappa)|t-t'|^{\mu},$$

où C est une constante positive qui ne dépend que des lignes L.

D'après (8), (9), (21), (22) et le théorème de Privaloff, la fonction

$$(23) \qquad I_n^*(t) = \int_L \frac{I_n(\tau)}{X_n^+(\tau)} \frac{1}{\tau-t} d\tau$$

vérifie les inégalités

$$(24) \qquad |I_n^*(t)| \leqslant Dd_n k_n(1+A\varkappa)+f_n d_n',$$

où

$$d_n = \frac{\pi x_n''+Cx_n'+Dx_n}{x_n''^2}, \qquad d_n' = \frac{\pi(\pi x_n'+Dx_n)}{x_n''^2}$$

et

$$(25) \qquad |I_n^*(t)-I_n^*(t')| \leqslant Cc_n k_n(1+A\varkappa)+f_n c_n'$$

où

$$c_n = \frac{Cx_n'+Dx_n}{x_n''^2}, \qquad c_n' = \frac{C\pi x_n}{x_n''^2}.$$

En tenant compte des formules (8), (21) et (24) nous obtenons

$$(26) \qquad |\psi_n(t)| \leqslant \tfrac{1}{2}|\lambda_n|\{Dk_n h_n(1+A\varkappa)+f_n h_n'\}+x_n' p_n,$$

où

$$h_n = \frac{1}{\pi}d_n+\frac{x_n'}{x_n''}, \qquad h_n' = \frac{1}{\pi}d_n'+\frac{x_n'}{x_n''}, \qquad p_n = \sup_{t\in L}|P_n(t)|.$$

D'après (8), (9), (21), (22), (24), (25) nous avons

$$(27) \qquad |\psi_n(t)-\psi_n(t')| \leqslant \{|\lambda_n|[r_n d_n k_n(1+A\varkappa)+r_n' f_n]+x_n' p_n'+x_n p_n\}|t-t'|^{\mu}$$

où

$$r_n = \frac{Cx_n'+Dx_n}{2\pi}, \qquad r_n' = \frac{\pi x_n' x_n}{x_n''^2}+\frac{x_n}{2}d_n$$

et p_n' désigne le coefficient de Hölder dans une égalité

$$|P_n(t)-P_n(t')| \leqslant p_n'|t-t'|^{\mu}.$$

Nous en concluons, d'après (16), (17), (26) et (27), que l'ensemble T' fera partie de l'ensemble T si les constantes du problème satisfont aux inégalités

$$(28) \qquad \tfrac{1}{2}|\lambda_n|\{Dk_n h_n(1+A\varkappa)+f_n h_n'\}+x_n' p_n \leqslant R,$$

$$(29) \qquad |\lambda_n|\{r_n d_n k_n(1+A\varkappa)+r_n' f_n\}+x_n' p_n'+x_n p_n \leqslant \varkappa.$$

Nous montrerons maintenant que la transformation (18) est continue. Soit une suite arbitraire de points $U^{(m)} = \{\varphi_n^{(m)}(t)\}$ de l'ensemble T, convergente vers un point $U = \{\varphi_n(t)\}$ de cet ensemble au sens de la métrique (15), c'est-à-dire on a

$$\varrho(U^{(m)}, U) \to 0 \quad \text{si} \quad m \to \infty .$$

Pour démontrer que la transformation (18) est continue, il est nécessaire et suffisant de démontrer que la suite de points $V^{(m)} = \{\psi_n^{(m)}(t)\}$, transformée par les relations (18), converge vers un point $V = \{\psi_n(t)\}$ qui correspond au point limite $U = \{\varphi_n(t)\}$ par les relations (18).

Dans ce but étudions la différence

$$\psi_n^{(m)}(t) - \psi_n(t) = \lambda_n Y_n(t)[I_n^{(m)}(t) - I_n(t)] + \lambda_n Y_n^*(t)[I_n^{*(m)}(t) - I_n^*(t)] \tag{30}$$

où

$$I_n^{(m)}(t) = \int_L \frac{F_n[t, \tau, \varphi_1^{(m)}(\tau), \varphi_2^{(m)}(\tau), \ldots]}{\tau - t} d\tau , \qquad I_n^{*(m)}(t) = \int_L \frac{I_n^{(m)}(\tau)}{X_n^+(\tau)} \cdot \frac{1}{\tau - t} d\tau .$$

On peut démontrer, comme dans le travail [5], que pour chaque n et pour $\varepsilon > 0$

$$|\lambda_n| \, |Y_n(t)| \, |I_n^{(m)}(t) - I_n(t)| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad m > N_n^{\mathrm{I}}(\varepsilon) . \tag{31}$$

En se basant sur l'inégalité (31) on peut montrer, de manière analogue, que

$$|\lambda_n| \, |Y_n^*(t)| \, |I_n^{*(m)}(t) - I_n^*(t)| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{si} \quad m > N_n^{\mathrm{II}}(\varepsilon) . \tag{32}$$

Nous constatons donc que pour chaque n

$$\lim_{m \to \infty} \sup_{t \in L} |\psi_n^{(m)}(t) - \psi_n(t)| = 0 . \tag{33}$$

En tenant compte de (33) on peut démontrer (voir [2]) que

$$\lim_{m \to \infty} \varrho(U^{(m)}, U) = 0 , \tag{34}$$

donc la transformation (18) est continue.

Toutes les conditions du théorème de Tichonov sont satisfaites, donc il existe au moins une solution

$$\varphi_1^*(t), \ \varphi_2^*(t), \ \ldots \tag{35}$$

du système d'équations (14).

En substituant ces fonctions dans les formules (6), on obtient une solution du problème (1).

Nous avons donc le théorème suivant:

THÉORÈME. *Si les fonctions $G_n(t)$ et $F_n[t, \tau, u_1, u_2, \ldots]$ vérifient les hypothèses* I *et* II *et si les modules paramètres λ_n sont suffisamment petits, il existe au moins une suite infinite de fonctions holomorphes $\Phi_1(z), \Phi_2(z), \ldots$ dont les valeurs limites satisfont aux relations proposées* (1).

Travaux cités

[1] Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Moskwa 1963.

[2] Л. А. Люстерник и В. И. Соболев, *Элементы Функционального анализа*, Moskwa, Leningrad 1951.

[3] Н. И. Мусхелишвили, *Сингулярные интегральные уравнения*, Moskwa 1962.

[4] W. Pogorzelski, *Równania całkowe i ich zastosowania*, t. III, Warszawa 1960.

[5] D. Przeworska-Rolewicz, *Problème non linéaire de Hilbert pour un système infini de fonctions*, Ann. Polon. Math. 5 (1958), p. 293-301.

[6] A. N. Tichonov, *Ein Fixpunktsatz*, Math. Ann. 111 (1935), p. 767-776.

Reçu par la Rédaction le 6. 5. 1965