ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Zum Begriff der Komitante

von M. Kucharzewski (Katowice)

Einleitung. Den Begriff des geometrischen Objektes hat A. Wundheiler [12], [13] im J. 1934 auf der internationalen Konferenz für tensorielle Differentialgeometrie in Moskau eingeführt. Dann entwickelten J. Haantjes und J. A. Schouten [10], [11] diese Theorie weiter. In den letzten Jahren beschäftigten sich manche Autoren mit dieser Theorie und es erschienen viele Arbeiten über dieses Thema, unter denen die ausführliche Monographie von A. Nijenhuis [9] und das Buch von J. Aczél und S. Gołąb [1] zu nennen sind.

In dieser Note will ich den Begriff der *relativen Komitante* einführen.

Einer der grundlegenden Begriffe der Theorie der geometrischen Objekte ist der Begriff der Komitante. Um diesen Begriff näher zu erläutern, werden wir den Begriff der relativen (in bezug auf eine Menge $\mathfrak{M}$ definierten) Komitante einführen. Gewisse relative Komitanten der ko- bzw. kontravarianten Vektorsystemen wurden schon in den Arbeiten [5], [6], [7], [8] bestimmt (1). Die nachstehenden Betrachtungen sollen ausserdem die in diesen Arbeiten dargestellten Sätze etwas klarmachen und Missverständnisse verhindern.

§ 1. Das geometrische Objekt. Es sei in der Umgebung eines Punktes

$$p_0(\xi_0^i)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

des n-dimensionalen Raumes X_n ein Gruppoid $\mathfrak{G}$ (im Sinne von H. Brandt (vergl. [1], S. 9, § 2)) der Koordinatentransformationen

$$(1) \qquad T_{i'i}\colon \quad \xi^{i'} = \varphi^{i'}(\xi^i)\,, \qquad i' = 1', 2', \ldots, n'$$

gegeben. Das Koordinatensystem $U_{i'}$ nennen wir zulässig, wenn man es mit Hilfe entsprechender Transformation $T_{i'i}$ des Gruppoids $\mathfrak{G}$ aus einem Ursystem U_i erhalten kann.

(1) In diesen Arbeiten wurde die Bezeichnung „Komitante“ statt „relative Komitante“ unrichtig benutzt. Ausserdem wurden die Definitionsbereiche der dort betrachteten relativen Komitanten bzw. der entsprechenden Lösungen der Funktionalgleichungen nicht genau angegeben.

Wir sagen, dass ein Objekt Ω im Punkte p_0 definiert ist, wenn eine Folge von s Zahlen

$$\omega_1, \ldots, \omega_s \tag{2}$$

jedem zulässigen Koordinatensystem U_i in eindeutiger Weise zugeordnet ist.

Die Zahlen (2) heissen die Komponenten des Objektes Ω im entsprechenden Koordinatensystem U_i.

Lassen sich die Komponenten von Ω

$$\omega_{1'}, \ldots, \omega_{s'}$$

in einem anderen Koordinatensystem $U_{i'}$ nur mit Hilfe von (2) und der Transformation $T_{i'i}$, die von U_i zu $U_{i'}$ führt, berechnen:

$$\omega_{i'} = F_{i'}(\omega_i, T_{i'i}) = F_{i'}(\Omega, T)\,, \tag{3}$$

so nennt man Ω ein *geometrisches Objekt*. Dieses ist durch seine Transformationsregel (3) vollständig bestimmt.

Das geometrische Objekt heisst *speziell*, wenn die Abhängigkeit von der Transformation $T_{i'i}$ in der Formel (3) durch die Koordinaten des Punktes p_0 in U_i und $U_{i'}$

$$\xi_0^i, \xi_0^{i'}$$

und durch die Ableitungen

$$A_i^{i'}, A_{ij}^{i'}, \ldots \qquad \left(A_i^{i'} = \frac{\partial \xi^{i'}}{\partial \xi^i}, \; A_{ij}^{i'} = \frac{\partial^2 \xi^{i'}}{\partial \xi^i \partial \xi^j}, \ldots\right)$$

der Transformation (1) in demselben Punkte p_0 ausgedrückt werden kann. In diesem Falle hat die Transformationsformel (3) folgende Form

$$\omega_{i'} = F_{i'}(\omega_i, \xi_0^i, \xi_0^{i'}, A_i^{i'}, \ldots, A_{i_1 \ldots i_r}^{i'}, \ldots)\,. \tag{4}$$

Spezielles geometrisches Objekt heisst r-ter Klasse, wenn die Ableitungen r-ter Ordnung, aber nicht höhere, in (4) auftreten.

Das 3-Zahlentupel (n, s, r), d.h. n — Dimension des Raumes, s — die Komponentenzahl des Objektes, r — die Klasse, bestimmt den sog. Typus des speziellen geometrischen Objektes [1].

Skalare, Dichten, ko- und kontravariante Vektoren, Affinordichten sind Beispiele der speziellen geometrischen Objekte.

Die Transformationsformel (4) für die Skalare lautet

$$\sigma' = \sigma\,. \tag{5}$$

Die ko- bzw. kontravarianten Vektoren sind durch nachstehende Transformationsformeln

$$v_{i'} = A_{i'}^i v_i \tag{6}$$

bzw.

$$u^{i'} = A_i^{i'} u^i \tag{7}$$

bestimmt.

Bemerkung 1. Es ist leicht zu prüfen, dass eine endliche Folge von geometrischen Objekten

$$ {}_1\Omega, \ldots, {}_t\Omega $$

als ein einziges Objekt Ω angesehen werden kann.

§ 2. Relative Komitanten. In [1], S. 16 lesen wir: „Eine Funktion

$$ \Psi(\Omega) = \{\Psi_1(\omega_1, \ldots, \omega_s), \ldots, \Psi_q(\omega_1, \ldots, \omega_s)\}, $$

wo die Gestalt von Ψ gegenüber Koordinatentransformationen invariant ist, wird *Komitante* des Objektes Ω genannt".

Um diesen Begriff zu präzisieren muss man den Definitionsbereich der Funktionen Ψ_j festlegen. Dieser kann nicht beliebig a priori gegeben werden und zwar aus diesem Grunde, dass die ω_i vom Koordinatensystem abhängen. Ist nun mit $\mathfrak{M}$ der Definitionsbereich von Ψ_j bezeichnet, so muss die folgende Implikation erfüllt werden

$$ \{\omega_1, \ldots, \omega_s\} \in \mathfrak{M} \Rightarrow \{\omega_{1'}, \ldots, \omega_{s'}\} \in \mathfrak{M}, \tag{8} $$

wenn $\omega_{i'}$ die Komponenten im beliebigen anderen zulässigen Bezugssystem bedeuten.

Diese Tatsache ist eng mit dem von S. Gołąb und E. Siwek [4] eingeführten Begriff des Transitivitätsbereiches eines geometrischen Objektes verbunden (Lie und Engel nennen es „minimale invariante Mannigfaltigkeit").

Der X_s-Raum eines geometrischen Objekts mit s Komponenten zerfällt in invariante Schichten

$$ X_s = \sum_a X^a_{s_a} $$

(s_a bedeutet die Dimension der entsprechenden Schichte), so dass in jeder Schichte die Transformationsgruppe der Komponenten des Objektes transitiv ist.

Daraus folgt, *dass $\mathfrak{M}$ notwendigerweise eine Summe von Transitivitätssichten des Objektes Ω sein muss.*

Aber auch umgekehrt, sind die Funktionen Ψ_j in einem Bereiche $\mathfrak{M}$ erklärt, der eine Summe von Transitivitätsbereichen des Objektes Ω ist, so ist die Bedingung (8) erfüllt. Solche Bereiche werden wir weiterhin kurz *zulässige Bereiche* nennen.

Definition. Es sei ein geometrisches Objekt Ω gegeben und $\mathfrak{M}$ sei ein zulässiger Bereich von Ω. In $\mathfrak{M}$ sei ein System von Funktionen

$$ \Psi_j(\omega_1, \ldots, \omega_s) = \Psi_j(\Omega), \quad j = 1, 2, \ldots, q $$

definiert. Wir setzen

$$ \omega^*_{j'} = \Psi_j(\omega_1, \ldots, \omega_s). $$

Bilden die ω_j^* ein geometrisches Objekt Ω^*, d.h. gilt für ω_j^* eine Transformationsregel

$$\omega_{j'}^* = f_{j'}(\omega_j^*, T_{j'j}) = f_{j'}(\Omega^*, T),$$

so nennen wir Ω^* eine *relative* (*in bezug auf* $\mathfrak{M}$) *Komitante von* Ω. Im Falle $\mathfrak{M} = X_s$ sprechen wir über *absolute Komitante* oder schlechthin Komitante.

Analytisch ausgedrückt handelt sich bei einer relativen Komitante um Auflösung der entsprechenden Funktionalgleichung

$$\Psi_j\big(F_{i'}(\Omega, T)\big) = f_{j'}\big(\Psi_j(\Omega), T\big) \tag{9}$$

für beliebige T aus $\mathfrak{G}$ und für beliebige Ω aus $\mathfrak{M}$.

§ 3. Anwendung auf ein System von Vektoren. Da, gemäss der Bemerkung 1, eine Folge von geometrischen Objekten als ein einziges Objekt betrachtet werden kann, können wir über Komitanten der m kontravarianten bzw. k kovarianten Vektoren sprechen. Zu einer Klasse von relativen Komitanten dieser Art gelangen wir folgendermassen.

Es seien m kontravariante Vektoren

$$_1u^\nu, \ldots, {}_mu^\nu, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n \tag{10}$$

im n-dimensionalen Raume x_n gegeben. Es seien weiter p ersten von den Vektoren (10)

$$_1u^\nu, \ldots, {}_pu^\nu, \qquad 0 \leqslant p \leqslant m \tag{11}$$

linear unabhängig und jeder andere von diesen linear abhängig. Das System (10) vereinigen wir (siehe Bemerkung 1 am Ende des 1 §) zu einem einzigen Objekt Ω mit $m \cdot n$ Komponenten. Mit $\mathfrak{M}_p$ bezeichnen wir nun den Transitivitätsbereich von Ω, der dem gegebenen System (10) entspricht (die Dimension von $\mathfrak{M}_p$ ist gleich $np + (m-p)p$). Es können also die relativen (in bezug auf $\mathfrak{M}_p$) Komitanten von (10) betrachtet werden. Falls die Werte dieser Komitanten Skalare, ko- bzw. kontravariante Vektoren sind, wurden diese für alle möglichen Werte von p in den Arbeiten [5], [6] und [7] bestimmt.

In analoger Weise bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}^q$ den Transitivitätsbereich des Systems von k kovarianten Vektoren, unter denen q ersten linear unabhängig sind. Man kann ganz analog die relativen Komitanten dieses Systems definieren. Sie sind in [7] angegeben.

In [8] sind endlich die relativen Komitanten, die Skalare sind, des aus k kovarianten und m kontravarianten Vektoren bestehenden Vereinigungsobjektes bestimmt. Die oben beschriebenen Ergebnisse enthalten auch diese, die die absoluten Komitanten treffen.

§ 4. Das einfache Verhältnis von drei kolinearen Punkten. In der bisherigen Literatur, die die Theorie der geometrischen Objekte betrifft, betrachtete man nur die absoluten Komitanten des gegebenen geometrischen Objektes. Infolgedessen könnten gewisse, sogar aus der elementaren analytischen Geometrie wohlbekannten Begriffe, mit Hilfe der Komitantentheorie nicht beherrscht werden. Zu diesen gehört der Begriff des einfachen Verhältnisses von drei auf einer Geraden gelegenen Punkten.

Sind $p_1({}_1\xi^\nu) \neq p_2({}_2\xi^\nu), p_3({}_3\xi^\nu)$ drei solche Punkte, so kann man das einfache Verhältnis λ dieser Punkte mit Komponenten der kontravarianten Vektoren

$$\overrightarrow{p_1p_3}({}_3\xi^\nu - {}_1\xi^\nu)\,, \qquad \overrightarrow{p_1p_2}({}_2\xi^\nu - {}_1\xi^\nu) \neq \vec{0} \tag{12}$$

folgendermassen

$$\lambda = \frac{{}_3\xi^\nu - {}_1\xi^\nu}{{}_2\xi^\nu - {}_1\xi^\nu} \tag{13}$$

ausdrücken. Die durch (13) definierte Zahl λ ist gegen der Gruppe von affinen Transformationen invariant. Sie kann aber nicht als absolute Komitante von zwei Vektoren (12) angesehen werden, weil es keine nicht triviale absolute Komitante von zwei Vektoren existiert. Dagegen können wir λ als relative Komitante von zwei linear abhängigen Vektoren (d.h. die Komitante in bezug auf die Menge $\mathfrak{M}_1$ gemäss der oben eingeführten Terminologie) bestimmen (vergl. [5], § 3, S. 320).

Der Begriff der relativen Komitante hat auch gewisse Bedeutung für das Auflösen der entsprechenden Funktionalgleichung (9). Aus den vorgeführten Betrachtungen folgt nämlich, dass die Lösung dieser Funktionalgleichung von dem vorausgesetzten Definitionsbereich $\mathfrak{M}$ der gesuchten Funktionen Ψ_i wesentlich abhängt.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb, *Sur quelques points concernant la notiòn du comitant*, Ann. Soc. Pol. Math. 17 (1938), S. 177-192.

[3] — *Sur les comitants algébriques des tenseurs*, Ann. Polon. Math. 9 (1960), S. 113-118.

[4] — und E. Siwek, *Sur les domaines de transitivité d'un groupe de transformations*, Ann. Polon. Math. 10 (1960), S. 209-216.

[5] M. Kucharzewski, *Über die skalaren Komitanten der Vektorfelder*, Ann. Polon. Math. 9 (1961), S. 311-323.

[6] — *Über die Vektorkomitanten der Vektorfelder*, Ann. Polon. Math. 9 (1961), S. 299-309.

[7] — *Die kovarianten Vektorkomitanten, die aus kontravarianten Vektoren gebildet sind*, Tensor 12 (1962), S. 140-150.

[8] M. Kucharzewski, *Die skalaren Komitanten, welche aus kovarianten und kontravarianten Vektoren gebildet sind*, Tensor 12 (1962), S. 158-166.

[9] A. Nijenhuis, *Theory of the geometric object*, Amsterdam 1952.

[10] J. A. Schouten and J. Haantjes, *On the theory of the geometric objects*, Proceedings of the London Math. Soc. 42 (2) (1937), S. 356-376.

[11] — *Zur Theorie des geometrischen Objektes*, Comptes rendus du Congr. Int. d. Math. Oslo 1936, II, Oslo 1937, S. 155-159.

[12] A. Wundheiler, *Objekte, Invarianten und Klassifikation der Geometrien*, Abhandlungen Sem. Vekt. Tens. Anal. Mosk. 4 (1937), S. 366-375.

[13] — *Fondements de la théorie des objets géométriques*, Ann. Soc. Pol. Math. 16 (1937), S. 198.

Reçu par la Rédaction le 21. 7. 1961