ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVI (1979)

# Transformations infinitésimales conformes des variétés finslériennes compactes

par H. Akbar-Zadeh (Paris)

**Résumé.** On donne une nouvelle caractérisation des transformations infinitésimales conformes d'une variété finslérienne, d'abord localement, puis lorsque la variété est compacte, en faisant apparaître, dans ce dernier cas, la courbure de la variété et on détermine les conditions pour que la composante connexe de l'identité du groupe de transformations conformes se compose d'isométries. Cas où la courbure scalaire et la courbure moyenne directionnelle sont constantes non positives.

**Introduction.** L'objet principal de ce travail est de caractériser le groupe des transformations conformes d'une variété finslérienne compacte et de démontrer que, dans certaines conditions, la composante connexe de ce groupe $C_0(M)$ se compose d'isométries $I_0(M)$. Après un bref rappel des notations de la géométrie finslérienne les t.i. conformes sont caractérisés d'abord localement (Théorème 1), puis lorsque la variété est compacte (Théorème 2). Des conditions équivalantes, faisant apparaître la courbure de la variété sont définies dans le théorème 3. Puis on introduit une forme quadratique $\Phi(X, X)$ qui s'exprime, en fonction du tenseur de Ricci et les dérivées covariantes du tenseur de torsion, si cette forme est définie négative la transformation conforme correspondant à $X$ se réduit à l'identité si elle est semi-définie négative ou si la courbure sectionnelle $\langle R(X, u)u, X\rangle$ est non positive, $X$ est une isométrie infinitésimale et à dérivée covariante du type horizontal nulle. Au paragraphe 4 on étudie le cas d'une variété proprement finslérienne et lorsque les deux derniers tensuers de courbure satisfont à certaines conditions (Théorème 4). Les sections 5 et 6 sont consacrés aux variétés à courbure scalaire et à courbure moyenne directionnelle constantes et on prouve que dans certaines conditions on a $C_0(M) = I_0(M)$ (Théorèmes 5 et 6). Enfin au paragraphe 7 on établit une formule de divergence pour les 1-formes verticales.

**0.** (a) Soit $M$ une variété différentiable, connexe, paracompacte de dimension $n$ et de classe $C^\infty$. On désigne par $T(M)\to M$ le fibré des vecteurs tangents à $M$, par $p\colon V(M)\to M$ le fibré des vecteurs non nuls tangents à $M$, par $W \to M$ le fibré des directions orientées tangentes à $M$. Un point de $V(M)$ sera noté par $z = (x, v)$ où $x = pz \in M$ et $v \in T_{pz}$. Si $DV(M)$ est l'anneau des fonctions différentiables sur $V(M)$ on désigne par $p^{-1}T(M)$ le fibré image réciproque de $T(M)$ par $p\colon V(M) \to M$ et par $\underline{p^{-1}T(M)}$ le $DV(M)$-module des sections différentiables de $p^{-1}T(M)$. Les éléments de $\underline{TV(M)}$ et de $\underline{p^{-1}T(M)}$ seront notés respectivement $\hat{X}$ et $X$ si $\hat{X}$ est au-dessus de $X$ alors $\varrho\hat{X} = X$. Soit $V$ le fibré des vecteurs verticaux, en chaque point $z \in V(M)$ on désigne par $V_z$ l'ensemble des vecteurs verticaux en $z$, c'est-à-dire des vecteurs qui sont tangents à la fibre passant par $z$ ($V_z = \ker p_*$ où $p_*\colon TV(M) \to TM$).

Définition. [2] Une variété finslérienne est définie par la donnée d'une variété $M$ de dimension $n$ de classe $C^\infty$ et d'une fonction $L$ sur $T(M)$ satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $L > 0$, $C^1$ sur $T(M)$ et $C^\infty$ sur $V(M)$;

2° $L(x, \lambda v) = \lambda L(x, v)$ $\forall \lambda \in R^+$;

3° Le Hessien $F_{**}(X, Y)(z) = X\big(Y(F)\big)(z) = g_z(X, Y)$, $z \in V(M)$, est une forme bilinéaire symétrique définie positive où nous avons posé $F = \frac{1}{2}L^2$ et où $X$ et $Y$ sont des champs de vecteurs verticaux et constants sur les fibres $V(M) \to M$.

Soit $U$ un voisinage d'un recouvrement de $M$ muni des coordonnées locales $(x^i)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Soit $(x^i, v^i)$ les coordonées induites sur $p^{-1}(U)$ où $v = v^i \dfrac{\delta}{\delta x^i} \in T_{pz}$ de $L^2(x, v)$ on obtient par dérivation verticale:

$$g_{ij}(x, v) = \delta_{ij}(\tfrac{1}{2}L^2) \qquad (\delta_i = \delta/\delta v^i).$$

Par rapport à ce recouvrement $g_{ij}$ est un tenseur homogène de degré zéro on a:

$$g_{ij}v^i v^j = g_z(v, v) = L^2.$$

(b) Soit $\nabla$ une loi de dérivation covariante dans $\underline{p^{-1}T(M)}$ c'est-à-dire une application

$$\nabla\colon \underline{TV(M)} \times \underline{p^{-1}T(M)} \to \underline{p^{-1}T(M)}$$

satisfaisant à la condition de dérivation covariante. A l'aide de $\nabla$ on définit une application linéaire $\mu_z\colon T_zV(M) \to T_{pz}(M)$ par:

$$\mu_z(\hat{X}) = \nabla_{\hat{X}} v, \qquad \hat{X} \in \underline{TV(M)}.$$

Nous dirons que $\nabla$ est *régulière* si pour tout $z \in V(M)$, $\mu_z$ définit un isomorphisme de $V_z$ sur $T_{pz}(M)$.

Supposons $\nabla$ régulière si $H_z = \ker(\mu_z)$ alors $T_z V(M)$ s'écrit d'une manière unique sous la forme:

$$T_z V(M) = H_z \oplus V_z \qquad (H_z \cap V_z = 0) \ (z \in V(M))$$

où $H_z$ sera dit l'espace horizontal défini par $\nabla$. Ainsi tout vecteur $\hat{X} \in T_z V(M)$ s'écrit:

$$\hat{X} = H\hat{X} + V\hat{X}$$

où $H\hat{X}$ (resp. $V\hat{X}$) est horizontal (resp. vertical). Avec les notations précédentes on a:

$$\varrho(\hat{X}) = \varrho(H\hat{X} + V\hat{X}) = \varrho(H\hat{X}) = X$$

où $V_z = \ker \varrho$. On définit la forme de torsion et de courbure de $\nabla$ par: [2]

$$T(\hat{X}, \hat{Y}) = \nabla_{\hat{X}} Y - \nabla_{\hat{Y}} X - \varrho([\hat{X}, \hat{Y}]), \tag{0.1}$$

$$\Omega(\hat{X}, \hat{Y})Z = \nabla_{\hat{X}} \nabla_{\hat{Y}} Z - \nabla_{\hat{Y}} \nabla_{\hat{X}} Z - \nabla_{[\hat{X}, \hat{Y}]} Z, \tag{0.2}$$

où $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z} \in \underline{TV(M)}$ et $X = \varrho(\hat{X})$, $Y = \varrho(\hat{Y})$ et $Z = \varrho(\hat{Z})$. Le théorème fondamental de la géométrie finslérienne s'énonce ainsi:

THÉORÈME. [1], [2] *Il existe sur $V(M)$ une connexion régulière unique attachée à $L$ telle que*:

1° $\nabla_{\hat{Z}} g = 0$;

2° $T(H\hat{X}, H\hat{Y}) = 0$;

3° $g_z\big(T(V\hat{X}, \hat{Y}), \varrho(\hat{Z})\big) = g_z\big(T(V\hat{X}, \hat{Z}), \varrho(\hat{Y})\big)$,

*où $\hat{X}$, $\hat{Y}$ et $\hat{Z} \in \underline{TV(M)}$. Dans ces conditions $\nabla$ est une connexion de direction.*

La connexion $\nabla$ ainsi définie sera dite la *connexion finslérienne attachée à $L$.* On désigne par $T$ le tenseur de torsion et par $R$, $P$ et $Q$ les trois tenseurs de courbure de $\nabla$.

**1. Transformations infinitesimales conformes.** Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$, $X$ définit une t.i. conforme s'il existe une fonction $\varphi$ sur $M$ telle que

$$L(\hat{X})g = 2\varphi g$$

où $L(\hat{X})$ est la dérivée de Lie définie par:

$$L(\hat{X}) = \nabla_{\hat{X}} + A_{\hat{X}}$$

avec:

$$A_{\hat{X}} Y = -[\nabla_{H\hat{Y}} X + T(\nabla_{\hat{v}} X, Y)]$$

soit:

$$A_{\hat{X}} g = 2\varphi g$$

d'où, quels que soient $Y$ et $Z \in \underline{p^{-1}T(M)}$

(1.1) $\quad 0 = A_{\hat{X}} g(Y, Z) = 2\varphi g(Y, Z) + g(A_{\hat{X}} Y, Z) + g(Y, A_{\hat{X}} Z)$

relation qui s'écrit:

(1.1)′ $\quad g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g(\nabla_{H\hat{Z}} X, Y) + 2g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Y), Z\big) = 2\varphi g(Y, Z).$

En coordonnées locales la condition (1.1)′ s'exprime par:

(1.2) $$\nabla_i X_j + \nabla_j X_i + 2T^h_{ij} \nabla_0 X_h = 2\varphi g_{ij}.$$

Désignons encore par $X$ la 1-forme associée à $X$, par dualité définie par la métrique et par $\varrho$ le scalaire:

$$\varrho = g(X, T^*) = T_*(X), \quad (T_*)_i = T^j_{ji},$$

de (1.2) on a:

(1.3) $$\varphi = -\frac{1}{n}\,\delta(X + \varrho v) = \frac{1}{n} \quad \text{trace } A_{\hat{X}}.$$

Ainsi (1.1)′ s'écrit:

(1.4) $$g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g(\nabla_{H\hat{Z}} X, Y) + 2g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Y), Z\big) + \\ + \frac{2}{n}\,\delta(X + \varrho v) g(Y, Z) = 0.$$

Avec:

(1.5) $$\nabla_{\hat{\dot{W}}}\, \delta(X + \varrho v) = 0,$$

où $\hat{\dot{W}}$ est un champ de vecteurs verticaux. La condition (1.5) est équivalente à

(1.5)′ $$\big(L(\hat{X}) T_*\big)(\dot{Y}) = 0.$$

Car d'après [1] la dérivée de Lie du tenseur de torsion s'écrit:

(1.6) $$\big(L(\hat{X}) T\big)(\dot{Y}, Z) = -(\nabla_{\hat{\dot{Y}}} A_{\hat{X}}) Z + \Omega(\hat{X}, \hat{\dot{Y}}) Z$$

où $\hat{\dot{Y}}$ est vertical. Or $\varphi$ étant défini par (1.3), en prenant la trace des deux membres de la relation précédente:

$$\big(L(\hat{X}) T_*\big)(\dot{Y}) = -\nabla_{\hat{\dot{Y}}} \quad \text{trace } A_{\hat{X}} = n \nabla_{\hat{\dot{Y}}} \varphi = 0.$$

Enfin une t.i. conforme laisse invariant le tenseur de torsion $T$ car si $X$ est conforme de (1.1) on obtient par dérivation verticale:

$$g\big((\nabla_{\hat{\dot{W}}} A_{\hat{X}}) Y, Z\big) + g\big(Y, (\nabla_{\hat{\dot{W}}} A_{\hat{X}}) Z\big) = 0.$$

Compte tenu de (1.6) cette relation s'écrit:

$$g\Big(\big(L(\hat{X}) T\big)(\dot{W}, Z), Y\Big) + g\Big(\big(L(\hat{X}) T\big)(\dot{W}, Y), Z\Big) = 0$$

le tenseur $T$ étant symétrique d'où:

$$g\big((L(\hat{X})T)(\dot{W}, Z), Y\big) = 0$$

quels que soient $\dot{W}$, $Z$ et $Y$. Ainsi $T$ est invariant par $X$.

*Caractérisation locale.*

THÉORÈME 1. *Pour qu'un champ de vecteurs $X$ sur $M$ définisse une t.i. conforme il faut et il suffit qu'il satisfasse à l'une des conditions équivalentes:*

(1) $g(A_{\hat{X}} Y, Z) + g(Y, A_{\hat{X}} Z) + 2\varphi g(Y, Z) = 0,$

(2) $g(\nabla_{H\hat{Y}} X, v) + g(Y, \nabla_{\hat{v}} X) = 2\varphi g(Y, v),$

*quels que soient $Y$ et $Z \in \underline{p^{-1}T(M)}$.*

Preuve. Il est clair que (1)⇒(2). Montrons que (2)⇒(1). On remarquera d'abord que les conditions (1) et (2) ne dépendent que de la partie horizontale de $\hat{Y}$, on peut donc supposer que le champ de vecteurs $\hat{Y}$ est projetable. Soit $\hat{Z}$ un champ de vecteurs sur $V(M)$ tel que:

$$\dot{Z} = \nabla_{\hat{Z}} v = \pi(\hat{Z}) = Z.$$

Dérivons verticalement la relation (2):

$$(1.7) \qquad g(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} X, v) + g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Y), Z\big) + g(Y, \nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} X) \\ = 2\varphi g(Y, Z) + 2\nabla_{\hat{Z}}\varphi g(Y, v),$$

or des équations de structure il résulte:

$$(1.8) \qquad g(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} X, v) = g\big((\nabla_{\hat{v}} T)(\dot{Z}, Y), X\big)$$

et

$$(1.9) \qquad \nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} X = \nabla_{\hat{v}} T(Z, X) + \nabla_{[\hat{Z}, \hat{v}]} X$$

or

$$Z = \pi([\hat{Z}, \hat{v}]), \qquad \nabla_{\hat{v}} Z + \nabla_{[\hat{Z}, \hat{v}]} v = 0.$$

Ainsi (1.9) s'écrit:

$$\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} X = (\nabla_{\hat{v}} T)(Z, X) + T(\nabla_{\hat{v}} X, Z) + \nabla_{H\hat{Z}} X$$

d'où

$$(1.10) \qquad g(Y, \nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} X) = g\big(X, (\nabla_{\hat{v}} T)(Z, Y)\big) + g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Z), Y\big) + \\ + g(\nabla_{H\hat{Z}} X, Y).$$

Portons (1.8) et (1.10) dans (1.7) on obtient:

$$(1.11) \qquad g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g(\nabla_{H\hat{Z}} X, Y) + 2g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Y), Z\big) \\ = 2(\nabla_{\hat{Z}}\varphi) g(Y, v) + 2\varphi g(Y, Z).$$

Posons $\hat{Y} = \hat{v}$ dans cette relation, en comparant le resultat ainsi obtenu avec la condition (2) on a:

$$\nabla_{\hat{Z}} \varphi = 0.$$

Ainsi $\varphi$ est une fonction sur $M$ et la relation (1.11) n'est autre que la condition (1).

**2. Cas compact.**

(a) A tout champ de vecteurs $X$ sur $M$ on associe, la fonction $\tau_X(Y, Z)$

$$(2.1)\qquad \tau(Y, Z) = g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g(\nabla_{H\hat{Z}} X, Y) + 2g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, Y), Z\big) + \frac{2}{n}\,\delta(X + \varrho v)\, g(Y, Z),$$

$$\varrho = g(X, T_*),$$

$\tau$ étant bilinéaire symétrique en $Y$ et $Z$ définit donc un tenseur covariant symétrique d'ordre 2. Relativement au repère natural $(e_i)$ des coordonnées locales, $\tau$ s'écrit:

$$(2.2)\qquad \tau(e_i, e_j) = \tau_{ij} = \nabla_i X_j + \nabla_j X_i + 2T^h_{ij}\nabla_0 X_h + \frac{2}{n} g_{ij}\,\delta(X + \varrho v)$$

d'où

$$(2.3)\qquad g^{ij}\tau_{ij} = 0.$$

Pour $X$ fixé, on considère la 1-forme $Y \to \tau(X, Y) = u_X(Y)$ dont les composantes sont:

$$(2.4)\qquad u_i = u_X\,(e_i) = \tau(X, e_i)$$

$$= g(\nabla_{\hat{e}_i} X, X) + g(\nabla_{H\hat{X}} X, e_i) + 2g\big(T(\nabla_{\hat{v}} X, X), e_i\big) + \frac{2}{n}\,\delta(X + \varrho v)\, g(X, e_i)$$

d'où

$$(2.5)\qquad -\delta u + \nabla_{\hat{v}}\big(\tau(X, T^*)\big)$$

$$= g(\tau, \tau) + (\nabla_{\hat{v}}\tau)(X, T^*) + g^{ij}(\nabla_{\hat{e}_j}\tau)(X, e_i) + \tau(\nabla_{\hat{v}} X, T^*) - T^{ij}_h \tau_{ij} (\nabla_{\hat{v}} X)^h$$

il faut calculer les deux dernièrs termes du second membre de cette relation. Pour cela partons de la relation:

$$g^{ih} T_i = g^{ij} T^h_{ij}$$

d'où

$$[g^{ih} L(\hat{X}) T_i - g^{ij} L(\hat{X}) T^h_{ij}] = \tau^{ih} T_i - \tau^{ij} T^h_{ij}$$

soit encore, en explicitant le premier membre:

$$\tau^{ih} T_i - \tau^{ij} T^h_{ij} = -\nabla_{\dot{k}}\, \tau^{kh} - \left(2 - \frac{2}{n}\right) \dot{\nabla}^h \delta(X + \varrho v)$$

d'où

$$(\tau^{ih}T_i - \tau^{ij}T^h_{ij})\,\nabla_0 X_h = -\nabla_0\Big(X_h\Big[\nabla_{\dot k}\,\tau^{kh} + \Big(2-\frac{2}{n}\Big)\nabla^{\dot h}\,\delta(X+\varrho v)\Big]\Big) + $$
$$+ X_h\Big[\nabla_0\nabla_{\dot k}\,\tau^{kh} + \Big(2-\frac{2}{n}\Big)\nabla_0\nabla^{\dot h}\,\delta(X+\varrho v)\Big].$$

Reportant cette expression dans (2.5) on obtient:

$$-\delta u + \nabla_{\hat v}\big(\tau(X, T^*)\big) + \nabla_0\Big[X_h\Big(\nabla_{\dot k}\,\tau^{kh} + \Big(2-\frac{2}{n}\Big)\nabla^{\dot h}\,\delta(X+\varrho v)\Big] = g(\tau, \tau) + \zeta(X). \tag{2.6}$$

Avec:

$$\zeta_h = \nabla^i \tau_{ih} + T^i\nabla_0\tau_{ih} + \nabla_0\nabla^{\cdot k}\tau_{kh} + \Big(2-\frac{2}{n}\Big)\nabla_0\nabla_{\dot h}\;\delta(X+\varrho v) \tag{2.7}$$

où $\zeta(X)$ est une 1-forme sur $W(M)$. De (2.6) on obtient par intégration sur $W(M)$:

$$\langle\tau, \tau\rangle + \int_W \zeta(X)\eta(g) = 0 \tag{2.8}$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire global. De (2.8) on obtient le:

THÉORÈME 2. *Pour qu'un champ de vecteurs sur une variété finslérienne compacte définisse une transformation infinitésimale conforme il faut et il suffit que $\zeta$ s'annule partout sur $W(M)$.*

(b) Dans la suite de ce paragraphe on considère le champ de vecteurs $X$ satisfaisant à (1.5) soit:

$$\delta_i\,\delta(X+\varrho v) = 0, \qquad \varrho = g(X, T^*). \tag{2.9}$$

De l'expression de $\tau(Y, Z)$ définie par (2.1) on obtient:

$$\tau(Y, v) = g(\nabla_{H\hat Y}X, v) + g(\nabla_{\hat v}X,\ Y) + \frac{2}{n}\delta(X+\varrho v)g(Y, v), \tag{2.10}$$

$$\tau(v, v) = 2\nabla_{\hat v}\,g(X, v) + \frac{2}{n}\delta(X+\varrho v)g(v, v). \tag{2.11}$$

Posons:

$$C(Y) = (\nabla_{\hat v}\tau)(Y, v) - (\tfrac{1}{2})(\nabla_{H\hat Y}\tau)(v, v). \tag{2.12}$$

En vertu de (2.10) et (2.11) on obtient:

$$C(Y) = g\big(I(X),\ Y\big) + \frac{2}{n}\nabla_{\hat v}\,\delta(X+\varrho v)g(v, Y) - \frac{1}{n}\nabla_{H\hat Y}\,\delta(X+\varrho v)g(v, v) \tag{2.13}$$

avec:

$$I(X) = \nabla_{\hat{v}} \nabla_{\hat{v}} X + R(X, v)v \tag{2.14}$$

où $I(X) \in \underline{p^{-1}T(M)}$. Soit $V_z$ l'ensemble des vecteurs verticaux en $z$ et $\mu_z$ l'isomorphisme de $V_z$ sur $T_{pz}$ défini par $\mu(\hat{Z}) = \nabla_{\hat{Z}} v$ alors $I(X)$ s'écrit:

$$I(X) = \mu([\hat{v}, \hat{X}]). \tag{2.15}$$

Lemme 1. *Soit $\hat{Z}$ un champ de vecteurs sur $V(M)$ tel que*

$$\nabla_{\hat{Z}} v = \dot{Z} = \pi(\hat{Z}) = Z$$

*on a alors quel que soit $Y \in \underline{p^{-1}T(M)}$:*

$$(\nabla_{\hat{Z}} \tau)(Y, v) + \tau\big(T(Z, Y), v\big) = 0. \tag{2.16}$$

Preuve. Soit $\hat{Z}$ un champ de vecteurs satisfaisant à la condition du lemme, de (2.10) on obtient par dérivation covariante verticale, en tenant compte de (2.9)

$$\begin{aligned}(\nabla_{\hat{Z}}\tau)(Y, v) + \tau(\nabla_{\hat{Z}} Y, v) + \tau(Y, Z) &= g(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} X, v) + g(\nabla_{H\hat{Y}} X, Z) + g(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{v} X, Y) + g(\nabla_{\hat{v}} X, \nabla_{\hat{Z}} Y) + \\ &\quad + \frac{2}{n}\delta(X + \varrho v)[g(\nabla_{\hat{Z}} Y, v) + g(Y, Z)].\end{aligned} \tag{2.17}$$

En utilisant les équations de structure on obtient:

$$g(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} X, v) = g(\nabla_{H[\hat{Z}, H\hat{Y}]} X, v) - g\big((\nabla_{\hat{v}} T)(Z, Y), X\big),$$

$$\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} X = (\nabla_{\hat{v}} T)(Z, X) + T(Z, \nabla_{\hat{v}} X) + \nabla_{H\hat{Z}} X.$$

En reportant ces relations dans (2.17) et en tenant compte de la définition de $\tau$ on obtient la formule (2.16)

Lemme 2. *$\hat{Z}$ étant défini comme dans le lemme 1 on a pour tout $\hat{Y}$ horizontal et projetable:*

$$(\nabla_{\hat{Z}} C)(Y) + C\big(T(Z, Y)\big) = (\nabla_{\hat{v}} \tau)(Y, Z) + (\nabla_{H\hat{Z}} \tau)(Y, v) - (\nabla_{H\hat{Y}} \tau)(Z, v). \tag{2.18}$$

Preuve. De l'expression de $C(Y)$ (2.12) on déduit:

$$\begin{aligned}(\nabla_{\hat{Z}} C)(Y) + C\big(T(Z, Y)\big) &= (\nabla_{\hat{v}} \tau)(Y, Z) - (\nabla_{H\hat{Y}} \tau)(Z, v) + \\ &\quad + (\nabla_{\hat{v}} \tau)\big(T(Z, Y), v\big) + (\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} \tau)(Y, v) - (\tfrac{1}{2})(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} \tau)(v, v)\end{aligned} \tag{2.19}$$

il faut donc calculer les trois derniers termes du second membre. Ecrivons l'identité de Ricci, quels que soient $\hat{Z}$, $\hat{X}$, $Y$ et $W$ on a:

$$(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{X}} \tau)(Y, W) - (\nabla_{\hat{X}} \nabla_{\hat{Z}} \tau)(Y, W) - (\nabla_{[\hat{Z}, \hat{X}]} \tau)(Y, W) = -\tau\big(\Omega(\hat{Z}, \hat{X}) Y, W\big) - \tau\big(Y, \Omega(\hat{Z}, \hat{X}) W\big). \tag{2.20}$$

Posons dans (2.20), $\hat{Z} = \hat{\hat{Z}}$, $\hat{X} = \hat{v}$, $W = v$, en vertu de lemme 1 nous obtenons:

$$(2.21) \qquad (\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{\hat{v}} \tau)(Y, v) + (\nabla_{\hat{v}} \tau)\big(T(Z, Y), v\big) = (\nabla_{H\hat{Z}} \tau)(Y, v) - \tau\big((\nabla_{\hat{v}} T)(Z, Y), v\big)$$

de la formule (2.16) du lemme 1, il vient:

$$(\nabla_{\hat{Z}} \tau)(v, v) = 0.$$

De l'identité (2.20) et du lemme 1 il resulte:

$$(2.22) \qquad -(\tfrac{1}{2})(\nabla_{\hat{Z}} \nabla_{H\hat{Y}} \tau)(v, v) = \tau\big((\nabla_{\hat{v}} T)(Z, Y), v\big).$$

En portant (2.22) et (2.21) dans (2.19) on obtient (2.18). Comme conséquence de (2.18), on a en symétrisant:

$$(2.23) \qquad (\nabla_{\hat{Z}} C)(Y) + (\nabla_{\hat{Y}} C)(Z) + 2C\big(T(Z, Y)\big) = 2(\nabla_{\hat{v}} \tau)(Z, Y).$$

Nous sommes maintenant en mésure d'anoncer le:

THÉORÈME 3. *Pour qu'un champ de vecteurs $X$ sur une variété finslérienne compacte définisse une t.i. conforme il faut et il suffit qu'il satisfasse à:*

$$(2.24) \qquad \nabla_{\hat{v}} \nabla_{\hat{v}} X + R(X, v)v + g(v, v)\varphi^* - 2\varphi_*(v)v = 0 \qquad (\varphi_* = d\varphi)$$

*où $\varphi$ est une fonction sur $M$ définie par:*

$$\varphi = -\frac{1}{n}\,\delta(X + \varrho v), \qquad \varrho = g(X, T^*)$$

*et $\varphi^*$ est le vecteur dual de $\varphi_*$.*

Preuve. Si $X$ est conforme, d'après (2.12), $C(Y)$ est nul, d'où (2.24). Inversement supposons $X$ satisfait à (2.9) et (2.24). De la formule (2.23) conséquence du lemme 2 il résulte que $(\nabla_{\hat{v}} \tau)$ est partout nul on en déduit d'après l'identité de Ricci la relation:

$$\nabla^i \nabla_0 \tau_{ik} = \nabla^i \tau_{ik} + \nabla_0 \nabla^i \tau_{ik} = 0.$$

Mais $\delta(X + \varrho v)$ étant indépendant de la direction ainsi la 1-forme $\zeta$ définie par (2.7) s'annule partout donc $X$ est une t.i. conforme, d'après le théorème 2.

**3. Courbure et transformations infinitésimales conformes.** Soit $X$ une t.i. conforme du théorème 3 il résulte:

$$(3.1) \qquad g(\nabla_{\hat{u}} X, \nabla_{\hat{u}} X) = \nabla_{\hat{u}}\, g(\nabla_{\hat{u}} X, X) + g\big(R(X, u)u, X\big) + \varphi_*(X) - 2g(X, u)\varphi_*(u)$$

où: $u = \mathscr{L}^{-1} v$ et $\hat{u} = \mathscr{L}^{-1} \hat{v}$.

Nous allons calculer les deux derniers termes du second membre de (3.1). Nous obtenons d'abord:

$$\varphi_*(X) = -\delta[(X+\varrho v)\varphi] - n\varphi^2 - g(X, T^*)\varphi_*(v). \tag{3.2}$$

Soit $Y$ la 1-forme définie par:

$$Y = \varphi_*(u)X.$$

Associons à $Y$ la 1-forme verticale sur $W(M)$ définie par:

$$\hat{Y} = Y - Y(u)u_*$$

où $u_*$ est la 1-forme associée au champ de vecteurs unitaires $u$. D'après (3.2) on obtient:

$$-\delta\hat{Y} = 2g(X, \dot{T}^*)\varphi_*(v) + \varphi_*(X) - ng(X, u)\varphi_*(u). \tag{3.3}$$

En multipliant par 2 la relation (3.2) et en ajoutant à (3.3) on obtient:

$$\varphi_*(X) = \delta\hat{Y} - 2\delta[(X+\varrho v)\varphi] - n\nabla\hat{u}\big(g(X, u)\varphi\big) - n\varphi^2. \tag{3.4}$$

D'autre part on a:

$$-2g(X, u)\varphi_*(u) = 2\varphi^2 - 2\nabla\hat{u}\big(\varphi g(X, u)\big). \tag{3.5}$$

Ainsi (3.1) devient:

$$g(\nabla\hat{u}X, \nabla\hat{u}X) = g\big(R(X, u)u, X\big) - \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)\delta(X+\varrho v)^2 + \delta\hat{Y} +$$
$$+ \nabla\hat{u}\big(g(\nabla\hat{u}X, X)\big) - 2\delta\big((X+\varrho v)\varphi\big) - (n+2)\nabla\hat{u}\big(\varphi g(X, u)\big),$$

$M$ étant supposée compacte, les quatre derniers termes du second membre sont des divergences, en utilisant le *lemme principal* (voir C. R. A. S., t. 278, 1974. formule 4.2) on obtient:

$$\langle\nabla\hat{u}X, \nabla\hat{u}X\rangle = \int_W \left[\big(R(X, u)u, X\big) - \frac{1}{n}\left(1-\frac{2}{n}\right)\delta(X+\varrho v)^2\right]\eta(g) \tag{3.6}$$
$$= \frac{1}{n}\int_W \left[\Phi(X, X) - \left(1-\frac{2}{n}\right)\delta(X+\varrho v)^2\right]\eta(g).$$

Avec:

$$\Phi(X, X) = [H_{ij} + 2(\nabla_i\nabla_0 T_j - \nabla_r\nabla_0 T^r_{ij})]X^i X^j. \tag{3.7}$$

Si $\Phi(X, X)$ est définie négative alors $X$ est nul. La transformation conforme correspondant à $X$ se réduit à l'identité si $\Phi(X, X)$ est semi-définie négative ou si la courbure sectionnelle $\big(R(X, u)u, X\big)$ est non positive, alors $X$ est à dérivée covariante du type horizontal nulle.

Corollaire. *Si la forme quadratique $\Phi(X, X)$ est définie négative la transformation conforme correspondant à $X$ se réduit à l'identité si $\Phi(X, X)$*

*est semi-définie négative ou si la courbure sectionnelle $(R(X, u)u, X)$ est non positive, $X$ est à dérivée covariante du type horizontal nulle.*

En particulier sur une variété Minkowskienne compacte il n'existe pas des transformations conformes propres.

**4. Cas où $C_0(M) = I_0(M)$.** Soit $C_0(M)$ (resp. $I_0(M)$) la composante connexe de l'identité du groupe de transformations conformes (resp. le groupe d'isométrie) on suppose $M$ compacte et on va étudier le cas où $C_0(M) = I_0(M)$. Pour obtenir cette égalité nous imposerons d'abord des conditions aux deux derniers tenseurs de courbure $P$ et $Q$ de la variété, puis nous étudions le cas où la courbure scalaire est constante. Soit $U$ un voisinage de $M$ muni des coordonnées locales $(x^i)$, on désigne par $(x^i, v^i)$ les coordonnées iduites sur $p^{-1}(U)$ $(p\colon V(M)\to M)$. Les coefficients de la connexion finslérienne relativement au repère naturel sont [1]:

$$\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = (\tfrac{1}{2})g^{ih}[\delta_k g_{hj} + \delta_j g_{hk} - \delta_h g_{kj}] - [T^i_{js}\overset{*}{\Gamma}{}^s_{0k} + T^i_{ks}\overset{*}{\Gamma}{}^s_{0j} - T_{jks}g^{ih}\overset{*}{\Gamma}{}^s_{0h}]. \tag{4.1}$$

Soit $X$ une t.i. conforme de (4.1) on obtient:

$$L(\hat{X})\overset{*}{\Gamma}{}^i_{00} = 2v^i\varphi_0 - \mathscr{L}^2\varphi^i \qquad (\varphi_i = \nabla_i\varphi,\ \varphi_0 = \varphi_i v^i), \tag{4.2}$$

$$L(\hat{X})\overset{*}{\Gamma}{}^i_{0k} = v^i\varphi_k + \delta^i_k\varphi_0 - v_k\varphi^i + \mathscr{L}^2 T^i_{ks}\varphi^s, \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} L(\hat{X})\overset{*}{\Gamma}{}^i_{jk} = {} & \delta^i_j\varphi_k + \delta^i_k\varphi_j - g_{jk}\varphi^i - T^i_{jk}\varphi_0 + v^i\,\dot{\nabla}_j\varphi_k - \\ & - v_k\,\dot{\nabla}_j\varphi^i - v_j\,\dot{\nabla}_k\varphi^i + \mathscr{L}^2 Q^i_{jkr}\varphi^r - \mathscr{L}^2 T^i_{js}T^s_{kr}\varphi^r, \end{aligned} \tag{4.4}$$

où

$$Q^i_{jkl} = T^i_{sl}T^s_{jk} - T^i_{ks}T^s_{jl}. \tag{4.5}$$

D'autre part le covecteur de torsion $T_i$ étant invariant par $X$ on a:

$$L(\hat{X})\nabla_0 T_i = T_i\varphi_0 + v_i T_s\varphi^s + \mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_s T_i\varphi^s. \tag{4.6}$$

Calculons le carré de $\mathscr{L}\dot{\nabla}_j\varphi_i$:

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_j\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\varphi^j &= \mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_j[\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\varphi^j] - \mathscr{L}^2\varphi^i\,\dot{\nabla}_j\,\dot{\nabla}_i\varphi^j \\ &= \mathscr{L}\dot{\nabla}_j[\mathscr{L}\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\varphi^j] - \mathscr{L}^2\varphi^i[\dot{\nabla}_i\,\dot{\nabla}_j\varphi^j + Q_{ij}\varphi^j] \\ &= \mathscr{L}[\dot{\nabla}_j(\mathscr{L}\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\varphi^j) + \mathscr{L}T_j\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\varphi^j] - \\ &\qquad - \mathscr{L}^2\varphi^i T_j\,\dot{\nabla}_i\varphi^j - \mathscr{L}^2\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\,\dot{\nabla}_j\varphi^j - \mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j \end{aligned} \tag{4.7}$$

or

$$-\mathscr{L}^2\varphi^i\,\dot{\nabla}_i\,\dot{\nabla}_j\varphi^j = \mathscr{L}^2\varphi^i T_j\,\dot{\nabla}_i\varphi^j + \mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_i T_j\varphi^i\varphi^j.$$

Ainsi (4.7) s'écrit:

$$\mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_j\varphi_i\,\dot{\nabla}^j\varphi^i = -\delta Y - \mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j + \mathscr{L}^2\,\dot{\nabla}_i T_j\varphi^i\varphi^j. \tag{4.8}$$

Avec

$$Y_j = \mathscr{L}\varphi^i \nabla_i^{\cdot}\varphi^j.$$

On va calculer le dernier terme du second membre de (4.8):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot} T_j \varphi^i \varphi^j &= \mathscr{L}\nabla_i^{\cdot}(\mathscr{L}T_j\varphi^i\varphi^j) - T_j\varphi^j\varphi_0 - \mathscr{L}^2 T_j\varphi^j \nabla_i^{\cdot}\varphi^i - \mathscr{L}^2 T_j\varphi^i \nabla_i^{\cdot}\varphi^j \\ &= \mathscr{L}\{\nabla_i^{\cdot}(\mathscr{L}T_j\varphi^j\varphi^i) + \mathscr{L}T_i\varphi^i T_j\varphi^j - (n-1)\mathscr{L}^{-1}T_j\varphi^j\varphi_0\} + \\ &\qquad + (n-2)T_j\varphi^j\varphi_0 + \mathscr{L}^2 T_h T^h_{ij}\varphi^i\varphi^j \\ &= \mathrm{Div} + (n-2)T_j\varphi^j\varphi_0 + \mathscr{L}^2 T_h T^h_{ij}\varphi^i\varphi^j\end{aligned}$$

or

$$Q_{ij} = T^h_{is}T^s_{hj} - T_s T^s_{ij}$$

ainsi

$$\mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot} T_j\varphi^i\varphi^j = \mathrm{Div} + (n-2)T_j\varphi^j\varphi_0 + \mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot}\varphi^j \nabla_j^{\cdot}\varphi^i - \mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j \tag{4.9}$$

où

$$\mathrm{Div} = -\delta Z, \qquad Z_i = -\mathscr{L}\nabla_j^{\cdot}\varphi^j\varphi_i + \nabla_j^{\cdot}\varphi^j\varphi_0 u_i.$$

Portons (4.9) dans (4.8):

$$2\mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j = -\delta(Y+Z) + (n-2)T_j\varphi^j\varphi_0. \tag{4.10}$$

De (4.6) on obtient:

$$\varphi^i L(\hat{X})\nabla_0 T_i = 2\varphi_0 T_i\varphi^i + \mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot} T_j\varphi^i\varphi^j.$$

Ainsi (4.8) s'écrit:

$$\mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot}\varphi_j \nabla^{\cdot i}\varphi^j = -\delta Y - \mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j - 2\varphi_0 T_i\varphi^i + \varphi^i L(\hat{X})\nabla_0 T_i. \tag{4.11}$$

Les formules (4.10) et (4.11) nous donnent de deux manières différentes l'expression $\varphi_0 T_i\varphi^i$, il en résulte:

$$\begin{aligned}&\frac{n-2}{2}\mathscr{L}^2 \nabla_i^{\cdot}\varphi_j \nabla^{\cdot i}\varphi^j + \left(\frac{n+2}{2}\right)\mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j \\ &\qquad = -\delta(Y+Z) - \left(\frac{n-2}{2}\right)\delta Y + \left(\frac{n-2}{2}\right)\varphi^i L(\hat{X})\nabla_0 T_i.\end{aligned} \tag{4.12}$$

On suppose maintenant $\dim M > 2$ et

(1) $L(\hat{X})\nabla_{\hat{0}} T_* = 0$,

(2) $\int_W \mathscr{L}^2 Q_{ij}\varphi^i\varphi^j \geqslant 0$.

De (4.12) il résulte aussitôt, par intégration sur $W$ que $\nabla_i^{\cdot}\varphi_j$ est partout nul. Or la condition (1) entraîne alors:

$$T_i\varphi_0 = 0.$$

Si $M$ est proprement finslérienne ($T \neq 0$) de la relation précédente il resulte $\varphi = 0$ donc $C_0(M) = I_0(M)$:

THÉORÈME 4. *Soit* $(M, g)$ *une variété proprement finslérienne compacte* ($\dim M > 2$) *et* $X$ *une t.i. conforme satisfaisant à*:

(1) $L(\hat{X}) \nabla_{\hat{v}} T_* = 0$,

(2) $\int_W \mathscr{L}^2 Q_{ij} \varphi^i \varphi^j \eta(g) \geqslant 0$.

*Alors* $C_0(M) = I_0(M)$.

**5. Cas où la courbure scalaire est constante non positive.** On suppose toujours $M$ compacte et le covecteur de torsion satisfait à:

$$\nabla_{\hat{v}} T_* = 0. \tag{5.1}$$

Si $X$ est une transformation infinitésimale conforme de (4.12) on a alors l'inégalité ($n > 2$):

$$\int_W \mathscr{L}^2 Q_{ij} \varphi^i \varphi^j < 0.$$

La dérivée de Lie par $X$ du tenseur de Ricci $H_{jl}$ de la connexion de Berwald s'écrit:

$$\begin{aligned} L(\hat{X}) H_{jl} = & -(n-2) D_j \varphi_l - g_{jl} D_i \varphi^i - v_l \dot{\delta}_j D_i \varphi^i + \\ & + v_j [D_l \dot{\delta}_i \varphi^i - D_i \dot{\delta}_l \varphi^i] + (\tfrac{1}{2}) \mathscr{L}^2 \dot{\delta}_j [D_l \dot{\delta}_i \varphi^i - D_i \dot{\delta}_l \varphi^i]. \end{aligned} \tag{5.2}$$

où $D$ est la dérivée covariante dans la connexion de Berwald. Supposons:

$$g^{jl} H_{jl} = H = C^{te} \leqslant 0. \tag{5.3}$$

De (5.2) on obtient:

$$\begin{aligned} 2\varphi H = & -2(n-1) g^{jl} D_j \varphi_l - n D_0 (T^i \varphi_i) - \mathscr{L} g^{jl} \dot{\delta}_j Y_l - \\ & -(\tfrac{1}{2}) \mathscr{L} g^{jl} \dot{\delta}_j (\mathscr{L} D_i \dot{\delta}_l \varphi^i). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Avec:

$$Y_l = \mathscr{L} D_l (T^i \varphi_i) - u_l D_0 (T^i \varphi_i) \qquad (u = \mathscr{L}^{-1} v).$$

Les deux derniers termes du second membre de (5.4) sont des divergences des formes verticales. On en déduit compt tenu de (4.10) la formule:

$$H \varphi^2 = \left[ (n-1) g_{ij} + \frac{n}{(n-2)} \mathscr{L}^2 Q_{ij} \right] \varphi^i \varphi^j + \mathrm{Div} \tag{5.5}$$

où Div désigne la divergence des 1-formes. Nous sommes ainsi conduits à poser:

$$g_{ij} = (n-1) g_{ij} + \frac{n}{(n-2)} \mathscr{L}^2 Q_{ij}.$$

De (5.5) on obtient par intégration:

$$H \int_W \varphi^2 \eta(g) = \int_W q_{ij} \varphi^i \varphi^j \eta(g).$$

Si $q_{ij}$ est définie positive de l'égalité précédente il résulte que $\varphi_i = 0$, $M$ étant compacte, ainsi $X$ est une isométrie infinitésimale. Nous obtenons ainsi la généralisation d'un resultat dû à Lichnerowicz [5].

THÉORÈME 5. *Sur une variété finslérienne compacte* ($\dim M > 2$) *à courbure scalaire constante non positive satisfaisant à:*

(1) $\nabla_{\hat{v}} T_* = 0$,

(2) $q_{ij} = (n-1) g_{ij} + \dfrac{n}{n-2} \mathscr{L}^2 Q_{ij}$ (déf $> 0$),

*le plus grand groupe connexe des transformations conformes coïncide avec le plus grand groupe connexe d'isométrie.*

**6. Cas où la courbure moyenne directionnelle est constante.** Rappelons d'abord que la courbure moyenne directionnelle $C$ ($H_{ij} v^i v^j = \mathscr{L}^2 C(x, v)$) est liée à la courbure scalaire par:

$$H - (\tfrac{1}{2}) \nabla_0 (g^{ij} G^r_{irj}) = nC + (\tfrac{1}{2}) \mathscr{L} g^{ij} \dot{\delta}_i (\mathscr{L} \dot{\delta}_j C).$$

Supposons $C$ constante et $T_*$ satisfaisant à (5.1) de (5.2) on obtient:

$$2\varphi C = -(n-2) \frac{\nabla_0 \varphi_0}{\mathscr{L}^2} - \nabla_i \varphi^i - \nabla_0 (T_i \varphi^i). \tag{6.1}$$

D'autre part si l'on pose:

$$Z_i = \mathscr{L}^{-1} \varphi_0 \varphi_i - u_i (\varphi^*(u))^2 \qquad (u = \mathscr{L}^{-1} v)$$

on a:

$$-\delta Z = g_{ij} \varphi^i \varphi^j - n \varphi_*(u)^2$$

d'où, $M$ étant compacte:

$$\int_W g_{ij} \varphi^i \varphi^j \eta(g) = n \int_W \varphi_*(u)^2 \eta(g) \tag{6.2}$$

utilisant la formule (4.10) et (6.2), de (6.1) on obtient:

$$n \varphi^2 C = q_{ij} \varphi^i \varphi^j + \mathrm{Div}. \tag{6.3}$$

Avec $q_{ij}$ défini par

$$q_{ij} = (n-1) g_{ij} + \frac{n}{(n-2)} \mathscr{L}^2 Q_{ij}. \tag{6.4}$$

De (6.4) on a alors par intégration sur $W(M)$:

$$nC\int_W \varphi^2\eta(g) = \int_W q_{ij}\varphi^i\varphi^j\eta(g).$$

THÉORÈME 6. *Soit* $(M, g)$ *une variété finslérienne compacte* ($\dim M > 2$) *à courbure moyenne directionnelle constante non positive et satisfaisant à* (5.1). *Si la forme quadratique* $q_{ij}$ *définie par* (6.4) *est définie positive alors* $C_0(M) = I_0(M)$.

**7. Une formule.** Nous avons établi dans [1], lorsque la variété est compacte, une formule de divergence pour une 1-forme horizontale. Nous démontrons ici une formule analogue pour une 1-forme verticale. Soit $u$ le champ de vecteurs unitaires correspondant à $v\cdot(u = \mathscr{L}^{-1}v)$. On désigne encore par $u$ la 1-forme associée à $u$, par dualité définie par la métrique du est partout de rang $2(n-1)$ sur $W(M)$ donc $(u, du)$ définit une structure pfaffienne sur $W(M)$. On notera par $\eta(g)$ l'élément de volume de $W(M)$:

$$\eta(g) = (-1)^N u\wedge(du)^{n-1}/(n-1)! \qquad (N = n(n-1)/2).$$

Soit $(x, e_1, \ldots, e_{n-1}, u)$ un repère orthonormé de $T_{py}$ $(y \in W)$ $(u = e_n)$. On a:

$$u = u_i e_i = e_n \Rightarrow u_a = 0, \qquad u_n = 1,$$

désignons par $\beta_i = \nabla u_i$ soit:

$$\beta_n = \omega_{nn} = 0, \qquad \beta_\lambda = \omega_{\lambda n} \qquad (\lambda = 1, \ldots, n-1)$$

relativement à ce repère l'élément de volume $\eta$ s'écrit:

$$\eta = \beta\wedge\omega$$

avec

$$\beta = \beta_1\wedge \ldots \wedge\beta_{n-1}, \qquad \omega = \omega_1\wedge \ldots \wedge\omega_n$$

où $(\omega_i)$ est le repère dual de $(e_i)$. Soit $b$ une 1-forme verticale sur $W$:

$$(7.1)\qquad \begin{aligned} b &= \sum_{\lambda=1}^{n-1} b_\lambda\beta_\lambda \qquad (b_n = 0),\\ {}^*b &= \sum_{\lambda=1}^{n-1}(-1)^{\lambda-1}b_\lambda\beta_1\wedge\ldots\wedge\hat{\beta}_\lambda\wedge\ldots\wedge\beta_{n-1}\wedge\omega \end{aligned}$$

où le signe $\wedge$ signifie que le terme correspondant doit être omis dans le produit extérieure considéré d'où:

(7.2) $d(^*b)$

$$= \sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda-1} db_\lambda \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\lambda \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge \omega +$$
$$+ \sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda-1} b_\lambda \sum_{\mu\neq\lambda} (-1)^{\mu-1} d\beta_\mu \wedge \beta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\mu \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\lambda \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge \omega +$$
$$+ (-1)^{n-2} \sum_{\lambda=1}^{n-1} (-1)^{\lambda-1} b_\lambda \beta_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\beta}_\lambda \wedge \ldots \wedge \beta_{n-1} \wedge d\omega$$

il faut donc calculer les termes $d\beta_\mu$ et $d\omega$. On a tout d'abord:

$$d\beta_i = \beta_h \wedge \omega_{ih} + (\tfrac{1}{2}) \mathscr{L}^{-1} R_{i0kl} \omega_k \wedge \omega_l + P_{i0kl} \omega_k \wedge \beta_l$$

d'où modulo des termes contenant les $\omega_k$:

$$d\beta_i \equiv \beta_h \wedge \omega_{ih} \quad (\operatorname{mod} \omega_k) \tag{7.3}$$

de même

$$d\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} d\omega_i \wedge \omega_1 \wedge \ldots \wedge \hat{\omega}_i \wedge \ldots \wedge \omega_n$$

or:

$$d\omega_i + \omega_{ij} \wedge \omega_j = \mathscr{L} T_{ijh} \beta_h \wedge \omega_j.$$

Ainsi

$$d\omega = \mathscr{L} T_{iih} \beta_h \wedge \omega. \tag{7.4}$$

En reportant (7.3) et (7.4) dans (7.2) on obtient:

$$d(^*b) = \mathscr{L}[\nabla^{\cdot}_\lambda b_\lambda + b_\lambda T_{ii\lambda}]\eta$$

où $\nabla^{\cdot}_\lambda$ désigne la dérivée covariante par rapport au corepère $(\nabla v^\lambda)$ or

$$u^i \nabla_i b_n = 0 \Rightarrow u^n \nabla^{\cdot}_n b_n = 0 = \nabla^{\cdot}_n b_n.$$

Ainsi

$$\delta b = -\mathscr{L}(\nabla^{\cdot}_i b_i + b_j T_{iij}).$$

Supposons $M$ compacte on a alors:

$$\int_{W(M)} \delta b \eta(g) = -\int \mathscr{L}(\nabla^{\cdot i} b_i + b^j T_j)\eta(g) = 0 \tag{7.5}$$

à cette relation on donne le nom de la *formule de divergence.*

**Références**

[1] H. Akbar-Zadeh, *Les espaces de Finsler et certaines de leurs généralisations*, Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup., 3-ème série, 80 (1963), p. 1–79.
[2] — *Espaces de nullité en géométrie Finslérienne*, Tensor N. S. 26 (1972).
[3] — *Sur les isométries infinitésimales d'une variété Finslérienne compacte*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 278, sér. A (1974), p. 871.
[4] — *Transformations infinitésimales conformes des variétés Finslériennes compactes*, ibidem t. 281, sér. A (1975), p. 655.
[5] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Paris 1968.

*Reçu par la Rédaction le 5. 1. 1976*