ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVIII (1980)

Sur quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions convexes vers l'axe réel négatif

par KRYSTYNA CIOZDA (Lublin)

Abstract. Let L_0 denote the class of functions of the form $f(z) = a_0+a_1z+\ldots$, holomorphic and schlicht in $\Delta = \{z\colon |z|<1\}$, such that for each function $f\in L_0$ the domain $f(\Delta)$ has the following property: if $w_0\in C\setminus f(\Delta)$, then the halfline $w_\lambda = w_0-\lambda$, $\lambda\in [0,\infty)$, or the line $w_\lambda = w_0+\lambda$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$, is contained in $C\setminus f(\Delta)$. The paper deals with various extremal problems in certain subclasses of the class L_0.

1. Introduction. Dans le travail [2] nous avons étudié les classes des fonctions convexes vers l'axe réel négatif; dans la présente note nous allons établir des résultats plus généraux et plus détaillés concernant ces classes. Nous commencerons par rappeler quelques définitions fondamentales qui nous seront indispensables.

Soit S_0 la classe des fonctions f de la forme $f(z) = a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots$, holomorphes et univalentes dans le cercle Δ, où $\Delta_r = \{z\colon |z|<r\}$, $\Delta_1 = \Delta$, tandis que $S\subset S_0$ est la classe des fonctions de la forme $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$

La fonction $f\in S_0$ est dite *convexe vers l'axe réel négatif* si pour tout w_0 fixé, $w_0\in C\setminus f(\Delta)$ la demi-droite $w_\lambda = w_0-\lambda$, $\lambda\geqslant 0$, ou la droite $w_\lambda = w_0+\lambda$, $\lambda\in(-\infty,\infty)$ est contenue dans $C\setminus f(\Delta)$. La classe de toutes les fonctions convexes vers l'axe réel négatif sera désignée par L_0 („accessibles à gauche"). Les raisonnements du travail [2] montrent directement que la classe L_0 est une sous-classe essentielle de la classe K_0 des fonctions presque convexes, $K_0\subset S_0$, où $f\in K_0$, s'il existe une fonction convexe φ, $\varphi(z) = b_1z+b_2z^2+\ldots$, holomorphe et univalente dans Δ, telle que

$$\mathrm{Re}\frac{f'(z)}{\varphi'(z)} > 0, \quad z\in\Delta. \tag{1}$$

La fonction φ sera dite *fonction associée* à la fonction f. Dans le travail [2] nous avons établi, entre autres, les résultats suivants:

THÉORÈME 1. *La fonction $f\in S_0$ est une fonction presque convexe dans Δ et $\varphi_0(z) = z/(1-z)$ est la fonction associée à f si et seulement si $f\in L_0$ et*

(2) $$P_{f(\Delta)} = f(1)$$

(pour la définition du symbole $P_{f(\Delta)}$ voir travail [2], p. 257).

COROLLAIRE 1. *La classe fondamentale (suffisante pour caractériser la classe L_0) des fonctions associées aux fonctions de la classe L_0 est la classe des fonctions de la forme $\varphi_a(z) = ze^{-ia}/(1-ze^{-ia})$, $a \in [-\pi, \pi]$.*

COROLLAIRE 2. *Pour la classe $L \subset L_0$ des fonctions de la forme $f(z) = z+a_2z^2+\ldots$ la fonction $\varphi_0(z)$ est la fonction universelle associée aux fonctions de cette classe seulement pour les fonctions de la classe L qui satisfont à la condition* (2). *La sous-classe de ces fonctions sera désignée par Φ_0.*

2. Formules structurales et coefficients. Du corollaire 1 résulte le

THÉORÈME 2. *Pour la classe L_0 a lieu la formule structurale suivante:*

(3) $$(e^{ia/2}-e^{-ia/2}z)^2 f'(z) = q(z)$$

où q parcourt la classe R_0 des fonctions holomorphes dans Δ et telles que $\operatorname{Re} q(z) \geqslant 0$ *pour* $z \in \Delta$.

Comme $f'(0) = 1$ pour $f \in L$, il en résulte immédiatement le

COROLLAIRE 3. *Pour la classe $L \subset L_0$ on a la formule structurale*

(4) $$f'(z) = \frac{q(z)}{(e^{ia/2}-e^{-ia/2}z)^2}, \quad q \in R_0 \text{ et } q(0) = e^{ia},\ a \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi].$$

Cette formule peut être ramenée à une autre forme équivalente. En effet, on peut écrire $q(z) = p(z)\cos a + i\sin a$, où $p \in P \subset R_0$, $p(0) = 1$. En appliquant la formule bien connue de Herglotz ([3], p. 542) on obtient ainsi une autre forme du corollaire 3:

THÉORÈME 3. *Pour la classe L on a la formule structurale suivante:*

(5) $$f'(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{2ia}+ze^{-it}}{(e^{ia}-z)^2(1-ze^{-it})}\, d\mu(t), \quad a \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]$$

et $\mu \in M$, où M désigne la classe des fonctions non décroissantes dans $[-\pi, \pi]$ et telles que $\int_{-\pi}^{\pi} d\mu(t) = 1$.

De là, en profitant du développement de la fonction de Koebe: $z/(1-ze^{-ia})^2 = z+2e^{-ia}z^2+3e^{-2ia}z^3+\ldots$, on arrive par un calcul élémentaire à la formule qui donne le n-ème coefficient de la fonction $f \in L$, $f(z) = z+a_2z^2+a_3z^3+\ldots$:

(6) $$a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big\{\sum_{k=0}^{n-1} e^{-i(n-k-1)t}[ke^{-it}e^{-ia(k+1)}+(k+1)e^{-iak}]\Big\}d\mu(t),$$
$$n = 1, 2, \ldots$$

Cette formule, obtenue directement, comprend sous le signe intégrale un terme indépendant de t. Cependant sous cette forme ce fait n'est pas mis en évidence. C'est pourquoi nous l'écrirons autrement. On a

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} ke^{-i\alpha(k+1)}e^{-i(n-k)t} + \sum_{k=0}^{n-2}(k+1)e^{-i\alpha k}\cdot e^{-i(n-k-1)t} + ne^{i(1-n)\alpha}\Big]\,d\mu(t)$$

$$= \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} ke^{-i\alpha(k+1)}e^{-i(n-k)t} + \sum_{k=0}^{n-1} ke^{-i\alpha(k-1)}e^{-i(n-k)t} + ne^{i(1-n)\alpha}\Big]\,d\mu(t).$$

On voit alors que la formule (6) prend la forme équivalente que voici:

$$(7)\qquad a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} ke^{i\alpha(1-k)}(1+e^{-2i\alpha})e^{i(k-n)t} + ne^{i(1-n)\alpha}\Big]\,d\mu(t).$$

De cette formule et du théorème de l'enveloppe convexe [1] on tire immédiatement le

Théorème 4. *Le domaine de variation du coefficient* a_n, $n = 1, 2, \ldots$, *dans la classe* L *est l'ensemble* $\bigcup_{\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} K_\alpha^n$, *où* K_α^n, *est l'enveloppe convexe de la courbe*

$$(8)\qquad l_\alpha^n\colon\ w = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke^{i\alpha(1-k)}(1+e^{-2i\alpha})e^{i(k-n)t} + e^{i(1-n)\alpha},\qquad t\in[-\pi,\pi].$$

Du théorème 4 on déduit immédiatement le

Corollaire 4. *Le domaine de variation du coefficient* a_2 *dans la classe* L *est l'ensemble* $\bigcup_{\alpha\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} K_\alpha^2$, *où* K_α^2 *est le cercle fermé limité par la circonférence*

$$(9)\qquad l_\alpha^2\colon\ w = \tfrac{1}{2}(1+e^{-2i\alpha})e^{-it} + e^{-i\alpha},\qquad t\in[-\pi,\pi].$$

On a ensuite: $w = \frac{1}{2}(1+e^{-2i\alpha})e^{-it}+e^{-i\alpha} = \cos\alpha e^{-i\alpha}e^{-it}+e^{-i\alpha}$. De là il résulte immédiatement que les cercles K_α^2 ont leurs centres sur la moitié droite de la circonférence $|w| = 1$ et qu'ils sont tangents à l'axe imaginaire. Le corollaire 4 admet ainsi l'interprétation géométrique suivante:

COROLLAIRE 5. *Le domaine de variation du coefficient a_2 dans la classe L est la somme (au sens de la théorie des ensembles) de tous les cercles tangents à l'axe imaginaire et ayant leurs centres sur la moitié droite de la circonférence unité.*

Nous allons maintenant déterminer l'enveloppe de ces cercles. Les circonférences l_a^2 sont représentées en coordonnées rectangulaires par les équations

$$(x-\cos\alpha)^2+(y+\sin\alpha)^2 = \cos^2\alpha. \tag{10}$$

Dérivant les deux membres de (10) par rapport à α et étudiant le système d'équations correspondant on constate par un simple calcul que l'enveloppe des circonférences (9) est une courbe fermée Γ_L^2, composée d'un segment de droite dont les équations paramétriques sont: $x = 0$, $y = -\sin\alpha$, $\alpha \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, et de la courbe représentée par les équations paramétriques: $x = 2\cos^3\alpha$, $y = -\sin\alpha(1+2\cos^2\alpha)$, $\alpha \in [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$, qui limite le domaine simplement connexe Ω_L^2. Les considérations précédentes permettent de donner au corollaire 4 encore un autre énoncé, celui du

COROLLAIRE 6. *L'ensemble de variation du coefficient a_2 dans la classe L est l'ensemble $\Omega_L^2+\Gamma_L^2$.*

Du corollaire 2 il résulte directement que dans la classe $\Phi_0 \subset L$ on a la formule structurale suivante:

$$f \in \Phi_0 \Leftrightarrow f'(z) = \frac{p(z)}{(1-z)^2}, \quad \text{où } p \in P. \tag{11}$$

En profitant ici, comme auparavant, de la formule de Herglotz ([3], p. 542) pour la classe P, on obtient le

THÉORÈME 5. *Pour la classe Φ_0 on a la formule structurale suivante:*

$$f'(z) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1+ze^{-it}}{(1-z)^2(1-ze^{-it})}\, d\mu(t), \tag{12}$$

où μ parcourt la classe M.

On voit que la formule (12) est un cas particulier de la formule (5), car on l'obtient de celle-ci en y posant $\alpha = 0$. De là, en mettant $\alpha = 0$ dans la formule (7), on obtient immédiatement la formule exprimant le n-ème coefficient pour les fonctions de la classe Φ_0:

$$a_n = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\Big[\sum_{k=0}^{n-1} 2ke^{i(k-n)t}+n\Big]\, d\mu(t), \quad n = 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Du théorème de l'enveloppe convexe [1] et du théorème 5 on tire le

THÉORÈME 6. *L'ensemble de variation du coefficient a_n, $n = 1, 2, \ldots$ dans la classe Φ_0 est l'enveloppe convexe de la courbe*

$$w = 1+\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} ke^{i(k-n)t}, \quad t \in [-\pi, \pi]. \tag{14}$$

Il s'ensuit que l'ensemble de variation du coefficient a_2 dans la classe Φ_0 est le cercle fermé de centre $s = 1$ et de rayon $R = 1$, ce qui a été établi dans le travail [2].

3. L'ensemble de Koebe pour la classe L. Dans ce paragraphe nous allons déterminer, par un raisonnement élémentaire, l'ensemble appelé „ensemble de Koebe" pour la classe L, c'est-à-dire l'ensemble $K(L) = \bigcap_{f\in L} f(\Delta)$. Cet ensemble a été déterminé dans le travail [4], cependant les auteurs de ce travail l'ont obtenu moyennant un raisonnement plus compliqué que le nôtre. Remarquons d'abord que l'ensemble de toutes les fonctions de la classe L telles que $C\setminus f(\Delta)$ est une demi-droite constitue une famille à un paramètre de fonctions définies par la formule

$$g(z, \theta) = \frac{z+\dfrac{e^{3i\theta}-e^{i\theta}}{2}z^2}{(1-ze^{i\theta})^2}, \quad \theta \in [-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi]. \tag{15}$$

On peut obtenir cette formule directement en considérant la fonction $\psi(z) = [a(1+ze^{i\theta})/(1-ze^{i\theta})+bi]^2+B$, où $a > 0$, $b \in (-\infty, \infty)$, $B \in C$, et en choisissant convenablement les paramètres a, b et B en sorte que soient satisfaites les conditions normalisantes imposées à la classe L. Les propriétés de la représentation $w = (1+ze^{i\theta})/(1-ze^{i\theta})$ montrent que $\psi(z)$ représente Δ sur le plan entaillé suivant la demi-droite $w = w_0 - \lambda$, $\lambda \in \langle 0, \infty)$. Déterminons maintenant le lieu géométrique des sommets des demi-droites $C\setminus g(\Delta, \theta)$. Ce sont les valeurs de la fonction $g(z, \theta)$ aux points critiques tels que $g'_z(z, \theta) = 0$. Comme $g'_z(z, \theta) = (1+ze^{3i\theta})/(1-ze^{i\theta})^3$, on a $g'_z(-e^{-3i\theta}, \theta) = 0$. Par conséquent les sommets $A(\theta)$ qui correspondent aux fonctions $g(z, \theta)$ s'expriment par la relation

$$A(\theta) = g(-e^{-3i\theta}, \theta) = \frac{-e^{-3i\theta}+\dfrac{e^{3i\theta}-e^{i\theta}}{2}e^{-6i\theta}}{(1+e^{-2i\theta})^2}, \tag{16}$$

d'où, moyennant quelques simples calculs, on obtient

$$A(\theta) = \frac{-e^{-i\theta}-e^{-3i\theta}}{8\cos^2\theta}. \tag{17}$$

Introduisant les coordonnées polaires (r, φ) on obtient aisément l'équation (17) sous la forme

$$(18) \qquad r(\varphi) = \frac{1}{4\sin\varphi/2}, \quad \varphi \in [0; 2\pi].$$

Cette équation représente la courbe (6) de la p. 666 du travail [4]; elle est symétrique par rapport à l'axe réel, passe par le point $w = -\frac{1}{4}$ et les équations de ses asymptotes sont: $y = \frac{1}{2}$ et $y = -\frac{1}{2}$ (en coordonnées cartésiennes). Elle est contenue dans le demi-plan $\operatorname{Re} w \geqslant -\frac{1}{4}$ et limite un domaine convexe D contenant l'origine. Pour toute fonction $f \in L$ a lieu l'inclusion $D \subset f(\Delta)$; sinon il existerait une fonction $f_0 \in L$ telle que le point frontière w_0 du domaine $f_0(\Delta)$ appartiendrait à D. Dans ce cas il existerait une fonction $g(z, \theta_0)$ telle que l'on aurait la relation $C \setminus g(\Delta, \theta_0) \subset C \setminus f_0(\Delta)$, ce qui résulte du fait que la fonction f_0 est convexe vers l'axe réel négatif et de la définition du domaine D; on aurait donc $f_0 \dashv g$. Cette dernière relation est pourtant en contradiction avec le principe de subordination, puisque $f_0'(0) = g_z'(0, \theta_0) = 1$. Par conséquent $D \subset \bigcap_{f \in L} f(\Delta) = K(L)$. Mais $D = \bigcap_{\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} g(\Delta, \theta) \supset K(L)$, donc $D = K(L)$. Nous avons ainsi prouvé le théorème suivant, établi déjà dans le travail [4]:

THÉORÈME 7. $D = K(L)$.

4. Prolongement de la propriété fondamentale à l'intérieur du cercle Δ. Pour certaines sous-classes de la classe S, p.ex. pour celles des fonctions convexes, étoilées, presque convexes etc., les propriétés fondamentales des fonctions qui leur appartiennent se conservent lorsqu'on remplace le domaine Δ par Δ_r, $0 < r < 1$; il existe, en effet, des théorèmes en vertu desquelles les propriétés: convexité, presque convexité etc., se conservent pour les représentations des cercles concentriques au cercle unité, de rayon inférieur à 1. Il n'en est pas de même de la classe que nous considérons ici. En effet, il résulte directement de la définition des fonctions convexes vers l'axe réel négatif que les images des cercles Δ_r, $0 < r < 1$, n'ont plus cette propriété fondamentale. On peut cependant — ce qui résulte de la démonstration donnée dans le travail [2] — indiquer des sous-ensembles du cercle unité que les fonctions de la classe Φ_0 représentent sur des domaines convexes vers l'axe réel négatif. Ce sont les cercles tangents intérieurement à la circonférence unité au point $z = 1$. Nous allons maintenant montrer comment on y arrive. On a le

THÉORÈME 8. *Si $f \in \Phi_0$, $f(K_t)$ est un domaine convexe vers l'axe réel négatif, où K_t est un cercle tangent intérieurement au point $z = 1$ à la circonférence unité.*

Démonstration. En tenant compte du corollaire 2 on déduit de l'hypothèse que

$$\mathrm{Re}(1-z)^2 f'(z) \geqslant 0. \tag{19}$$

La fonction f est évidemment une fonction presque convexe, puisqu'elle satisfait à la condition $\mathrm{Re}\{f'(z)/\varphi'(z)\} \geqslant 0$ et que la fonction associée à f est $\varphi(z) = z/(1-z)$. Pour t quelconque fixé et tel que $t \in (-\frac{1}{2}, \infty)$ considérons la courbe γ_t: $z(s) = (t-is)/(1+t-is)$, $s \in (-\infty, \infty)$. C'est une circonférence tangente intérieurement au point $z = 1$ au cercle unité et passant par le point $t/(1+t)$, dont on a écarté le point $z = 1$. Sur la courbe γ_t on a:

$$\frac{d}{ds}\,\mathrm{Im} f[z(s)]$$

$$= \mathrm{Im}\,\frac{d}{ds} f[z(s)] = \mathrm{Im}\left\{f'[z(s)]\frac{d}{ds}\,\frac{t-is}{1+t-is}\right\} = -\mathrm{Im}\left\{f'[z(s)]\,\frac{i}{(1+t-is)^2}\right\}$$

$$= -\mathrm{Re}\{f'[z(s)]\cdot[1-z(s)]^2\},$$

d'où, en vertu de l'hypothèse, $\frac{d}{ds}\mathrm{Im} f[z(s)] < 0$. Cette dernière condition prouve que le domaine $f(K_t)$ satisfait à la condition de convexité vers l'axe réel négatif, K_t étant le cercle limité par la courbe $\gamma_t + \{1\}$, et on voit aisément que c'est une circonférence tangente intérieurement au point $z = 1$ au cercle unité. La démonstration du théorème 8 est ainsi achevée.

Références

[1] И. Я. Ашневиц, Г. В. Улина, *Об областях значений аналитических функций представимых интегралом Стильтеса,* Вест. Лен. Унив. 11 (1955), p. 31-42.

[2] K. Ciozda, *Sur la classe des fonctions convexes vers l'axe réel négatif,* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astr., Phys. 27 (1979), p. 255–261.

[3] Г. М. Голузин, *Геометрическая теория функций комплексного переменного,* Москва 1966.

[4] Z. Lewandowski, J. Miazga, *Sur l'extension d'une méthode pour la détermination des ensembles,* Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math., Astr., Phys. 22 (1974), p. 663–666.

Reçu par la Rédaction le 23. 4. 1978