ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIV (1970)

# Limitation des coefficients dans une famille de fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$

par WIESŁAW PLASKOTA (Kraków)

**1.** Soit $S^*(\lambda, M)$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$f(z) = z + a_2z^2 + a_3z^3 + \ldots \tag{1}$$

holomorphes dans le cercle $K = \{z\colon |z| < 1\}$, qui satisfont à la condition

$$\left| \frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)} - \lambda}{1-\lambda} - M \right| < M \quad \text{pour tout } z \in K,$$

où $M$ et $\lambda$, $M \geqslant 1$, $0 \leqslant \lambda < 1$, sont des nombres quelconques fixés.

On voit aisément que $S^*(\lambda, M_1) \subset S^*(\lambda, M_2)$ si $M_1 < M_2$ et que $S^*(\lambda, \infty) \equiv S^*(\lambda)$, où $S^*(\lambda)$ est la famille de toutes les fonctions de la forme (1) étoilées d'ordre $\lambda$ dans le cercle $K$, c'est-à-dire telles que

$$\mathrm{re}\frac{zf'(z)}{f(z)} > \lambda \quad \text{pour tout } z \in K.$$

La notion de fonctions étoilées de différents ordres a été introduite par Robertson [2].

Dans ce travail nous obtenons une limitation du module du coefficient $a_n$ pour tout $n$, dans la classe des fonctions $S^*(\lambda, M)$.

**2.** Désignons par $C$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$P(z) = 1 + b_1z + b_2z^2 + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle $K$, qui satisfont à la condition $\mathrm{re}P(z) > 0$ pour tout $z \in K$, et par $C(M)$ la sous-classe de $C$ des fonctions telles que

$$|P(z) - M| < M \quad \text{pour tout } z \in K.$$

Évidemment $C(M_1) \subset C(M_2)$ lorsque $M_1 < M_2$ et $C(\infty) \equiv C$. Soit encore $\Phi$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$\varphi(z) = c_1z + c_2z^2 + \ldots, \tag{2}$$

holomorphes dans le cercle $K$, telles que

$$|\varphi(z)| < 1 \quad \text{pour } z \in K. \tag{3}$$

Il est bien connu que $f(z)$ appartient à la famille $S^*(\lambda)$ si et seulement si la fonction

$$\frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-\lambda}{1-\lambda} = P(z)$$

appartient à la famille $C$. Si donc $f(z) \in S^*(\lambda)$, on a

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \lambda + (1-\lambda)P(z),$$

pour une fonction $P(z) \in C$.

On sait aussi que $\varphi(z) \in \Phi$ si et seulement si la fonction

$$\frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)} = P(z)$$

appartient à la famille $C$.

Les définitions de la famille $S^*(\lambda, M)$ et de $C(M)$ entraînent directement une correspondance biunivoque entré les fonctions de ces familles. Si donc $f(z) \in S^*(\lambda, M)$, on a

$$\frac{zf'(z)}{f(z)} = \lambda + (1-\lambda)P(z) \tag{4}$$

pour une fonction $P(z) \in C(M)$ et inversement. Evidémment la fonction $\varphi(z)$ appartient à la famille $\Phi$ si et seulement si la fonction

$$\frac{1+\varphi(z)}{1-m\varphi(z)} = P(z), \qquad m = 1-\frac{1}{M}, \tag{5}$$

appartient à la famille $C(M)$.

3. Théorème 1. *Si $f(z) \in S^*(\lambda, M)$, on a*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1} s_k, \qquad n = 2, \ldots, N \tag{6}$$

*et*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{(n-1)(N-2)!}\prod_{k=1}^{N-1} s_k, \qquad n = N+1, N+2, \ldots \tag{6'}$$

*ou* $s_k = (1+m)(1-\lambda)+m(k-1)$, $k = 1, 2, \ldots$, $m = 1-1/M$. *$N$ est le nombre naturel d'intervalle*

$$\left[\lambda+2\frac{1-\lambda}{1-m},\ 1+\lambda+2\frac{1-\lambda}{1-m}\right).$$

*La limitation* (6) *est exacte et l'égalité dans* (6) *est atteinte pour la fonction*

(7) $$f(z) = \frac{z}{(1+\varepsilon mz)^{\frac{(1+m)(1-\lambda)}{m}}}, \quad |\varepsilon| = 1 \ si \ m \neq 0,$$

*et pour la fonction*

(8) $$f(z) = z\exp[\varepsilon(1-\lambda)z], \quad |\varepsilon| = 1 \ si \ m = 0.$$

Démonstration. Soit $f(z) \in S^*(\lambda, M)$. Alors, en vertu de (4) et (5), on a

$$zf'(z) - f(z) = \varphi(z)\{mzf'(z) + [1-(1+m)\lambda]f(z)\}$$

pour une fonction $\varphi(z) \in \Phi$.

En exprimant cette inégalité par les coefficients de la fonction $f(z)$ on obtient

(9) $$a_2 z^2 + 2a_3 z^2 + \ldots + (n-1)a_n z^n = \varphi(z)(s_1 z + s_2 a_2 z^2 + \ldots + s_n a_n z^n + \ldots).$$

De (9) on tire, en tenant compte de (2),

$$a_2 = s_1 c_1,$$

donc

$$|a_2| = s_1 |c_1|.$$

Comme $|\varphi(z)| < 1$, on a $|c_n| \leqslant 1$ pour $n = 1, 2, \ldots$ Par conséquent

(10) $$|a_2| \leqslant s_1.$$

Donc la limitation (6) est demontré pour $n = 2$.

Soit $n > 2$. L'égalité (9) peut être mise sous la forme

(11) $$\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty}(k-1)a_k z^k = \varphi(z)\sum_{k=1}^{n-1} s_k a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k z^k,$$

où $a_1 = 1$ et les deux séries qui figurent dans (11) sont convergentes dans le cercle $|z| < 1$.

De (3) et (11) on obtient l'inégalité modulaire

(12) $$\Big|\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k z^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} h_k z^k\Big| \leqslant \Big|\sum_{k=1}^{n-1} s_k a_k z^k\Big|,$$

où $\sum_{k=n+1}^{\infty} h_k z^k$ est une série convergente dans le cercle $K$. Soit $z = re^{i\theta}$ ($\theta$ réel). De l'inégalité (12) on déduit l'inégalité intégrale

$$\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=2}^{n}(k-1)a_k r^k e^{ki\theta} + \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k e^{ki\theta}\Big|^2 d\theta \leqslant \int_0^{2\pi}\Big|\sum_{k=1}^{n-1} s_k a_k r^k e^{ki\theta}\Big|^2 d\theta$$

pour tout $0 < r < 1$.

L'inégration donne l'inégalité

$$|a_2|^2r^4+2^2|a_3|^2r^6+\ldots+(n-1)^2|a_n|^2r^{2n}+\sum_{k=1}^{\infty}|h_k|^2r^{2k}\leqslant s_1^2r^2+s_2^2|a_2|^2r^4+\ldots+s_{n-1}^2|a_{n-1}|^2r^{2n-2}$$

d'où

$$|a_2|^2r^4+2^2|a_3|^2r^6+\ldots+(n-1)^2|a_n|^2r^{2n}\leqslant s_1^2r^2+s_2^2|a_2|^2r^4+\ldots+s_{n-1}^2|a_{n-1}|^2r^{2n-2}. \tag{13}$$

Soit $r\to 1$. Alors on déduit de (13)

$$(n-1)^2|a_n|^2\leqslant s_1^2+(s_2^2-1)|a_2|^2+\ldots+[s_{n-1}^2-(n-2)^2]|a_{n-1}|^2, \tag{14}$$

$s_{n-1}^2-(n-2)^2>0$ si et seulement si $n\leqslant N$.

En nous appuyant sur (14) et (10) nous allons démontrer par récurrence que l'inégalité (14) est vraie pour $2<n\leqslant N$. Admettons donc qu'il existe un nombre naturel $p, p\leqslant N-1$ tel que la formule (6) soit vraie pour $n=2,3,\ldots,p$, c'est-à-dire que

$$|a_l|\leqslant\frac{1}{(l-1)!}\prod_{k=1}^{l-1}s_k,\quad l=2,\ldots,p. \tag{15}$$

Nous allons prouver que

$$|a_{p+1}|\leqslant\frac{1}{p!}\prod_{k=1}^{p}s_k. \tag{16}$$

En posant dans (14) $n=p+1$ on obtient

$$p^2|a_{p+1}|^2\leqslant s_1^2+(s_2^2-1)|a_2|^2+(s_3^2-2^2)|a_3|^2+\ldots+[s_p^2-(p-1)^2]|a_p|^2,$$

d'où l'on tire, en tenant compte de (15) et (10),

$$p^2|a_{p+1}|^2\leqslant s_1^2+\frac{s_1^2}{(1!)^2}(s_2^2-1)+\frac{s_1^2s_2^2}{(2!)^2}(s_3^2-2^2)+\\+\frac{s_1^2s_2^2s_3^2}{(3!)^2}(s_4^2-3^2)+\ldots+\frac{s_1^2s_2^2\ldots s_{p-1}^2}{[(p-1)!]^2}[s_p^2-(p-1)^2],$$

et enfin

$$p^2|a_{p+1}|^2\leqslant s_1^2+\frac{s_1^2s_2^2}{(1!)^2}-s_1^2+\frac{s_1^2s_2^2s_3^2}{(2!)^2}-\frac{s_1^2s_2^2}{(1!)^2}+\frac{s_1^2s_2^2s_3^2s_4^2}{(3!)^2}-\\-\frac{s_1^2s_2^2s_3^2}{(2!)^2}+\ldots+\frac{s_1^2s_2^2\ldots s_p^2}{[(p-1)!]^2}-\frac{s_1^2s_2^2\ldots s_{p-1}^2}{[(p-2)!]^2}=\frac{\prod_{k=1}^{p}s_k^2}{[(p-1)!]^2}.$$

L'inégalité (16) est donc vraie et la limitation (6) a lieu pour tout nombre naturel $n=2,\ldots,N$.

Nous allons maintenant prouver que la limitation (6) est exacte. En effet, les fonctions (7) et (8) appartiennent à la classe $S^*(\lambda, M)$, puisque

$$\left|\frac{\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-\lambda}{1-\lambda}-\frac{1}{1-m}\right| = \left|\frac{-m-\varepsilon z}{(1+\varepsilon mz)(1-m)}\right| \leqslant \frac{1}{1-m}.$$

Dans le voisinage du point $z = 0$ la fonction $f(z)$, définie par (7), admet un développement en série de puissances de la forme

$$f(z) = z+\binom{-u}{1}mz^2\varepsilon+\binom{-u}{2}m^2z^3\varepsilon^2+\ldots+\binom{-u}{n-1}\varepsilon^{n-1}m^{n-1}z^n+\ldots$$

où

$$u = \frac{(1+m)(1-\lambda)}{m}.$$

Désignons par $a_n$ le coefficient de $z^n$ dans le développement de la fonction $f(z)$. Alors

$$a_n = \frac{(-1)^{n-1}\varepsilon^{n-1}}{(n-1)!}s_1s_2s_3\ldots s_{n-1},$$

donc

$$|a_n| = \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=1}^{n-1}s_k, \qquad \text{si } m\neq 0, n = 2, \ldots,$$

ou

$$s_k = (1+m)(1-\lambda)+m(k-1), \qquad k = 1,2,\ldots$$

Soit $m = 0$, alors $N = 2$.

Pour la fonction définie par la formule (8) on aura

$$|a_2| = 1-\lambda.$$

Par consequent l'égalité est atteinte dans (6) pour les fonction (7) et (8).

Si $n \geqslant N+1$, on obtient aisément l'inégalité (6'). L'évaluation (6') n'est pas exacte.

COROLLAIRE 1. *Si $f(z)\in S^*(\lambda)$, on obtient*

$$|a_n| \leqslant \binom{n-2\lambda}{n-1}, \qquad n = 2,3,\ldots \tag{17}$$

*résultat qui a été établi par Robertson* [2].

COROLLAIRE 2. *Si $f(z)\in S$, ou $S$ — la famille de toutes les fonctions de la forme* (1) *holomorphes dans la cercle $K$, qui satisfont à la condition*

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-1\right| < 1, \tag{18}$$

*on obtient*

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{n-1}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

L'éstimation (17) est exacte. L'éstimation (18) est exacte seulement dans le cas $n = 2$.

Dans la démonstration du théorème nous avons utilisé, en la modifiant convenablement, la methode que Clunie [1] a appliquée pour trouver une limitation des coefficients des fonctions étoilées méromorhes dans l'anneau $0 < |z| < 1$.

**Références**

[1] J. Clunie, *On meromorphic schlicht functions*, London Math. Soc. 34 (1959), p. 215-216.

[2] M. S. Robertson, *On the theory of univalent functions*, Ann. of Math. 37 (1936), p. 374-408.

*Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1969*