ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXVII (1980)

Sur le prolongement à gauche de l'intégrale d'une équation différentielle à paramètre retardé

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans le livre de J. Halle (1) on trouve un théorème sur l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation $x'(t) = f(t, x_t)$ avec la condition $x_\sigma(s) = \varphi(s)$ pour $s \in [-r, 0]$ dans l'intervalle $\sigma - r - a < t < \sigma$, où a est positif suffisamment petit et $x_t(s) = x(t+s)$ pour $-r < s < 0$. Dans la présente note nous allons donner une condition plus simple et plus générale d'existence de $x_t(s)$ pour $\sigma - a < t < \sigma$ $(a > 0)$.

Dans le livre(1) de J. Halle on trouve un théorème sur l'existence d'un prolongement à gauche d'une solution $x(t)$ de l'équation

(1) $$x'(t) = f(t, x_t)$$

satisfaisant à la condition initiale

(2) $$x_\sigma(s) = \varphi(s) \quad \text{pour } x \in [-r, 0],$$

où

$$x_t(s) \overset{\mathrm{df}}{=} x(t+s) \quad \text{pour } s \in [-r, 0].$$

Dans le théorème en question l'auteur suppose les hypothèses suivantes:

Hypothèses H. (h_1) D est un ensemble ouvert dans $R \times C$ (où $R = (-\infty, +\infty)$, $C = C([-r, 0], R^n)$ est l'espace des fonctions continues dans l'ensemble $[-r, 0]$, à valeurs dans R^n).

(h_2) $f\colon D \to R^n$ est atomique, c'est-à-dire que $f(t, \varphi)$ admet une dérivée de Fréchet $f'_\varphi(t, \varphi)$ par rapport à $\varphi \in C$ continue dans D, et il existe une matrice $\eta(t, \varphi, \theta)$ à variation bornée par rapport à θ pour $(t, \varphi) \in D$, $\theta \in [-r, 0]$, une matrice $A(t, \varphi)$ continue dans D telle que $\operatorname{Det} A(t, \varphi) \neq 0$, et une fonction scalaire $\gamma(t, \varphi, s)$ continue telles que

(3) $$f'_\varphi(t, \varphi)\psi = \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t, \varphi, \theta)]\psi(\theta),$$

(1) J. Halle, *Functional differential equations*, New York 1971.

(4) $$\eta(t,\varphi,-r^+)-\eta(t,\varphi,-r) = A(t,\varphi),$$

(5) $$\Big\|\int_{-r}^{-r+s}[d_\theta\eta(t,\varphi,\theta)]\psi(\theta)-A(t,\varphi)\psi(-r)\Big\| \leqslant \gamma(t,\varphi,s)\sup_{-r\leqslant\theta\leqslant -r+s}\|\psi(\theta)\|,$$

(6) $$\gamma(t,\varphi,0) = 0,$$

(h_3) $$\varphi'(0) = f(\sigma,\varphi).$$

Remarque 1. L'hypothèse que $f'_\varphi(t,\varphi)\psi$ est la dérivée de Fréchet de f par rapport à φ signifie qu'il existe des fonctions $g(t,\varphi,\psi)$ et $\varepsilon(t,\varphi,\beta)$ telles que

(7) $$f(t,\bar\varphi+\psi) = f(t,\bar\varphi)+f'_\varphi(t,\bar\varphi)\psi+g(t,\bar\varphi,\psi),$$

(8) $$g(t,\bar\varphi,0) = 0 \quad \text{pour chaque } \bar\varphi\in C,$$

(9) $$\|g(t,\bar\varphi,\psi)-g(t,\bar\varphi,\xi)\| \leqslant \varepsilon(t,\bar\varphi,\beta)|\psi-\xi| \quad \text{pour } |\psi|,|\xi|\leqslant\beta,$$

$\varepsilon(t,\bar\varphi,\beta)$ continue par rapport à $(t,\bar\varphi,\beta)$ pour $(t,\varphi)\in D$,

(10) $$\varepsilon(t,\bar\varphi,0) = 0.$$

Dans la condition (9) $\|y\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2}$, $|\gamma| = \sup_{-r\leqslant\theta\leqslant 0}\|\gamma(\theta)\|$. Dans le livre de Halle([1]) on trouve le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Les hypothèses* H *étant admises, il existe un* $\bar a>0$ *tel que la solution* $x(t)$ *définie dans l'intervalle* $[\sigma-r,\sigma+a)$ *tel que* $x_\sigma = \varphi$ *peut être prolongée à gauche sur l'intérvalle* $[\sigma-\bar a-r,\sigma]$ *c'est-à-dire qu'il existe une fonction* $\bar x(t)$ *continue dans* $[\sigma-\bar a-r,\sigma]$ *telle que*

(11) $$\bar x_\sigma = \varphi$$

et que la fonction

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pour } \sigma-r\leqslant t\leqslant\sigma+a,\\ \bar x(t) & \text{pour } \sigma-\bar a-r\leqslant t\leqslant\sigma-r,\end{cases}$$

satisfait à l'équation (1) *pour* $\sigma-\bar a\leqslant t\leqslant\sigma+a$.

Dans la présente note nous allons démontrer une condition plus simple et plus générale, suffisante pour l'existence du prolongement à gauche de la solution de l'équation (1) satisfaisant à la condition (11).

1. Envisageons l'équation différentielle

(1.1) $$x'(t) = f\big(t,x(t-r),x_t\big),$$

où $x = x_1,\ldots,x_n$, $x_t(\theta) = x(t+\theta)$ pour $-r\leqslant\theta\leqslant 0$.

Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES $\bar{\mathrm{H}}$. ($\bar h_1$) $\tilde D$ est un ensemble ouvert dans $R^{n+1}\times C$.

$(\overline{\mathrm{h}}_2)$ La fonction $f(t, y, \psi)$ est continue dans $\tilde{D}$.

$(\overline{\mathrm{h}}_3)$ Il existe une fonction $F(t, \psi, z)$, continue pour (t, ψ, z) telle que

$$|\psi-\varphi| \leqslant \beta_0, \quad |z-\varphi'(0)| \leqslant \beta_0, \quad \sigma-a_0 \leqslant t \leqslant \sigma+a_0 \quad (a_0>0) \tag{1.2}$$

et telle que

$$f\big(t, F(t, \psi, z), \psi\big) = z. \tag{1.3}$$

(h_4) Il existe une constante $k(a, \beta)$ telle que

$$\|F(t, \psi, z)-F(t, \tilde{\psi}, z)\| \leqslant k(a, \beta)|\psi-\tilde{\psi}| \tag{1.4}$$

pour (t, ψ, z) et $(t, \tilde{\psi}, z)$ appartenant à $\tilde{D}$ telles que

$$\psi(\theta) = \tilde{\psi}(\theta) \quad \text{pour} \quad -r+a \leqslant \theta \leqslant 0,$$

$$|\varphi-\psi| \leqslant \beta, \quad |\tilde{\psi}-\varphi| \leqslant \beta, \quad \beta \leqslant \beta_0,$$

$$k(a, \beta) \leqslant k^* < 1 \quad \text{pour} \quad a \leqslant \tilde{a}, \ \beta \leqslant \tilde{\beta}_1 \tilde{a} \leqslant a_0, \ \tilde{\beta} \leqslant \beta_0. \tag{1.5}$$

(h_5) $\varphi(s)$ est de classe C^1 dans $[-r, 0]$ et

$$\varphi'(0) = f\big(\sigma, \varphi(-r), \varphi\big).$$

THÉORÈME T. *Les hypothèses* $\overline{\mathrm{H}}$ *étant admises, on peut prolonger à gauche la solution* $x(t)$ *de l'équation* (1.1) *avec la condition initiale*

$$x_\sigma = \varphi. \tag{1.6}$$

D é m o n s t r a t i o n. De la continuité de la fonction $\varphi'(s)$ dans l'intervalle $[-r, 0]$ il résulte qu'il existe un $\bar{a} > 0$, $\bar{a} \leqslant a_0$, $\bar{a} < r$ tel que

$$\|\varphi'(t)-\varphi'(0)\| \leqslant \beta_0 \quad \text{pour} \quad -\bar{a} \leqslant t \leqslant 0.$$

Envisageons la transformation suivante:

$$(T\eta)(t) = \begin{cases} F\big(t+r, \eta_{t+r}, \varphi'(t+r-\sigma)\big) & \text{pour } \sigma-a-r \leqslant t < \sigma-r, \\ \varphi(t-\sigma) & \text{pour } \sigma-r \leqslant t \leqslant \sigma. \end{cases}$$

Pour $a \in (0, \bar{a}]$ la transformation T est définie pour chaque $\eta(t)$, continue dans l'intervalle $\sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma$, et telle que

$$|\eta_t-\varphi| \leqslant \beta. \tag{1.7}$$

Dans le cas où

$$\eta_\sigma = \varphi \tag{1.8}$$

la fonction $(T\eta)(t)$ est continue (cf. (h_5)) dans l'intervalle $\sigma-a-r \leqslant t \leqslant \sigma$ et satisfait à la relation

$$(T\eta)_\sigma = \varphi. \tag{1.9}$$

Envisageons la fonction

$$\varphi^*(t) = \begin{cases} \varphi(-r) & \text{pour } \sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma-r, \\ \varphi(t-\sigma) & \text{pour } \sigma-r \leqslant t \leqslant \sigma, \end{cases}$$

on a

$$\varphi_t^*(\theta) = \varphi^*(t+\theta) = \begin{cases} \varphi(-r) & \text{pour } \sigma-r-a \leqslant t+\theta \leqslant \sigma-r, \\ \varphi(t+\theta-\sigma) & \text{pour } \sigma-r \leqslant t+\theta \leqslant \sigma. \end{cases}$$

Pour $\sigma-a \leqslant t \leqslant \sigma$ on a

$$(1.10)\quad \|\varphi(\theta)-\varphi_t^*(\theta)\| = \begin{cases} \|\varphi(\theta)-\varphi(-r)\| & \text{pour } -r \leqslant \theta \leqslant -t+\sigma-r, \\ \|\varphi(\theta)-\varphi(t+\theta-\sigma)\| & \text{pour } -t+\sigma-r \leqslant \theta \leqslant 0. \end{cases}$$

On a (pour $\sigma-a \leqslant t \leqslant \sigma$)

$$(1.11)\qquad -a \leqslant t-\sigma \leqslant 0.$$

De la continuité uniforme de la fonction $\varphi(\theta)$ dans l'intervalle $-r \leqslant t \leqslant 0$ il résulte que pour chaque $\varepsilon > 0$ il existe un $a(\varepsilon) > 0$ tel que $\tilde{a} \geqslant \bar{a} \geqslant a(\varepsilon) > 0$ et que

$$\|\varphi(\theta)-\varphi(\theta+s)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } |s| \leqslant a(\varepsilon),\ \theta \in [-r, 0]$$

et par suite

$$(1.12)\qquad \|\varphi(\theta)-\varphi_t^*(\theta)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } a \leqslant a(\varepsilon),\ \theta \in [-r, 0].$$

On a donc pour a suffisamment petits

$$(1.13)\qquad |\varphi_t^*-\varphi| \leqslant \tfrac{1}{2}\beta_0 \quad \text{pour } a \leqslant a(\tfrac{1}{2}\beta_0)$$

et, par suite, $F\varphi^*$ est définie pour $a \leqslant a(\frac{1}{2}\beta_0)$. Evaluons $|T\varphi^*-\varphi^*|$ pour $a < a(\frac{1}{2}\beta_0)$.

$$\|(T\varphi^*)(t)-\varphi^*(t)\| \leqslant \begin{cases} \|F\big(t+r, \varphi_{t+r}^*, \varphi'(t+r-\sigma)\big)-\varphi^*(t)\| \\ \qquad\qquad \text{pour } \sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma-r, \\ 0 \qquad\qquad \text{pour } \sigma-r \leqslant t \leqslant \sigma. \end{cases}$$

En vertu de la définition de $\varphi^*(t)$ on a

$$F\big(t+r, \varphi_{t+r}^*, \varphi'(t+r-\sigma)\big)-\varphi^*(t) = F\big(t+r, \varphi_{t+r}^*, \varphi'(t+r-\sigma)\big)-\varphi(-r)$$
$$\text{pour } \sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma-r$$

d'où, en vertu de (h_5) et (1.3),

$$\|(T\varphi^*)(t)-\varphi^*(t)\| < \big\|F\big(t+r, \varphi_{t+r}^*, \varphi'(t+r-\gamma)\big)-F\big(\gamma, \varphi, \varphi'(0)\big)\big\|$$
$$\text{pour } \sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma-r,$$

et par suite, $F(t, \psi, z)$ étant continue,

$$\|(T\varphi^*)(t)-\varphi^*(t)\| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } a \text{ suffisamment petit, } \sigma-a-r \leqslant t \leqslant \sigma$$

c'est-à-dire qu'il existe un $a^*(\varepsilon) \leqslant a(\frac{1}{2}\beta) \leqslant \bar{a}$ tel que

$$(1.14)\qquad |(T\varphi^*)_t-\varphi_t^*| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour } a \leqslant a^*(\varepsilon),\ \gamma-a \leqslant t \leqslant \sigma.$$

Envisageons l'ensemble (B) des fonctions continues $\eta(t)$ (pour $\sigma-r-a \leqslant t \leqslant \gamma$) telles que

$$\text{(B)} \qquad \begin{aligned} &|\eta_t-\varphi_t^*| \leqslant \tfrac{1}{2}\beta_0 \quad \text{pour } \sigma-a \leqslant t \leqslant \sigma, \\ &\eta_\sigma = \varphi_\sigma^* = \varphi \end{aligned}$$

où

$$a = a^*\big(\tfrac{1}{2}\beta_0(1-k^*)\big). \tag{1.15}$$

La transformation $T\eta$ est définie et continue dans (B). Nous allons démontrer que $TB \subset B$. Envisageons $T\eta$ pour $\eta \in B$. On a $(T\eta)_\sigma = \varphi$. Evaluons $|(T\eta)_t-\varphi_t^*|$ pour $\gamma-a \leqslant t \leqslant \sigma$.

$$\begin{aligned} \|(T\eta)(t)-\varphi^*(t)\| &\leqslant \|(T\eta)(t)-(T\varphi^*)(t)\|+\|(T\varphi^*)(t)-\varphi^*(t)\| \\ &\leqslant \|(T\eta)(t)-(T\varphi^*)(t)\|+\tfrac{1}{2}\beta_0(1-k^*) \end{aligned}$$

(cf. (1.14) et (1.15)). On vérifie facilement que pour $\eta \in B$ on peut appliquer la condition (1.4). On a donc

$$\|(T\eta)(t)-(T\varphi^*)(t)\| \leqslant k^*|\eta_t-\varphi_t^*| \leqslant k^*\tfrac{1}{2}\beta_0$$

et par suite

$$\|(T\eta)(t)-\varphi^*(t)\| \leqslant k^*\tfrac{1}{2}\beta_0+\tfrac{1}{2}\beta_0(1-k^*) = \tfrac{1}{2}\beta_0$$

c'est-à-dire que $TB \subset B$. On vérifie facilement que pour chaque $\bar{\eta} \in B$, $\bar{\bar{\eta}} \in B$ on a

$$|T\bar{\eta}-T\bar{\bar{\eta}}| \leqslant k^*|\bar{\eta}-\bar{\bar{\eta}}|$$

(où $|\xi| = \sup\limits_{\sigma-r-a\leqslant t\leqslant\sigma} \|\xi(t)\|$), donc il existe un $\eta^* \in B$ tel que

$$T\eta^* = \eta^*,$$

c'est-à-dire

$$\eta_\sigma^* = \varphi, \qquad \eta^*(t) = F\big(t+r,\, \eta_{t+r}^*,\, \varphi'(t+r-\sigma)\big) \qquad \text{pour } \sigma-r-a \leqslant t \leqslant \sigma-r$$

d'où il vient

$$\eta^*(t-r) = F\big(t,\, \eta_t^*,\, \varphi'(t-\sigma)\big) = F\big(t,\, \eta_t^*,\, \eta^{*\prime}(t)\big) \qquad \text{pour } \sigma-a \leqslant t \leqslant \sigma$$

et par suite, en vertu de (1.3),

$$\eta^{*\prime}(t) = f\big(t,\, \eta^*(t-r),\, \eta_t^*\big) \qquad \text{pour } \sigma-a \leqslant t \leqslant \sigma.$$

Le théorème T est ainsi démontré.

Remarque 2. Le théorème 1 résulte du théorème T. Les hypothèses H étant admises, la fonction $f(t, \varphi)$ est de la forme

$$f(t, \varphi) = \bar{\bar{F}}\big(t, \varphi(-r)\big)+\bar{g}(t, \varphi)$$

où

$$\tilde{F}(t, y) = A(t, \varphi_t^*)y,$$

$$\tilde{g}(t, x_t) = g(t, \varphi_t^*, x_t - \varphi_t^*) + f(t, \varphi_t^*) - f'_\varphi(t, \varphi_t^*)\varphi_t^* + \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t, \varphi_t^*(\theta), \theta)] x_t(\theta)$$

et par suite de l'hypothèse que $\mathrm{Det} A(t, \varphi) \neq 0$ il résulte qu'il existe une fonction $F(t, \psi, z)$ satisfaisante à (1.3)

$$F(t, \psi, z) = A^{-1}(t, \varphi^*)\{z - \tilde{g}(t, \varphi)\}$$

on a donc

$$\begin{aligned}\|F(t, \psi, z) - F(t, \tilde{\psi}, z)\| &= \|A^{-1}(t, \varphi_t^*)\{\tilde{g}(t, \psi) - \tilde{g}(t, \tilde{\psi})\}\| \\ &\leqslant \|A^{-1}(t, \varphi_t^*)\| \cdot \|\tilde{g}(t, \psi) - \tilde{g}(t, \tilde{\psi})\| \leqslant p_0\{\|g(t, \varphi_t^*, \psi - \varphi_t^*) - \\ &\quad - g(t, \varphi_t^*, \tilde{\psi} - \varphi_t^*)\|\} + \Big\| \int_{-r}^{0} [d_\theta \eta(t, \varphi_t^*(\theta), \theta)] (\psi(\theta) - \tilde{\psi}(\theta)) \Big\| \\ &\leqslant p_0\Big\{\varepsilon(t, \varphi_t^*, \beta)|\psi - \tilde{\psi}| + \Big\| \int_{-r_t}^{-r+a} [d_\theta \eta(t, \varphi_t^*(\theta), \theta)][\psi(\theta) - \tilde{\psi}(0)] \Big\|\Big\}\end{aligned}$$

pour chaque couple $\psi, \tilde{\psi}$ tel que $\psi(\theta) = \tilde{\psi}(\theta)$ pour $-r + a \leqslant \theta < 0$.

En vertu de (5) on a

$$\Big\| \int_{-r_t}^{-r+a} [d_\theta \eta(t, \varphi_t^*(\theta), \theta)] \zeta(\theta) \Big\|$$

$$= \Big\| \int_{-r}^{-r+a} [d_\theta \eta(t, \varphi_t^*(\theta), \theta)] \zeta(\theta) - A(t, \varphi_t^*)\zeta(-r) \Big\| \leqslant \gamma(t, \varphi_t^*, a) \sup_{-r \leqslant \theta \leqslant -r+a} \|\zeta(\theta)\|,$$

donc

$$\|F(t, \psi, z) - F(t, \tilde{\psi}, z)\| \leqslant p_0\{\varepsilon(t, \varphi_t^*, \beta) + \gamma(t, \varphi_t^*, a)|\psi - \tilde{\psi}|\}$$

$$\text{pour } \psi, \tilde{\psi} \text{ tel que } \psi(\theta) = \tilde{\psi}(\theta) \text{ pour } -r + a \leqslant \theta \leqslant 0,$$

mais $\varepsilon(t, \varphi_t^*, \beta) \to 0$ pour $\beta \to 0$, $\gamma(t, \varphi_t^*, a) \to 0$ pour $a \to 0$, et, par suite, pour a, β suffisamment petits on a

$$k(a, \beta) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varepsilon(t, \varphi_t^*, \beta) + \gamma(t, \varphi_t^*, a) \leqslant 1.$$

Les hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ sont donc satisfaites.

2. **Remarque 3.** Les hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ étant admises, il existe exactement une solution $x(t)$ à gauche de σ, satisfaisant à la condition $x_\sigma = \varphi$, telle que $|x_t - \varphi| \leqslant \bar{\beta}$ dans l'intervalle de définition de x_t.

Supposons qu'il existe deux fonctions $\bar{x}(t)$ et $\bar{\bar{x}}(t)$ définies dans l'intervalle $\sigma - a - r \leqslant t \leqslant \sigma$ telles que

$$\bar{x}'(t) = f(t, \bar{x}(t-r), \bar{x}_t) \quad \text{pour } \sigma - a \leqslant t \leqslant \gamma,$$

$$\bar{\bar{x}}'(t) = f(t, \bar{\bar{x}}(t-r), \bar{\bar{x}}_t) \quad \text{pour } \sigma - a \leqslant t \leqslant \gamma,$$

$$\bar{x}_\sigma = \bar{\bar{x}}_\sigma = \varphi, \quad \bar{x}(t) \not\equiv \bar{\bar{x}}(t). \tag{2.1}$$

On a donc

$$\bar{x}(t-r) = F(t, \bar{x}_t, \bar{x}'(t)) \qquad \bar{\bar{x}}(t-r) = F(t, \bar{\bar{x}}_t, \bar{\bar{x}}'(t)) \qquad \text{pour } \sigma - a \leqslant t \leqslant \sigma,$$

c'est-à-dire

$$\bar{x}(t) = F(t+r, \bar{x}_{t+r}, \bar{x}'(t+r)) \tag{2.2}$$

$$\bar{\bar{x}}(t) = F(t+r, \bar{\bar{x}}_{t+r}, \bar{\bar{x}}'(t+r)) \qquad \text{pour } \sigma - r - a \leqslant t \leqslant \sigma - r, \tag{2.3}$$

$$\bar{x}(t) = \bar{\bar{x}}(t) = \varphi(t-\sigma) \qquad \text{dans } [\sigma - r, \sigma]. \tag{2.4}$$

De l'hypothèse que $\bar{x}(t) \not\equiv \bar{\bar{x}}(t)$ il résulte qu'il y a un t_1, $t_1 \in [\sigma - a - r, \sigma]$ tel que

$$\bar{x}(t_1) \neq \bar{\bar{x}}(t_1). \tag{2.5}$$

De (2.4) il s'ensuit que $t_1 \in [\sigma - a - r, \sigma - r]$. En vertu de (2.4) et (2.5) il existe un $\bar{t} \in (t_1, \sigma - r]$ et une suite $\{t_v\}$, $t_v \to \bar{t}$, $t_v \in (t_1, \sigma - r)$ tels que

$$\bar{x}(t) = \bar{\bar{x}}(t) \qquad \text{pour } t \in [\bar{t}, \sigma], \tag{2.6}$$

$$\bar{x}(t_v) \neq \bar{\bar{x}}(t_v). \tag{2.7}$$

On a

$$\bar{x}'(t+r) = \bar{\bar{x}}'(t+r) \qquad \text{pour } t \in [\bar{t} - r, \sigma],$$

$$\bar{x}_{t+r}(\theta) = \bar{\bar{x}}_{t+r}(\theta) \qquad \text{pour } \bar{t} - r - t \leqslant \theta \leqslant 0, \quad -r \leqslant \theta,$$

et par suite, en vertu de (1.4), pour $\bar{t} - a_0 \leqslant t \leqslant \bar{t}$ ($a_0 < r$, $a_0 < \tilde{a}$) on a

$$\begin{aligned} \|\bar{x}(t) - \bar{\bar{x}}(t)\| &= \left\| F(t+r, \bar{x}_{t+r}, x'(t+r)) - F(t+r, \bar{\bar{x}}_{t+r}, \bar{x}'(t+r)) \right\| \\ &\leqslant k(a_0, \beta) \cdot |\bar{x}_{t+r} - \bar{\bar{x}}_{t+r}|. \end{aligned}$$

Posons par définition

$$M = \max_{\bar{t} - a_0 \leqslant s \leqslant \bar{t} + r} |\bar{x}(s) - \bar{\bar{x}}(s)|.$$

On a donc

$$M \leqslant k(a_0, \beta) M.$$

$t_v \to \bar{t}$ et par suite $\bar{t} - a_0 \leqslant t_v \leqslant \bar{t}$ pour $v \geqslant N$, d'où il résulte que $0 < M$. De l'inégalité $a_0 < \tilde{a}$ et de (1.5) il vient

$$k(a_0, \beta) < 1,$$

donc

$$M < M.$$

L'unicité du prolongement est ainsi démontrée.

3. Remarque 4. Dans la remarque 2 nous avons démontré que l'hypothèse H entraîne l'hypothèse $\overline{\mathrm{H}}$. Dans la suite nous allons donner un exemple d'équation satisfaisant à l'hypothèse $\overline{\mathrm{H}}$ et ne satisfaisant pas à l'hypothèse H.

EXEMPLE 1. Envisageons le cas où $f(t, y, \psi)$ est donné par la relation suivante

$$f(t, y, \psi) = y + \int_{-r}^{0} \psi(s)\,ds + 3[\psi(0)]^{2/3}. \tag{3.1}$$

Dans ce cas

$$F(t, \psi, z) = z - \int_{-r}^{0} \psi(s)\,ds - 3\psi^{2/3}(0),$$

$$\|F(t, \psi, z) - F(t, \overline{\psi}, z)\| \leqslant \int_{-r}^{0} \|\psi(s) - \overline{\psi}(s)\|\,ds + 3\|\psi^{2/3}(0) - \overline{\psi}^{2/3}(0)\|.$$

Dans le cas où

$$\psi(s) = \overline{\psi}(s) \quad \text{pour } -r+a \leqslant s \leqslant 0 \quad (0 < a < r)$$

on a donc

$$\|F(t, \psi, z) - F(t, \overline{\psi}, z)\| \leqslant \int_{-r}^{-r+a} \|\psi(s) - \overline{\psi}(s)\|\,ds \leqslant a|\psi - \overline{\psi}|.$$

Les hypothèses $\overline{\mathrm{H}}$ du théorème T sont donc satisfaites tandis que les hypothèses H ne le sont plus pour $\psi(\theta)$ tel que $\psi(0) = 0$.

Reçu par la Rédaction le 21. 10. 1976