ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

Sur l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle à paramètre retardé et à petit paramètre

par Z. Mikołajska (Kraków)

Résumé. Dans la présente note nous démonstrons l'existence d'une solution périodique de l'équation $z'(t) = \varepsilon Z(t, z(t), z(t-\tau), \varepsilon)$, où $Z(t, u, v, \varepsilon)$ est périodique par rapport à t de période T. Le théorème en question est basé sur l'évaluation de $|z(t)-u(t)|$ où $u(t)$ est une solution de l'équation $u'(t) = \varepsilon Z(t, u(t), u(t), \varepsilon)$, et sur un certain théorème sur les fonctions implicites.

Considérons l'équation différentielle

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon Z\big(t,\, z(t),\, z(t-\tau),\, \varepsilon\big), \tag{1.1}$$

où $Z(t, u, v, \varepsilon)$ est une fonction périodique par rapport à t de période T. Dans la présente note nous allons envisager le problème de l'existence d'une solution périodique (de période T) de l'équation (1.1). Le résultat obtenu est basé sur l'évaluation de la différence $|w(t)-u(t)|$, où $w(t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{dw(t)}{dt} = Z\big(t/\varepsilon,\, w(t),\, w(t-\varepsilon\tau),\, \varepsilon\big) \tag{1.2}$$

et $u(t)$ est une solution de l'équation

$$\frac{du(t)}{dt} = Z\big(t/\varepsilon,\, u(t),\, u(t),\, \varepsilon\big) \tag{1.3}$$

telle que $u(0) = w(0)$. On vérifie facilement que, dans le cas où $w(t)$ est une solution de (1.2), la fonction $z(t) = w(t\varepsilon)$ est une solution de l'équation (1.1). L'évaluation obtenue permet de déduire de l'existence d'une solution unique $u(t, \varepsilon)$ de l'équation (1.3), périodique de période $T\cdot\varepsilon$, celle d'une solution périodique $w(t, \varepsilon)$ de l'équation (1.2) de période T, d'où l'on obtient immédiatement une solution $z(t, \varepsilon) = w(t\varepsilon, \varepsilon)$ de l'équation (1.1) de période T. L'existence d'une solution périodique $u(t, \varepsilon)$ de l'équation (1.3) peut être déduite d'un théorème sur les fonctions implicites et du théorème du point fixe de Banach. Dans la démonstration du théorème sur la fonction implicite nous avons appliqué la méthode topologique de Ważewski [2]. Certains autres résultats sur l'existence d'une solution périodique de l'équation (1.1) sont exposés, par exemple, dans le livre de Halanay [1].

1. Remarque 1. On vérifie facilement que l'équation (1.1) admet une solution périodique de période T telle que $z(0, \varepsilon) \to \eta_0$ exclusivement dans le cas où l'équation (1.2) admet une solution $w(t, \varepsilon)$ périodique de période εT telle que $w(0, \varepsilon) \to \eta_0$.

Admettons les hypothèses suivantes:

Hypothèses A. (1) $Z(t, u, v, \varepsilon)$ est une fonction de classe C^1 pour $0 \leqslant t < \infty$, $-\infty < u < +\infty$, $-\infty < v < +\infty$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, périodique par rapport à t de période $T > \tau$.

(2) Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$(1.4) \qquad |Z(t, u, v, \varepsilon)| \leqslant M, \qquad |Z_u(t, u, v, \varepsilon)| \leqslant M, \qquad |Z_v(t, u, v, \varepsilon)| \leqslant M$$

pour $(t, u, v, \varepsilon) \in R = \{(t, u, v, \varepsilon)\colon 0 \leqslant t \leqslant T, |u| \leqslant r, |v| \leqslant r, 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$.

Lemme 1. *Sous les hypothèses* A *il existe une constante* k *telle que pour chaque solution* $w(t)$ *de l'équation* (1.2) *telle que* $\big(t, w(t), w(t-\varepsilon\tau), \varepsilon\big) \in R$ *pour* $0 \leqslant t \leqslant T$ *et pour une solution* $u(t)$ *de l'équation* (1.3) *telle que* $\big(t, u(t), u(t), \varepsilon\big) \in R$ *pour* $0 \leqslant t \leqslant T$ *et* $w(0) = u(0)$ *on a*

$$(1.5) \qquad |w(t) - u(t)| \leqslant k\varepsilon\tau \qquad \textit{pour } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Démonstration. De la définition de $w(t)$ et $u(t)$ il vient

$$\begin{aligned} |u'(t) - w'(t)| &\leqslant \big|Z\big(t/\varepsilon, u(t), u(t), \varepsilon\big) - Z\big(t/\varepsilon, w(t), w(t-\varepsilon\tau), \varepsilon\big)\big| \\ &\leqslant \big|Z\big(t/\varepsilon, u(t), u(t), \varepsilon\big) - Z\big(t/\varepsilon, w(t), w(t), \varepsilon\big)\big| + \\ &\qquad + \big|Z\big(t/\varepsilon, w(t), w(t-\varepsilon\tau), \varepsilon\big) - Z\big(t/\varepsilon, w(t), w(t), \varepsilon\big)\big| \\ &\leqslant 2M|u(t) - w(t)| + M|w(t-\varepsilon\tau) - w(t)| \\ &\leqslant 2M|u(t) - w(t)| + M^2\varepsilon\tau. \end{aligned}$$

En vertu de la théorie des inégalités différentielles on a donc

$$(1.6) \qquad |w(t) - u(t)| \leqslant \tfrac{1}{2}M\varepsilon\tau\,\{e^{2Mt} - 1\} \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Posons par définition

$$k = \tfrac{1}{2}M\,\{e^{2MT} - 1\}.$$

On obtient donc

$$|w(t) - u(t)| \leqslant k\varepsilon\tau.$$

Le lemme 1 est ainsi démontré.

2. Admettons les hypothèses A et les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES B. (1) $Z(t, u, v, \varepsilon)$ est croissante par rapport à u et v.

(2) Il existe $q > 0$ tel que

$$Z_u(t/\varepsilon, u, u, \varepsilon) + Z_v(t/\varepsilon, u, u, \varepsilon) \geqslant q > 0 \quad \text{pour } |u| \leqslant r,\ 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.1}$$

(3) Il existe une solution $u(t, \varepsilon)$ de l'équation (1.3) périodique par rapport à t de période $T\varepsilon$, telle que

$$|u(t, \varepsilon)| \leqslant \tfrac{1}{2}r \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.2}$$

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* A *et* B *il existe pour* $\varepsilon > 0$ *suffisamment petit une solution* $z(t, \varepsilon)$ *de l'équation* (1.1) *de période* T *telle que*

$$|z(t, \varepsilon)| \leqslant r, \tag{2.3}$$

Démonstration. En vertu de la remarque 1 il suffit de prouver qu'il existe une solution $w(t, \varepsilon)$ de l'équation (1.2) périodique de période $T\varepsilon$ satisfaisant à (2.5). Comme $u(t, \varepsilon)$ est périodique de période $T\varepsilon$ on a

$$u(T\varepsilon, \varepsilon) - u(0, \varepsilon) = \int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon, u(t, \varepsilon), u(t, \varepsilon), \varepsilon\big)dt = 0.$$

Envisageons la solution $u(t, \eta, \varepsilon)$ de l'équation (1.4) satisfaisante à la condition initiale $u(0, \eta, \varepsilon) = \eta$. Evaluons

$$u(T\varepsilon, \eta, \varepsilon) - u(0, \eta, \varepsilon) = \int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon, u(t, \eta, \varepsilon), u(t, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big)dt.$$

Posons par définition

$$F(\eta, \varepsilon) = \int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon, u(t, \eta, \varepsilon), u(t, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big)dt.$$

Nous avons pour $\eta = u(0, \varepsilon)$

$$F\big(u(0, \varepsilon), \varepsilon\big) = 0, \tag{2.4}$$

$$F'_\eta(\eta, \varepsilon) = \int_0^{T\varepsilon} \{Z_u\big(t/\varepsilon, u(t, \eta, \varepsilon) u(t, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big) + \\ + Z_v\big(t/\varepsilon, u(t, \eta, \varepsilon), u(t, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big)\} \frac{\partial}{\partial \eta} u(t, \eta, \varepsilon)dt.$$

De la formule de Bendixson on tire

$$\frac{\partial}{\partial \eta} u(t, \eta, \varepsilon) = \exp\Big[\int_0^t \{Z_u\big(s/\varepsilon, u(s, \eta, \varepsilon), u(s, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big) + \\ + Z_v\big(s/\varepsilon, u(s, \eta, \varepsilon), u(s, \eta, \varepsilon), \varepsilon\big)\} ds\Big]$$

et par suite

$$F'_\eta(\eta, \varepsilon) = \exp\Big\{\int_0^{T\varepsilon}\big[Z_u(s/\varepsilon, u(s, \eta, \varepsilon), u(s, \eta, \varepsilon), \varepsilon)+$$
$$+Z_v(s/\varepsilon, u(s, \eta, \varepsilon), u(s, \eta, \varepsilon), \varepsilon)\big]dt\Big\}-1 \geqslant e^{Tq\varepsilon}-1 \geqslant T\varepsilon q$$
$$\text{pour } |\eta| \leqslant r-MT.$$

En vertu de (2.4) on a donc

$$F(\eta, \varepsilon) \geqslant T\varepsilon q[\eta-u(0, \varepsilon)] \quad \text{pour } u(0, \varepsilon) \leqslant \eta \leqslant r-MT\varepsilon, \tag{2.5}$$

$$F(\eta, \varepsilon) \leqslant T\varepsilon q[\eta-u(0, \varepsilon)] \quad \text{pour } -r+MT\varepsilon \leqslant \eta \leqslant u(0, \varepsilon). \tag{2.6}$$

De l'inégalité (1.6), pour la solution $w(t, \varphi+\eta, \varepsilon)$ de l'équation (1.2) satisfaisant à la condition initiale $w(s, \varphi+\eta, \varepsilon) = \varphi(s)+\eta$ pour $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ et $\varphi(0) = 0$ on tire

$$|w(t, \varphi+\eta, \varepsilon)-u(t, \eta, \varepsilon)| \leqslant k_\varepsilon \tau\varepsilon \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon \tag{2.7}$$

où

$$k_\varepsilon = \tfrac{1}{2}M\{e^{2MT\varepsilon}-1\}. \tag{2.8}$$

On a donc

$$w(T\varepsilon, \varphi+\eta, \varepsilon)-w(0, \varphi+\eta, \varepsilon)$$
$$\geqslant u(T\varepsilon, \eta, \varepsilon)-u(0, \eta, \varepsilon)-[u(T\varepsilon, \eta, \varepsilon)-w(T\varepsilon, \varphi+\eta, \varepsilon)]$$
$$\geqslant Tq\varepsilon[\eta-u(0, \varepsilon)]-k_\varepsilon\tau\varepsilon$$

pour $u(0, \varepsilon) \leqslant \eta \leqslant r-MT$.

De l'hypothèse (2.2) on obtient $|u(0, \varepsilon)| \leqslant \frac{1}{2}r$ et, par suite, pour $\eta = r-MT\varepsilon$ on tire

$$w(T\varepsilon, \varphi+\eta, \varepsilon)-w(0, \varphi+\eta, \varepsilon) \geqslant \varepsilon\{Tqr-MT^2q\varepsilon-\tfrac{1}{2}Tqr-k_\varepsilon\tau\}$$
$$= \varepsilon\{\tfrac{1}{2}Tqr-(k_\varepsilon\tau+MT^2q\varepsilon)\}.$$

En vertu de (2.8) pour ε suffisamment petit on a pour $\eta_1 = r-MT\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$

$$w(T\varepsilon, \varphi+\eta_1, \varepsilon)-w(0, \varphi+\eta_1, \varepsilon) > 0. \tag{2.9}$$

D'une façon analogue on obtient pour $\eta_2 = -r+MT\varepsilon$

$$w(T\varepsilon, \varphi+\eta_2, \varepsilon)-w(0, \varphi+\eta_2, \varepsilon) < 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_1 \leqslant \varepsilon_0. \tag{2.10}$$

De l'inégalité (2.9) et (2.10), en vertu de la continuité de la fonction $w(T\varepsilon, \varphi+ +\eta, \varepsilon)-w(0, \varphi+\eta, \varepsilon)$ par rapport à η, il résulte que pour chaque fonction continue $\varphi(s)$ telle que

$$\varphi(-T\varepsilon, \varepsilon) = \varphi(0, \varepsilon) = 0 \tag{2.11}$$

il existe $\eta_\varphi \in (-r+MT\varepsilon, r-MT\varepsilon)$ tel que la solution $w(t, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon)$ de l'équation (1.2) avec la condition initiale

$$w(s, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon) = \eta_\varphi + \varphi(s, \varepsilon) \quad \text{pour } -\tau\varepsilon \leqslant s \leqslant 0 \tag{2.12}$$

satisfait à la condition

$$w(T\varepsilon, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon) - w(0, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon) = 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \bar{\varepsilon}. \tag{2.13}$$

Envisageons l'ensemble G des fonctions $\varphi(s, \varepsilon)$ continues dans l'intervalle $[-T\varepsilon, 0]$ satisfaisant à (2.11) et telles que

$$|\varphi(s, \varepsilon)| \leqslant r, \tag{2.14}$$

$$|\varphi(\bar{s}, \varepsilon) - \varphi(\bar{\bar{s}}, \varepsilon)| \leqslant M|\bar{s}-\bar{\bar{s}}| \quad \text{pour } \bar{s}, \bar{\bar{s}} \in [-T\varepsilon, 0]. \tag{2.15}$$

L'ensemble G ainsi défini est borné, fermé, convexe et compact. Envisageons la transformation suivante

$$(L_\varepsilon \varphi)(s) = w(s+\varepsilon T, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon) - \eta_\varphi \quad \text{pour } -\varepsilon T \leqslant s \leqslant 0.$$

Nous démontrons que $LG \subset G$. Evaluons $|(L\varphi)(s)|$ pour $\varphi \in G$,

$$\begin{aligned} |(L\varphi)(s)| &= |w(s+\varepsilon T, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon) - \eta_\varphi| = \Big| \int_{-T\varepsilon}^{s} w'(\zeta+\varepsilon T, \varphi+\eta_\varphi, \varepsilon)\, d\zeta \Big| \\ &\leqslant MT\varepsilon \quad (\text{pour } -T\varepsilon \leqslant s \leqslant 0). \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \leqslant r/MT$ on a

$$|(L\varphi)(s)| \leqslant r \quad \text{pour } \varphi \in G.$$

L'inégalité (2.15) est une conséquence de (1.4). La relation (2.11) pour $(L\varphi)(s)$ est une conséquence immédiate de (2.13) et de la définition de $L\varphi$. On a donc $LG \subset G$.

Démontrons que $L\varphi$ est continue dans G. Envisageons φ_0 quelconque $\varphi_0 \in G$ et la suite $\varphi_v \to \varphi_0$, $\varphi_v \in G$. Supposons que $L\varphi_v \nrightarrow L\varphi_0$. La dépendance continue de l'intégrale de la condition initiale et l'hypothèse que $\varphi_v \to \varphi_0$ et $L\varphi_v \nrightarrow L\varphi_0$ entraînent $\eta_{\varphi_v} \nrightarrow \eta_{\varphi_0}$. Comme η_{φ_v} est borné, il existe une suite $\alpha_v \to \infty$ telle que

$$\eta_{\varphi_{\alpha_v}} \to \bar{\eta} \neq \eta_{\varphi_0}.$$

En vertu de (2.13) on a

$$\int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon, w(t, \varphi_{\alpha_v}+\eta_{\varphi_{\alpha_v}}, \varepsilon), w(t-\varepsilon\tau, \varphi_{\alpha_v}+\eta_{\varphi_{\alpha_v}}, \varepsilon), \varepsilon\big)\, dt = 0$$

d'où on obtient

$$\int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon, w(t, \varphi_0+\bar{\eta}, \varepsilon), w(t-\varepsilon\tau, \varphi_0+\bar{\eta}, \varepsilon), \varepsilon\big)\, dt = 0$$

et

$$\int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon,\, w(t,\, \varphi_0+\eta_{\varphi_0},\, \varepsilon),\, w(t-\varepsilon\tau,\, \varphi_0+\eta_{\varphi_0},\, \varepsilon),\, \varepsilon\big)dt = 0.$$

Envisageons le cas où $\eta_{\varphi_0} < \bar{\eta}$. Puisque $Z(t/\varepsilon, u, v, \varepsilon)$ est croissante par rapport à u, v, on a

$$w(t,\, \varphi_0+\eta_{\varphi_0},\, \varepsilon) < w(t,\, \varphi_0+\bar{\eta},\, \varepsilon) \quad \text{pour } -T\varepsilon \leqslant t \leqslant T\varepsilon$$

et par suite

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon,\, w(t,\, \varphi_0+\bar{\eta},\, \varepsilon),\, w(t-\varepsilon\tau,\, \varphi_0+\bar{\eta},\, \varepsilon),\, \varepsilon\big)dt \\ &< \int_0^{T\varepsilon} Z\big(t/\varepsilon,\, w(t,\, \varphi_0+\eta_{\varphi_0},\, \varepsilon),\, w(t-\varepsilon\tau,\, \varphi_0+\eta_{\varphi_0},\, \varepsilon),\, \varepsilon\big)dt = 0. \end{aligned}$$

La contradiction obtenue démontre que $\eta_{\varphi_v} \to \eta_{\varphi_0}$ et par suite $L\varphi_v \to L\varphi_0$. Il existe donc un point fixe de la transformation L, c'est-à-dire un $\tilde{\varphi} \in G$ tel que $L\tilde{\varphi} = \tilde{\varphi}$ et par suite

$$w(s+\varepsilon T,\, \tilde{\varphi}+\eta_{\tilde{\varphi}},\, \varepsilon) - \eta_{\tilde{\varphi}} = \tilde{\varphi}(s) \quad \text{pour } -\varepsilon T \leqslant s \leqslant 0$$

et

$$w(s+\varepsilon T,\, \tilde{\varphi}+\eta_{\tilde{\varphi}},\, \varepsilon) = \tilde{\varphi}(s)+\eta_{\tilde{\varphi}} \quad \text{pour } -T\varepsilon \leqslant s \leqslant 0.$$

De la périodicité de $Z(t/\varepsilon, u, v, \varepsilon)$ il s'ensuit donc que $w(t, \tilde{\varphi}+\eta_{\tilde{\varphi}}, \varepsilon)$ est périodique de période εT.

3. Remarque 2. Dans le cas où dans le théorème 1 on suppose aussi que $\lim_{\varepsilon\to 0} u(t, \varepsilon) = u(t, 0)$ la limite $\lim_{\varepsilon\to 0} w(t, \varepsilon) = w(t, 0) = u(t, 0)$ existe. On a

$$\begin{aligned} |w(t, \varepsilon)-u(t, 0)| &\leqslant |w(t, \varepsilon)-u(t, \varepsilon)|+|u(t, \varepsilon)-u(t, 0)| \\ &\leqslant k_\varepsilon \tau\varepsilon+|u(t, \varepsilon)-u(t, 0)| \end{aligned}$$

d'où il vient

$$\lim_{\varepsilon\to 0} |w(t, \varepsilon)-u(t, 0)| = 0.$$

La fonction $z(t, \varepsilon) = w(t\varepsilon, \varepsilon)$ est donc une solution périodique de l'équation (1.1) de période T $(T > \tau)$ telle que

$$\lim_{\varepsilon\to 0} z(t, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} w(t\varepsilon, \varepsilon) = u(0, 0) = \eta_0.$$

4. Un théorème sur les fonctions implicites. Envisageons l'équation suivante sur les fonctions implicites

$$F(\varepsilon, \eta) = 0. \tag{4.1}$$

Admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES H.

$$F(0, \eta) = 0. \tag{4.2}$$

La fonction $F(\varepsilon, \eta)$ est continue pour $\varepsilon \geqslant 0$ et de classe C^1 pour $\varepsilon > 0$, $|\eta| \leqslant \tilde{r}$ $(\varepsilon \leqslant \varepsilon_0)$

$$F_\eta(\varepsilon, \eta) > 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ |\eta| \leqslant \tilde{r}, \tag{4.3}$$

$$\eta \cdot F_\varepsilon(\varepsilon, \eta) > 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ |\eta| = r. \tag{4.4}$$

THÉORÈME 2. *Sous les hypothèses* H *il existe une solution unique* $\eta(\varepsilon)$ *de l'équation* (4.1) *telle que* $|\eta(\varepsilon)| < \tilde{r}$ *pour* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Démonstration. Envisageons l'équation différentielle

$$\eta'(\varepsilon) = \frac{-F_\varepsilon(\varepsilon, \eta(\varepsilon))}{F_\eta(\varepsilon, \eta(\varepsilon))} \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \ |\eta| \leqslant \tilde{r}. \tag{4.5}$$

Posons par définition

$$W(\varepsilon, \eta) = \frac{-F_\varepsilon(\varepsilon, \eta)}{F_\eta(\varepsilon, \eta)}.$$

Des hypothèses (4.3) et (4.4) il résulte que

$$\tilde{r}W(\varepsilon, \tilde{r}) < 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$
$$-\tilde{r}W(\varepsilon, -\tilde{r}) < 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Désignons par Ω l'ensemble

$$(\Omega) = \{(\varepsilon, \eta) \colon 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, |\eta| \leqslant \tilde{r}\}.$$

Sur l'ensemble $S = \{|\eta| = \tilde{r}, 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0\}$ les intégrales de l'équation (4.5) sortent de l'ensemble Ω pour ε décroissants. Tous les points de l'ensemble S sont des points de sortie stricte (cf. [2]) pour ε décroissents et par suite on peut appliquer la méthode topologique de Ważewski (cf. [2]). Ainsi on constate l'existence d'un η^* tel que l'intégrale $\eta(\varepsilon, \varepsilon_0, \eta^*)$ de l'équation (4.5) tel que $\eta(\varepsilon_0, \varepsilon_0, \eta^*) = \eta^*$ satisfait à l'inégalité

$$|\eta(\varepsilon, \varepsilon_0, \eta^*)| < \tilde{r} \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \tag{4.6}$$

donc il existe une suite $\varepsilon_v \to 0$ telle que

$$\eta(\varepsilon_v) \overset{\mathrm{df}}{=} \eta(\varepsilon_v, \varepsilon_0, \eta^*) \to \bar{\eta}.$$

En vertu de la continuité de la fonction $F(\varepsilon, \eta)$ pour $\varepsilon = 0$ on a

$$\lim_{v \to \infty} F(\varepsilon_v, \eta(\varepsilon_v)) = F(0, \bar{\eta}) = 0.$$

On vérifie facilement que $F(\varepsilon, \eta(\varepsilon, \varepsilon_0, \eta^*)) = \text{const} = c$ et par suite

$$\lim_{\nu\to\infty} F(\varepsilon_\nu, \eta(\varepsilon_\nu)) = c = 0$$

c'est-à-dire

$$F(\varepsilon, \eta(\varepsilon, \varepsilon_0, \eta^*)) = 0 \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

Il reste à démontrer l'unicité d'une telle solution $\eta(\varepsilon)$ de l'équation (4.1). Envisageons un $\bar{\varepsilon} \in (0, \varepsilon_0]$. On a

$$F(\bar{\varepsilon}, \eta(\bar{\varepsilon}, \varepsilon_0, \eta^*)) = 0.$$

De l'hypothèse (3.3) il résulte donc

$$F(\bar{\varepsilon}, \eta) > 0 \qquad \text{pour } \eta > \eta(\bar{\varepsilon}, \varepsilon_0, \eta^*),$$
$$F(\bar{\varepsilon}, \eta) < 0 \qquad \text{pour } \eta < \eta(\bar{\varepsilon}, \varepsilon_0, \eta^*),$$

et par suite pour chaque $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $\eta(\varepsilon, \varepsilon_0, \eta^*)$ est la solution unique de l'équation (4.1). Le théorème 2 est ainsi démontré.

5. HYPOTHÈSES H_1. Supposons que pour chaque η, $|\eta| \leqslant \tilde{r}$ il existe une constante $M(\eta)$ telle que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0,\ \zeta\to\eta} \left|\frac{F_\varepsilon(\varepsilon, \zeta)}{F_\eta(\varepsilon, \zeta)}\right| \leqslant M(\eta). \tag{5.1}$$

THÉORÈME 3. *Sous les hypothèses* H *et* H_1 *il existe une limite de la solution* $\eta(\varepsilon)$ *de l'équation* (4.1) *pour* $\varepsilon \to 0$, *où* $\eta(\varepsilon)$ *est la solution de* (4.5) *satisfaisant à* (4.6).

Démonstration. Envisageons une suite quelconque $\varepsilon \to 0$ $(0 < \varepsilon_\nu \leqslant \varepsilon_0)$ telle que $\eta(\varepsilon_\nu)$ est convergente,

$$\lim_{\nu\to\infty} \eta(\varepsilon_\nu) = \hat{\eta}, \qquad |\hat{\eta}| \leqslant \tilde{r}, \qquad \varepsilon_\nu \to 0. \tag{5.2}$$

De l'inégalité (5.1) il résulte qu'il existe $\varrho > 0$ tel que

$$\left|\frac{F_\varepsilon(\varepsilon, \zeta)}{F_\eta(\varepsilon, \zeta)}\right| < 2M(\hat{\eta}) \tag{5.3}$$

pour $0 < \varepsilon \leqslant \varrho$, $|\zeta - \hat{\eta}| \leqslant \varrho$.

Nous démontrons que pour chaque n suffisamment grand il existe v_n tel que

$$|\eta(\varepsilon) - \hat{\eta}| \leqslant 2M(\hat{\eta})(1/n - \varepsilon) \leqslant 2M(\hat{\eta})/n \tag{5.4}$$
$$\text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{v_n} < 1/n, \ n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

On vérifie facilement que l'ensemble

$$Z_n = \{(\varepsilon, \eta) |\ 0 < \varepsilon \leqslant 1/n,\ |\eta - \hat{\eta}| \leqslant 2M(\hat{\eta})(1/n - \varepsilon)\}$$

pour n suffisamment grand est contenu dans l'ensemble

$$\omega = \{(\varepsilon, \eta) | \; 0 < \varepsilon \leqslant \varrho, \; |\eta - \hat{\eta}| \leqslant \varrho\},$$

où est satisfaite l'inégalité (5.3). Puisque $(\varepsilon_v, \eta(\varepsilon_v)) \to (0, \hat{\eta})$ il existe v_n tel que

$$0 < \varepsilon_{v_n} < 1/2n, \quad |\eta_{v_n} - \hat{\eta}| < M(\hat{\eta})/n = 2M(\hat{\eta})(1/n - 1/2n) < 2M(\hat{\eta})(1/n - \varepsilon_{v_n})$$

c'est-à-dire $(\varepsilon_{v_n}, \eta(\varepsilon_{v_n})) \in Z_n$. On a

$$|\eta'(\varepsilon)| \leqslant 2M(\hat{\eta})$$

pour $(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \in Z_n$ et par suite

$$|\eta(\varepsilon) - \eta(\varepsilon_{v_n})| \leqslant 2M(\hat{\eta})(\varepsilon_{v_n} - \varepsilon)$$

pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{v_n}$ tel que $(s, \eta(s)) \in Z_n$ pour $\varepsilon \leqslant s \leqslant \varepsilon_{v_n}$, d'où on obtient

$$\begin{aligned} |\eta(\varepsilon) - \hat{\eta}| &\leqslant |\eta(\varepsilon) - \eta(\varepsilon_{v_n})| + |\eta(\varepsilon_{v_n}) - \hat{\eta}| \\ &< 2M(\hat{\eta})(1/n - \varepsilon_{v_n}) + 2M(\hat{\eta})(\varepsilon_{v_n} - \varepsilon) = 2M(\hat{\eta})(1/n - \varepsilon) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{v_n} \end{aligned}$$

c'est-à-dire $(\varepsilon, \eta(\varepsilon)) \in Z_n$ pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_{v_n}$. Pour $n \to \infty$ on obtient $\lim_{\varepsilon \to 0} |\eta(\varepsilon) - \hat{\eta}| = 0$. Le théorème 3 est ainsi démontré.

6. Application du théorème 2 à la démonstration de l'existence d'une solution périodique d'une équation différentielle. Envisageons l'équation différentielle

$$(6.1) \qquad u'(t) = \Phi(t, u(t), \varepsilon) \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$$

et admettons les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES $\bar{\mathrm{A}}$. 1° $\Phi(t, u, \varepsilon)$ est de classe C^1 par rapport à (t, u, ε) pour $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$;

2° $\Phi(t, u, \varepsilon)$ est périodique par rapport à t de période $T\varepsilon > 0$;

3° il existe $M > 0$, $r > 0$ tel que

$$(6.2) \qquad |\Phi(t, u, \varepsilon)| \leqslant M \quad \text{pour } |u| \leqslant r, \; 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0,$$

$$(6.3) \qquad |\Phi_u(t, u, \varepsilon)| \leqslant M \quad \text{pour } |u| \leqslant r, \; 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0.$$

HYPOTHÈSES $\bar{\mathrm{B}}$. 1° Il existe une constante $q > 0$ telle que

$$(6.4) \qquad \Phi_u(t, u, \varepsilon) \geqslant q > 0 \quad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \; |u| \leqslant r,$$

2°

$$(6.5) \qquad \eta\Phi(T\varepsilon, \eta, \varepsilon) > 0 \quad \text{pour } |\eta| \geqslant \tfrac{1}{4}r,$$

$$(6.6) \qquad \eta\Phi_\varepsilon(t, \eta, \varepsilon) \geqslant 0 \quad \text{pour } |\eta| \geqslant \tfrac{1}{4}r, \; 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon_0.$$

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* $\bar{\mathrm{A}}$ *et* $\bar{\mathrm{B}}$ *il existe pour* ε *suffisamment* *petits une solution unique $u(t, \varepsilon)$ de l'équation* (6.1) *périodique de période $T\varepsilon$, telle que*

$$|u(t, \varepsilon)| \leqslant \tfrac{1}{2}r. \tag{6.7}$$

Démonstration. Envisageons ε^* quelconque (fixé) $0 < \varepsilon^* \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1$. Nous démontrons que pour chaque fonction $\varphi(t)$ continue dans l'intervalle $0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^*$ telle que

$$\varphi(0) = \varphi(T\varepsilon^*) = 0, \tag{6.8}$$

$$|\varphi(t)| \leqslant \tfrac{1}{4}r \quad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant T\varepsilon^* \tag{6.9}$$

il existe $\eta_{\varepsilon^*}, |\eta_{\varepsilon^*}| < \frac{1}{2}r$ tel que

$$\int_0^{T\varepsilon^*} \Phi\big(t, \varphi(t)+\eta_{\varepsilon^*}, \varepsilon^*\big)\,dt = 0. \tag{6.10}$$

Envisageons la fonction

$$F(\varepsilon, \eta) = \begin{cases} \int_0^{T\varepsilon} \Phi\big(t, \varphi(t)+\eta, \varepsilon\big)\,dt & \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0, \\ 0 & \text{pour } \varepsilon = 0. \end{cases} \tag{6.11}$$

En vertu de (6.2) la fonction $F(\varepsilon, \eta)$ ainsi définie est continue pour $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ et $F(0, \eta) = 0$ c'est-à-dire que les hypothèses (4.2) du théorème 2 sont satisfaites. En vertu de (6.4)

$$F_\eta(\varepsilon, \eta) = \int_0^{T\varepsilon} \Phi_u\big(t, \varphi(t)+\eta, \varepsilon\big)\,dt > 0 \qquad \text{pour } 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

et par suite (4.3) est satisfaite. Il reste à prouver (4.4). De la définition de $F(\varepsilon, \eta)$ on tire

$$\eta F_\varepsilon(\varepsilon, \eta) = \eta T \Phi\big(T\varepsilon, \varphi(T\varepsilon)+\eta, \varepsilon\big) + \eta \int_0^{T\varepsilon} \Phi_\varepsilon\big(t, \varphi(t)+\eta, \varepsilon\big)\,dt$$

pour $|\eta| = \tilde{r} = \frac{1}{2}r$ on a, en vertu de (6.9),

$$|\eta+\varphi(t)| \geqslant |\eta| - |\varphi(t)| \geqslant \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{4}r = \tfrac{1}{4}r$$

et par suite, en vertu de (6.5) et (6.6), on a pour $|\eta| = \tilde{r}$

$$[\eta+\varphi(T\varepsilon)]\,\Phi\big(T\varepsilon, \varphi(T\varepsilon)+\eta, \varepsilon\big) > 0$$

et

$$[\eta+\varphi(t)]\,\Phi_\varepsilon\big(t, \varphi(t)+\eta, \varepsilon\big) \geqslant 0.$$

Mais pour $|\eta| = \frac{1}{2}r$ et $|\varphi(t)| \leqslant \frac{1}{4}r$ on a

$$\operatorname{sgn}\big(\eta+\varphi(t)\big) = \operatorname{sgn}\eta$$

et par suite

$$1 = \operatorname{sgn}\left[(\eta+\varphi(T\varepsilon))\cdot\Phi(T\varepsilon,\ \varphi(T\varepsilon)+\eta,\ \varepsilon)\right] = \operatorname{sgn}\left[\eta\Phi(T\varepsilon,\ \varphi(T\varepsilon)+\eta,\ \varepsilon)\right]$$

et

$$\operatorname{sgn}\left[(\eta+\varphi(t))\Phi_\varepsilon(t,\ \varphi(t)+\eta,\ \varepsilon)\right] = \operatorname{sgn}\left(\eta\cdot\Phi_\varepsilon(t,\ \varphi(t)+\eta,\ \varepsilon)\right)$$

d'où on obtient

$$\eta F_\varepsilon(\varepsilon,\ \eta) = T\eta\Phi(T\varepsilon,\ \varphi(T\varepsilon)+\eta,\ \varepsilon)+\eta\int_0^{T\varepsilon}\Phi_\varepsilon(t,\ \varphi(t)+\eta,\ \varepsilon)\,dt > 0$$

$$\text{pour } |\eta| = \tilde{r} = \tfrac{1}{2}r.$$

On peut donc appliquer le théorème 2 avec $\tilde{r} = \frac{1}{2}r$. Dès lors, il existe $\eta(\varepsilon,\ \varepsilon^*,\ \varphi)$ tel que

$$\int_0^{T\varepsilon}\Phi(t,\ \varphi(t)+\eta(\varepsilon,\ \varepsilon^*,\ \varphi),\ \varepsilon)\,dt = 0, \tag{6.12}$$

$$|\eta(\varepsilon,\ \varepsilon^*,\ \varphi)| < \tfrac{1}{2}r. \tag{6.13}$$

Envisageons l'ensemble des fonctions continues

$$\Lambda_{\varepsilon^*} = \{\varphi\in C^{[0,T\varepsilon^*]}\colon\ \ \varphi(0) = \varphi(T\varepsilon^*) = 0,\ |\varphi(t)| \leqslant \tfrac{1}{4}r,\ |\varphi(\bar{t})-\varphi(\bar{\bar{t}})| \leqslant M|\bar{t}-\bar{\bar{t}}|\}.$$

L'ensemble Λ_{ε^*} est fermé, borné convexe et compact. Envisageons la transformation

$$(W_{\varepsilon^*}\varphi)(s) = \begin{cases}\displaystyle\int_0^s\Phi(t,\ \varphi(t)+\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi),\ \varepsilon^*)\,dt & \text{pour } 0 < s \leqslant T\varepsilon^*,\\ 0 & \text{pour } s = 0.\end{cases}$$

Dans le cas où $MT\varepsilon^* \leqslant \frac{1}{4}r$ on a

$$|(W_{\varepsilon^*}\varphi)(s)| \leqslant \tfrac{1}{4}r \qquad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant T\varepsilon^*.$$

De la définition de $\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi)$ il résulte que

$$(W_{\varepsilon^*}\varphi)(0) = (W_{\varepsilon^*}\varphi)(T\varepsilon^*) = 0,$$
$$|(W_{\varepsilon^*}\varphi)(s_1)-(W_{\varepsilon^*}\varphi)(s_2)| \leqslant M|s_1-s_2|$$

et par suite $W_{\varepsilon^*}\Lambda_{\varepsilon^*} \subset \Lambda_{\varepsilon^*}$. Nous allons démontrer que $W_{\varepsilon^*}\varphi$ est continue dans Λ_{ε^*}. Evaluons $\|W_{\varepsilon^*}\varphi_1 - W_{\varepsilon^*}\varphi_2\|$

$$\begin{aligned}(6.14)\quad & |(W_{\varepsilon^*}\varphi_1)(s)-(W_{\varepsilon^*}\varphi_2)(s)\\ &= \left|\int_0^s\{\Phi(t,\ \varphi_1(t)+\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi_1),\ \varepsilon^*)-\Phi(t,\ \varphi_2(t)+\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi_2),\ \varepsilon^*)\}\,dt\right|\\ &\leqslant MT\varepsilon^*\{\max_{0\leqslant t\leqslant T\varepsilon^*}|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|+|\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi_1)-\eta(\varepsilon^*,\ \varepsilon^*,\ \varphi_2)|\}.\end{aligned}$$

De la définition de $\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi)$ il vient

$$0 = \int_0^{T\varepsilon^*} \{\Phi(t, \varphi_1(t)+\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_1), \varepsilon^*)-\Phi(t, \varphi_2(t)+\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_2), \varepsilon^*)\}\, dt$$

$$= \int_0^{T\varepsilon^*} \left[\Phi_u\big(t, \theta(t, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon^*), \varepsilon^*\big), \big(\varphi_1(t)-\varphi_2(t)\big)\right] dt +$$

$$+[\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_1)-\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_2)] \int_0^{T\varepsilon^*} \Phi_u\big(t, \theta(t, \varphi_1, \varphi_2, \varepsilon^*), \varepsilon^*\big) dt$$

d'où l'on obtient, en vertu de (6.3) et (6.4),

$$|\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_1)-\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi_2)| \leqslant \frac{MT\varepsilon^* \|\varphi_1-\varphi_2\|}{T\varepsilon^* q} = \frac{M}{q}\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

et par suite de (6.14) on tire

$$\|W_{\varepsilon^*}\varphi_1 - W_{\varepsilon^*}\varphi_2\| \leqslant MT\varepsilon^* \{1+M/q\} \|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

La transformation $W_{\varepsilon^*}\varphi$ est donc continue et pour ε^* suffisamment petit on peut appliquer le théorème du point fixe de Banach à la transformation $W_{\varepsilon^*}\varphi$ dans l'ensemble Λ_{ε^*}. Désignons par $\varphi(t, \varepsilon^*)$ le point fixe unique de la transformation $W_{\varepsilon^*}\varphi$,

$$\varphi(t, \varepsilon^*) \in \Lambda_{\varepsilon^*}, \qquad [W_{\varepsilon^*}\varphi(\cdot, \varepsilon^*)](s) = \varphi(s, \varepsilon^*) \qquad \text{pour } 0 \leqslant s \leqslant T\varepsilon^*$$

c'est-à-dire

$$\varphi(s, \varepsilon^*) = \int_0^s \Phi\big(t, \varphi(t, \varepsilon^*)+\eta(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi(\cdot, \varepsilon^*)), \varepsilon^*\big) dt,$$

$$\varphi(0, \varepsilon^*) = \varphi(T\varepsilon^*, \varepsilon^*) = 0$$

et par suite la fonction

$$u(t, \varepsilon^*) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(t, \varepsilon^*)+\eta\big(\varepsilon^*, \varepsilon^*, \varphi(\cdot, \varepsilon^*)\big)$$

est une solution de l'équation (6.1) satisfaisant à la condition

$$u(T\varepsilon^*, \varepsilon^*)-u(0, \varepsilon^*) = \int_0^{T\varepsilon^*} \Phi\big(t, u(t, \varepsilon^*), \varepsilon^*\big) dt = 0.$$

En vertu de la périodicité de $\Phi(t, u, \varepsilon^*)$ la fonction $u(t+T\varepsilon^*, \varepsilon^*) = u(t, \varepsilon^*)$ est une solution périodique de l'équation (6.1) de période $T\varepsilon^*$ pour $0 \leqslant t < +\infty$. Puisque ε^* est suffisamment petit quelconque $(0 < \varepsilon^* \leqslant \bar{\varepsilon} < \varepsilon_0)$ le théorème 4 est donc démontré.

7. Dans le cas envisagé dans le théorème 1 on a

$$\Phi(t, u, \varepsilon) = Z(t/\varepsilon, u, u, \varepsilon)$$

et par suite en vertu du théorème 4, l'hypothèse B3 est satisfaite, par exemple, dans le cas où sont satisfaites les hypothèses suivantes:

HYPOTHÈSES Z.

$$\begin{aligned}
|Z_u(t, u, u, \varepsilon)+Z_v(t, u, u, \varepsilon)| &\leqslant M && \text{pour } |u| \leqslant r,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\\
|Z(t, u, u, \varepsilon)| &\leqslant M && \text{pour } |u| \leqslant r,\ 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\\
Z_u(t, u, u, \varepsilon)+Z_v(t, u, u, \varepsilon) &\geqslant q>0 && \text{pour } 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\ |u|\leqslant r,\\
\eta Z(T, \eta, \eta, \varepsilon) &> 0 && \text{pour } |\eta|\geqslant \tfrac{1}{4}r,\\
\eta\{Z_\varepsilon(t/\varepsilon, \eta, \eta, \varepsilon)-t/\varepsilon^2 Z_t(t/\varepsilon, \eta, \eta, \varepsilon)\} &\geqslant 0 && \text{pour } 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0,\\
& && 0\leqslant t\leqslant T,\ |\eta|\geqslant\tfrac{1}{4}r.
\end{aligned}$$

EXEMPLE. Envisageons le cas où

$$Z(t, u, v, \varepsilon) \overset{\text{df}}{=} \varepsilon^2 p(t)\psi(u, v, \varepsilon)+\Gamma(u, v, \varepsilon),$$

où $p(t)$ est une fonction de classe C^1 périodique de période $T>\tau$, $p(t)\geqslant 0$

$$\begin{gathered}
|\psi(u, v, \varepsilon)|\leqslant M, \quad |\Gamma(u, v, \varepsilon)|\leqslant M, \quad |\Gamma_u+\Gamma_v|\leqslant M,\\
|(\psi_u+\psi_v)|\leqslant M, \quad |\Gamma_u+\Gamma_v|\geqslant q>0, \quad |\psi_\varepsilon|\leqslant M,
\end{gathered}$$

$\psi(u, v, \varepsilon)$ et $\Gamma(u, v, \varepsilon)$ sont croissantes par rapport à u et v

$$\begin{aligned}
\eta\Gamma(\eta, \eta, \varepsilon) &> 0 && \text{pour } |\eta|\geqslant\tfrac{1}{4}r,\\
\eta\{\Gamma_\varepsilon(\eta, \eta, \varepsilon)-tp'(t/\varepsilon)\psi(\eta, \eta, \varepsilon)\} &\geqslant \varrho>0 && \text{pour } 0\leqslant t\leqslant T,\ |\eta|\geqslant\tfrac{1}{4}r.
\end{aligned}$$

On vérifie facilement que dans le cas envisagé les hypothèses Z, A et B sont satisfaites (pour ε suffisamment petit), donc il existe une solution $z(t, \varepsilon)$ de l'équation

$$\frac{dz(t)}{dt} = \varepsilon^3 p(t)\psi\big(z(t), z(t-\tau), \varepsilon\big)+\varepsilon\Gamma\big(z(t), z(t-\tau), \varepsilon\big)$$

périodique par rapport à t de période T pour $0<\varepsilon\leqslant\tilde{\varepsilon}_0\leqslant\varepsilon_0$.

Travaux cités

[1] A. Halanay, *Differential equations, stability, oscillations, time lags*, Academic Press, 1966.

[2] T. Ważewski, *Sur le principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique des integrales des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. 2 (1947), 279–313.

Reçu par la Rédaction le 28.10.1977