ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1976)
CONFERENCE ON ANALYTIC FUNCTIONS

Sur la topologie tonnelée associée a la topologie de Nachbin

par PHILIPPE NOVERRAZ (Nancy)

Résumé. Soit (E_n) une décomposition de Schauder d'un espace vectoriel topologique localement convexe E dont la topologie T induit une topologie tonnelée sur chaque E_n. Nous prouvons qu'il existe au plus une topologie tonnelée T' qui coïncide avec T sur chaque E_n et qui est telle que (E_n) soit encore une décomposition de Schauder pour T'. Nous appliquons ce résultat pour prouver que, sur l'espace $H(E)$ des fonctions analytiques (c'est-à-dire continues et de restrictions aux sous-espaces de dimension finie analytiques) sur un elc E, la topologie T_δ engendrée par les recouvrements ouverts et dénombrables de E est exactement la topologie tonnelée associée à la topologie T_ω de Nachbin.

Soit E un elc (espace vectoriel topologique localement convexe séparé sur le corps des complexes) rappelons qu'on appelle *décomposition de Schauder la* donnée d'une suite (E_n) de sous-espaces de E telle que tout x de E s'écrit de manière unique $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$, avec x_n dans E_n pour tout n, et telle que les applications $u_n\colon x \to \sum_{i=1}^{n} x_i$ sont continues. La notion de base de Schauder correspond au cas où chaque E_n est de dimension 1.

L'étude des fonctions analytiques en dimension infinie (voir par exemple [7] pour les définitions) fournit un exemple intéressant de décomposition de Schauder. En effet, si E est un elc, $H(E)$ l'espace des fonctions analytiques (c'est-à-dire continues et dont la restriction aux sous-espaces de dimension finie est analytique) sur E et si $\mathcal{P}(^nE)$ est l'espace des applications polynômiales continues homogène de degré n, Dineen a monté [1] que les espaces $\mathcal{P}(^nE)$ forment, via le développement de Taylor à l'origine, une décomposition de Schauder de $H(E)$ pour les topologies T_δ et T_ω (voir plus loin pour les définitions) qui sont les topologies les plus intéressantes que l'on considère habituellement sur cet espace.

D'autre part, si l'on note T la topologie d'un elc E, on sait qu'on peut lui associer une topologie tonnelée, notée T_t, qui est la borne inférieure des topologies tonnelées plus fines que T. Cette topologie, que l'on peut construire (voir [3] et [8]) par un procédé d'itération transfinie, est solution du problème co-universel des applications linéaires continues d'un espace tonnelé dans E (c'est-à-dire que de telles applications se factorisent à travers E, T_t).

Dans ce qui suit nous allons étudier les relations qui peuvent exister entre la topologie tonnelée associée et la décomposition de Schauder et appliquer les résultats obtenus pour caractériser la topologie T_δ sur l'espace $H(E)$ des fonctions analytiques.

LEMME 1. *Si (E_n) est une décomposition de Schauder d'un espace tonnelé E, on peut supposer que la topologie de E est engendrée par des semi-normes p telles que $p(x) = \sup_n p[u_n(x)]$ pour tout x de E.*

Démonstration. Soit $(p_a)_{a\in A}$ l'ensemble des semi-normes qui définit la topologie de E et posons, pour tout n, $q_a(x) = \sup_n p_a[u_n(x)]$. La topologie engendrée par les $(q_a)_{a\in A}$ est plus fine que la topologie initiale T. Montrons qu'elle lui est égale, c'est-à-dire que toute semi-norme q_a est T-continue ce qui équivaut à dire, puisque l'espace est tonnelé, que l'ensemble $B = \{x\in E, q_a(x) \leqslant 1\}$ est un tonneau de E. L'ensemble B est évidemment convexe, équilibré et absorbant; montrons qu'il est fermé: soit x un point adhérent à B alors $u_n(x)$ est adhérent à $u_n(B)$ pour tout n. Comme, pour tout n, $p[u_n(y)] \leqslant 1$ pour tout y de B et p restreinte à E_n est T-continue il s'ensuit que $p[u_n(x)]$ est adhérent à $p[u_n(B)]$ et donc que $p_n(x) \leqslant 1$. De ceci on déduit que x appartient à B puisque $p(x) = \sup p[u_n(x)]$.

On peut alors démontrer:

THÉORÈME 1. *Si (E_n) est une décomposition de Schauder d'un* elc(E, T) *tel que T induise une topologie tonnelée sur chaque E_n, il existe au plus une topologie tonnelée T' qui coïncide avec T sur chaque E_n et qui est telle que (E_n) soit encore une décomposition de Schauder. Cette topologie, si elle existe, n'est autre que la topologie tonnelée associée à T et est engendrée par les semi-normes sur E qui satisfont aux conditions suivantes:*

$(*)$ $p(x) = \sup_n p[u_n(x)]$,

$(**)$ *la restriction de p à E_n est continue pour tout n.*

COROLLAIRE 1. *Soient T_1 et T_2 deux topologies tonnelées sur E et telles qu'il existe une décomposition de Schauder (E_n) pour T_1 et T_2, alors $T_1 = T_2$ si et seulement si T_1 et T_2 coincident sur chaque E_n.*

COROLLAIRE 2. *Soit E un espace vectoriel et (e_n) une suite de points de E, il existe au plus une topologie tonnelée T sur E telle que (e_n) soit une base de Schauder de (E, T).*

Remarque. On sait [2] que si (E_n) est une décomposition de Schauder d'un espace tonnelé alors E_n est tonnelé pour la topologie induite.

Démonstration. Supposons qu'il existe une topologie tonnelée notée T'' telle que (E_n) soit une décomposition de Schauder pour T''

et telle que $T'' = T$ sur chaque E_n. D'après le lemme 1 on peut supposer que les semi-normes définissant T'' satisfont au conditions $(*)$ et $(**)$. Notons T' la topologie engendrée par toutes les semi-normes satisfaisant à $(*)$ et $(**)$, c'est une topologie plus fine que T''. Montrons que $T'' = T'$: si p est une semi-norme T'-continue un raisonnement semblable à celui fait dans la démonstration du lemme 1 prouve que l'ensemble $A = \{x \in E, p(x) \leqslant 1\}$ est un tonneau pour T'' qui est une topologie tonnelée. La semi-norme p est donc bien T''-continue. Cette topologie T' est évidemment plus fine que T donc plus fine que la topologie tonnelée associée T_t; on montre alors que $T'' = T_t$ en recommençant le raisonnement précédent appliqué à T_t au lieu de T''.

Remarque. Le corollaire 2 entraine des résultats du type suivant: soit ${}_q l_p$ un espace l^p muni de la norme l^q, $1 \leqslant p \leqslant q < +\infty$, alors ${}_q l_p$ est tonnelé si et seulement si $p = q$.

Le théorème précédent serait plus intéressant si l'on savait répondre à la question suivante: tout décomposition de Schauder d'un elc est-elle encore une décomposition de Schauder pour la topologie tonnelée associée? La réponse positive à cette question entraine une caractérisation de la topologie tonnelée associée. En fait il semble que la réponse soit négative en général; elle est positive si la topologie tonnelée associée est compatible avec la dualité c'est-à-dire possède le même dual.

PROPOSITION 1. *Soit* (E, T) *un* elc *dont la topologie tonnelée associée* T_t *est compatible avec la dualité* (E, E') *alors toute décomposition de Schauder pour* T *est encore une décomposition de Schauder pour* T_t.

Démonstration. On sait [4] que dans un espace tonnelé une suite (E_n) de sous-espaces est une décomposition de Schauder si et seulement si cette suite est une décomposition de Schauder pour la topologie faible sur E. Comme les topologies T et T_t sont compatibles elles induisent la même topologie faible sur E et, comme (E_n) est une T-décomposition de Schauder, il s'ensuit que $u_n(x)$ tend vers x faiblement pour tout x et les applications u_n sont faiblement continues. La décomposition (E_n) est de Schauder pour la topologie faible, donc aussi pour T_t d'après le résultat rappelé plus haut.

Remarque. Comme la topologie tonnelée associée est plus fine que la topologie forte $\beta(E, E')$ elle n'est pas compatible en général avec la dualité. On peut cependant prouver le résultat suivant:

PROPOSITION 2. *Si* (E, T) *est un* elc, *la topologie tonnelée associée est compatible avec la dualité* (E, E') *si et seulement si le dual* E'_σ *est quasi-complet.*

La démonstration utilise le résultat classique suivant:

LEMME 2. *Si* E *est un* elc *muni d'une topologie de Mackey alors* E *est tonnelé si et seulement si* E'_σ *est quasi-complet.*

Si T_t est compatible avec la dualité, les espaces (E, T) et (E, T_t) ont le même dual sur lequel les topologies faibles coincident. Comme T_t est tonnelée, ces topologies faibles sont quasi-complètes. Réciproquement, supposons que $(E, T)'_\sigma$ est quasi-complet. La topologie de Mackey correspondant à T est tonnelée en vertu du lemme 2, donc plus fine que la topologie T_t; cette dernière est donc compatible avec la dualité.

Théorème 1′. *Soit* (E, T) *un* elc *possèdant une decomposition de Schauder* (E_n) *et dont la topologie* T *induit sur chaque* E_n *une topologie tonnelée. Si de plus* E'_σ *est quasi-complet, il existe une topologie tonnelée et une seule telle que* (E_n) *soit encore une décomposition de Schauder. Cette topologie, qui n'est autre que la topologie tonnelée associée, est engendrée par les semi-normes satisfaisant aux conditions* $(*)$ *et* $(**)$ *du théorème* 1.

Corollaire. *Si* E *est un* elc *à base de Schauder et si* E'_σ *est quasi-complet la topologie tonnelée associée est engendrée par l'ensemble des semi-normes telles que* $p(x) = \sup_n p[u_n(x)]$.

Application aux fonctions analytiques en dimension infinie

Rappelons que, si E est un elc, plusieurs topologies s'introduisent naturellement sur l'espace $H(E)$ des fonctions analytiques (c'est-à-dire continues et dont les restrictions aux sous-espaces de dimension finie sont analytiques); ce sont en particulier (voir par exemple [1] et [5]):

la topologie T_ω de Nachbin, engendrée par les semi-normes portées par les compacts de E (une semi-norme p est portée par un compact K si pour tout voisinage V de K il existe une constante $C > 0$ telle que $p(f) \leqslant C|f|_V$ pour tout f de $H(E)$).

la topologie T_δ, engendrée par les semi-normes p telles que pour tout recouvrement dénombrable, ouvert et croissant (U_n) de E il existe un entier n_0 et une constante $C > 0$ tels que $p(f) \leqslant C|f|_{U_{n_0}}$ pour tout f de $H(E)$.

la topologie $T_{\omega,b}$ (resp. $T_{\omega,t}$) bornologique (resp. tonnelée) associée à T_ω.

On a les relations suivantes entre ces topologies:

$$\begin{tikzcd} & H(E), T_{\omega,b} \arrow[dr] & \\ H(E), T_\delta \arrow[ur] \arrow[dr] & & H(E), T_\omega \\ & H(E), T_{\omega,t} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

où la flèche indique la continuité de l'application identique.

Le résultat le plus général liant les topologies T_δ et T_ω est dû à Dineen qui a montré que dans de nombreux cas, et en particulier si l'espace E est métrisable, T_δ est la topologie bornologique associée à T_ω. Le résultat suivant ne fait intervenir aucune restriction sur l'espace:

THÉORÈME 2. *Pour tout* elc E *la topologie* T_δ *est la topologie tonnelée associée à* T_ω.

Démonstration. D'après la proposition 2.1 de [1], les sous-espaces $E_n = \mathscr{P}({}^nE)$ forment une décomposition de Schauder de $H(E)$ pour les topologies T_δ et T_ω; par le lemme 1.2 de [1] sur chaque E_n ces topologies coïncident et sont tonnelées. Le théorème 1 entraine, puisque T_δ est tonnelée, que celle-ci coïncide avec la topologie tonnelée associée à T_ω et qu'elle est l'unique topologie tonnelée qui coïncide avec T_ω sur chaque $\mathscr{P}({}^nE)$ et qui est telle que $\big(\mathscr{P}({}^nE)\big)$ soit une décomposition de Schauder.

COROLLAIRE. *La topologie* T_ω (*resp.* $T_{\omega,b}$) *est tonnelée si et seulement si* $T_\omega = T_\delta$ (*resp.* $T_{\omega,b} = T_\delta$).

Terminons par une caractérisation des bornés de $H(E)$ pour T_δ: la topologie T_δ peut aussi être considérée comme la topologie bornologique tonnelée associée à T_ω (c'est-à-dire la borne inférieure des topologies bornologiques et tonnelées plus fines que T_ω). Or la topologie bornologique tonnelée associée à un elc (E, T) est égale (voir [6]) à la topologie bornologique associée à la topologie forte $\beta(E, E')$. D'où:

PROPOSITION 3. *Les ensembles bornés de* $H(E), T_\delta$ *sont exactement les ensembles fortement bornés de* $H(E), T_\omega$ (*c'est-à-dire bornés pour la topologie* $\beta\big[\big(H(E), T_\omega\big), \big(H(E), T_\omega\big)'\big]$).

Références

[1] S. Dineen, *Holomorphic functions on* lcs, Ann. Inst. Fourier 23 (1973), p. 19–54.

[2] N. J. Kalton, *Schauder decomposition in* lcs, Proc. Camb. Phil. Soc. 68 (1970), p. 68–75.

[3] Y. Komura, *On linear topological spaces*, Kumamoto J. Sci. A 5 (1962), p. 148–157.

[4] Mc Arthur, *The weak basis theorem*, Colloq. Math. 16 (1967), p. 71–76.

[5] L. Nachbin, *Sur les espaces vectoriels topologiques d'applications continues*, C.R. Acad. Sci. Paris 371 (1970), p. 596–598.

[6] K. Noureddine, *L'espace bornologique tonnelé associé à un espace localement convexe*, ibidem 275 (1972), p. 977–979.

[7] Ph. Noverraz, *Pseudo-convexité, convexité polynomiale et domaines d'holomorphie en dimension infinie*, North-Holland, 1973.

[8] A. Robert, *Quelques questions d'espaces vectoriels topologiques*, Comm. Math. Helv. 42 (1967), p, 314–342.

UNIVERSITE DE NANCY I
MATHÉMATIQUES
NANCY CEDEX, FRANCE