ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

# Über gewisse Type äquivalenter Variationsprobleme von einem Parameter

von A. Moór (Szeged)

**§ 1. Einleitung.** Wir werden im folgenden zwei Variationsprobleme äquivalent nennen, falls die Mannigfaltigkeiten ihrer Extremalkurven $E$ und $E^*$ übereinstimmen. Die Grundfunktionen der zu untersuchenden Variationsprobleme sollen immer solchen Homogeneitätsrelationen genügen, die die Parameterinvarianz der zu Grunde gelegten Variationsprobleme sichern. Bei einem Variationsproblem dessen Grundintegral die Form:

$$I = \int_{t_0}^{t} F\big(x^i(t), \dot{x}^i(t), \ddot{x}^i(t)\big)\, dt\,, \qquad \dot{x}^i = \frac{dx^i}{dt}, \ \ddot{x}^i = \frac{d^2x^i}{dt^2} \tag{1.1}$$

hat, wird somit $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ der Homogeneitätsrelation

$$F(x, \varrho\dot{x}, \varrho^2\ddot{x}+\sigma\dot{x}) = \varrho F(x, \dot{x}, \ddot{x})\,, \qquad \varrho > 0\,, \ \sigma \text{ beliebig} \tag{1.2}$$

genügen, wo wir kürze halber nur $x, \dot{x}, \ddot{x}$ statt $x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i$ gesetzt haben.

Aus (1.2) bekommen wir unmittelbar durch Ableitung nach $\varrho$ bzw. $\sigma$ zwei weitere wichtige Relationen, die für die Grundfunktion $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ gelten müssen (vgl. [1], insb. Formel (1)). Die Ableitung von (1.2) nach $\varrho$ gibt, wenn nachher $\varrho = 1$, $\sigma = 0$ gesetzt wird:

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i + 2\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\ddot{x}^i = F(x, \dot{x}, \ddot{x}) \tag{1.3a}$$

und die Ableitung nach $\sigma$ gibt nach der Substitution $\varrho = 1$, $\sigma = 0$:

$$\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\dot{x}^i = 0\,. \tag{1.3b}$$

Jetzt und im folgenden soll immer auf doppelt vorkommende Indizes summiert werden. Ist $F$ von $\ddot{x}^i$ unabhängig, so drückt (1.2) die positive Homogeneität von $F$ in den $\dot{x}^i$ aus, und (1.3a) reduziert sich auf

$$\frac{\partial F(x, \dot{x})}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i = F(x, \dot{x})\,. \tag{1.4}$$

Der Euler-Lagrangesche Vektor des zur Grundfunktion $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ gehörigen Variationsproblems ist:

$$\mathcal{E}_i(F) \overset{\text{df}}{=} \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\,; \tag{1.5}$$

die Extremalen sind durch

$$\mathcal{E}_i(F) = 0 \tag{1.6}$$

charakterisiert.

In diesem Aufsatz wollen wir solche Variationsprobleme untersuchen, deren Grundfunktionen $F(x, \dot{x}, \ddot{x})$ und $F^*(x, \dot{x}, \ddot{x})$ den Relationen von der Form

$$\mathcal{E}_i(F^*) \equiv \varphi_i^k \mathcal{E}_k(F)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.7}$$

genügen, wo die Funktionen $\varphi_i^k$ von $x^j, \dot{x}^j, \ddot{x}^j, \dddot{x}^j, x^{(4)j}$ abhängig sein können, und *der Rang der Matrix* $(\varphi_i^k)$ *gleich* $n$ *ist.* Diese Bedingung sichert, daß

$$\mathcal{E}_i(F^*) = 0$$

dann und nur dann besteht, falls (1.6) gültig ist. Die Identität in (1.7) soll bedeuten, daß (1.7) längs jeder Kurven besteht, d.h. (1.7) ist eine Identität in $x^i, \dot{x}^i, \ddot{x}^i, \dddot{x}^i, x^{(4)i}$. Bezüglich $\varphi_i^k$ wollen wir annehmen, daß $\varphi_i^k$ ein Tensor ist; somit ist (1.7) offenbar eine Koordinateninvariante Relation.

Für $\varphi_i^k$ werden wir verschiedene Bedingungen stellen; $\varphi_i^k$ soll im ersten Falle allein von $x^i$ abhängig, bzw. es soll $\varphi_i^k =$ konst. sein.

Der Typus (1.7) ist eine Verallgemeinerung unser Arbeit: *Über äquivalente Variationsprobleme erster und zweiter Ordnung* (vgl. [2]).

**§ 2. Der zweidimensionale Fall.** Nehmen wir in diesem Paragraphen an, daß der Basisraum mit dem Grundintegral (1.1) zweidimensional ist, d.h. die Indizes sollen immer die Werte $i = 1, 2$ durchlaufen. Wir beweisen den folgenden

SATZ 1. *Bestehen die Identitäten* (1.7), *ist ferner in* (1.7) $\varphi_i^k$ *ein allein von* $x^i$ *abhängiger Tensor, so hat im zweidimensionalen Fall* $\varphi_i^k$ *die Form*:

$$\varphi_i^k(x) = \delta_i^k \lambda(x)\,, \qquad \delta_i^k = \begin{cases} 1\,, & i = k\,, \\ 0\,, & i \neq k\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

*wo* $\lambda(x)$ *einen Skalar bedeutet.*

Beweis. Auf Grund von (1.3a) und (1.3b) kann leicht gezeigt werden, daß $\dot{x}^i$ zu dem durch (1.5) angegebenen Eulerschen Vektor immer senkrecht steht, d.h. es gilt für eine beliebige Funktion: $F(x, \dot{x}, x)$

$$\dot{x}^i \mathcal{E}_i\big(F(x, \dot{x}, \ddot{x})\big) \equiv 0\,. \tag{2.2}$$

Nach (1.5) wird nämlich:

$$\dot{x}^i \mathcal{E}_i(F) \equiv \frac{\partial F}{\partial x^i}\dot{x}^i - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i\right) + \frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\ddot{x}^i + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\dot{x}^i\right) - 2\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\ddot{x}^i\right) + \frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\dddot{x}^i .$$

Beachten wir jetzt (1.3b), und eliminieren wir $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i}\dddot{x}^i$ mittels (1.3a), so bekommen wir unmittelbar die Relation (2.2).

Die Relation (2.2) gilt auch im $n$-dimensionalen Fall. Demnach bekommt man aus (1.7) nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^i$

$$(2.3) \qquad \dot{x}^i \varphi_i^k \mathcal{E}_k(F) = 0 ,$$

da die Relation (2.2) offenbar auch für die Funktion $F^*$ besteht. Die Relation (2.3) drückt aus, daß außer dem Vektor $\dot{x}^i$ auch der Vektor $\dot{x}^j \varphi_j^k$ auf $\mathcal{E}_k(F)$ senkrecht steht. Im zweidimensionalen Fall steht aber nach (2.2) nur $\lambda \dot{x}^k$ auf $\mathcal{E}_k(F)$ senkrecht, wo $\lambda$ einen beliegiben Skalar bedeutet; somit wird:

$$(2.4) \qquad \varphi_i^k(x)\dot{x}^i = \lambda(x, \dot{x})\dot{x}^k ,$$

wo $\lambda(x, \dot{x})$ nach (2.4) offenbar in den $\dot{x}^i$ homogen von nullter Ordnung sein muß. Von anderen Veränderlichen ist $\lambda$ unabhängig, da die linke Seite von (2.4) nur von $x^i$, $\dot{x}^i$ abhängt. Differenziert man nun (2.4) partiell nach $\dot{x}^j$, so wird:

$$(2.5) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \dot{x}^j}\dot{x}^k + \lambda \delta_j^k = \varphi_j^k(x) .$$

Eine Verjüngung über $j$ und $k$ gibt auf Grund der Homogeneität nullter Ordnung des Skalars $\lambda$ die Formel:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\varphi_k^k(x) ,$$

d.h. $\lambda$ ist nur von $x^i$ abhängig, von $\dot{x}^i$ aber unabhängig. Die Gleichung (2.5) geht aber somit in (2.1) über, w.z.b.w.

Wir wollen noch bemerken, daß der Satz 1 auch dann gilt, falls $\varphi_i^k$ in einem Koordinatensystem nicht nur von $x^j$, sondern auch von $x^j$, $\ddot{x}^j$ abhängig ist. Diese Annahme aber, daß nämlich $\varphi_i^k$ von den $x^j$ und $\ddot{x}^j$ abhängt, ist im allgemeinen nicht koordinateninvariant, da nach einer Koordinatentransformation in den Transformationsformeln von $\overline{\varphi}_i^k$ auch $\dot{\overline{x}}^j$ vorkommen können. Ist aber $\varphi_i^k$ nur von $x^j$ abhängig, so folgt aus der Transformationsformel der Tensoren, daß auch $\overline{\varphi}_i^k$ nur von $\overline{x}^j$ anhängig ist.

**§ 3. Der Typus** $F = F(x, \dot{x})$. Nehmen wir an, daß die Grundfunktionen $F$ und $F^*$ der Grundintegrale von $\ddot{x}^i$ unabhängig sind. In diesem Falle wird aus der Formel (1.5):

$$\mathcal{E}_i(F) = \frac{\partial F}{\partial x^i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}. \tag{3.1}$$

Die Bedingung (1.3b) ist eine Identität, da $\frac{\partial F}{\partial \ddot{x}^i} = 0$ ist, und (1.3a) reduziert sich auf

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\dot{x}^i = F(x, \dot{x}). \tag{3.2}$$

Wir beweisen den folgenden

Satz 2. *Ist $\varphi_i^k$ nur von $x^j$ abhängig, so sind für das bestehen der Relationen* (1.7) *die folgenden Relationen notwendig und hinreichend*:

$$\delta_i^k F^*(x, \dot{x}) - \varphi_i^k(x) F(x, \dot{x}) = \frac{1}{n} S_i(x)\dot{x}^k + \psi_i^k(x, \dot{x}), \tag{3.3}$$

*wo die Funktionen $\psi_i^k(x, \dot{x})$ und $S_i(x)$ den Gleichungen*:

$$\partial_{\dot{x}^k}\psi_i^k(x, \dot{x}) = 0 \tag{3.4}$$

*und*

$$\partial_{x^k}\psi_i^k + F\partial_{x^k}\varphi_i^k = \frac{n-1}{n}\frac{dS_i(x)}{dt} + \frac{d\varphi_i^j(x)}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^j}. \tag{3.5}$$

*genügen müssen.*

Beweis. Erstens zeigen wir die Notwendigkeit. Nehmen wir also an, daß (1.7) besteht. Schreibt man (1.7) in der Form:

$$\partial_{x^k}(\delta_i^k F^* - \varphi_i^k F) + F\partial_{x^k}\varphi_i^k - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}^k}(\delta_i^k F^* - \varphi_i^k F) - \frac{d\varphi_i^k}{dt}\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^k} \equiv 0, \tag{3.6}$$

so kann das $\ddot{x}^i$ enthaltende Glied leicht berechnet werden. Da dieses Glied verschwinden muß, wird

$$\frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^j}\left(\delta_i^k F^*(x, \dot{x}) - \varphi_i^k(x) F(x, \dot{x})\right) \equiv 0 \tag{3.7}$$

bestehen. Die Formel (3.7) drückt — wegen der Summationskonvention über den Index $k$ — aus, daß die Formeln (3.3) und (3.4) bestehen. Substituiert man nun

$$\delta_i^k F^*(x, \dot{x}) - \varphi_i^k(x) F(x, \dot{x})$$

aus (3.3) in die Formel (3.6), beachtet man noch, daß

$$\frac{dS_i}{dt} \equiv \frac{\partial S_i}{\partial x^k} \dot{x}^k$$

gilt, so bekommt man aus (3.6), in Hinsicht auf (3.4), eben die Relation (3.5).

Wir zeigen jetzt, daß die Relationen (3.3)-(3.5) für (1.7) hinreichend sind, falls $\varphi_i^k$ nur von $x^j$ abhängig ist. Nehmen wir also an, daß die Relationen (3.3)-(3.5) bestehen. Wir beweisen, daß unter diesen Bedingungen (1.7) wirklich erfüllt ist. Nach (3.3)-(3.5) ist (3.6) eine Identität, wie das durch Einsetzen von

$$\delta_i^k F^*(x, \dot{x}) - \varphi_i^k(x) F(x, \dot{x})$$

aus (3.3) in (3.6), und unter Beachtung von (3.4) und (3.5) bestätigt werden kann. Beachten wir jetzt, daß $\varphi_i^k$ nur von $x^j$ abhängig ist, und hiernach $\partial_{\dot{x}^k} \varphi_i^k \equiv 0$ ist, so geht (3.6) eben in (1.7) über. Damit ist der Satz 2 vollständig bewiesen.

Wir wollen jetzt denjenigen Spezialfall näher untersuchen, in dem ein Koordinatensystem existiert in welchem $\varphi_i^k =$ konst. ist. Der Satz 2 gilt natürlich auch in diesem Falle, die Gleichung (3.5) vereinfacht sich aber auf:

$$\partial_{x^k} \psi_i^k(x, \dot{x}) \equiv \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\partial S_i(x)}{\partial x^p} \dot{x}^p \,. \tag{3.8}$$

Fordern wir, daß $\varphi_i^k =$ konst. in jedem Koordinatensystem bestehen soll, so besteht

$$\varphi_i^k = \delta_i^k \lambda \,, \quad (\delta_i^k = \text{Kronecker } \delta) \,, \tag{3.9}$$

wo $\lambda$ eine Konstante bedeutet. Bekanntlich hat nämlich $\mathcal{E}_i(F)$ kovarianten Vektorcharakter und nach (1.7) ist also $\varphi_i^k$ ein gemischter Tensor. Ist nun $\varphi_i^k$ eine vom Koordinatensystem unabhängige absolute Konstante, so hat $\varphi_i^k$ nach einem Satz von T. Y. Thomas eben die Form (3.9) (vgl. [3]).

Aus den Formeln (3.3)-(3.5) erhält man das folgende Korollar des Satzes 2:

KOROLLAR. *Gilt für $\varphi_i^k$ die Formel* (3.9) *mit konstantem $\lambda$, so unterscheiden sich $F^*$ und $\lambda F$ nur in einem vollständigen Differential.*

Beweis. Aus (3.3) bekommt man nach einer Verjüngung über $i$, $k$ in Hinsicht auf (3.9) die Formel:

$$F^* - \lambda F = \frac{1}{n^2} S_p(x) \dot{x}^p + \frac{1}{n} \psi(x, \dot{x}) \,, \tag{3.10}$$

wo

$$\psi(x,\dot{x}) \overset{\mathrm{df}}{\equiv} \psi^k_k(x,\dot{x}) \tag{3.10a}$$

bedeutet. Eliminiert man $\varphi^k_i$ aus (3.3) mittels (3.9), so wird auf Grund von (3.10):

$$\psi^k_i(x,\dot{x}) = \delta^k_i\left(\frac{1}{n^2} S_p(x)\dot{x}^p + \frac{1}{n}\psi(x,\dot{x})\right) - \frac{1}{n} S_i(x)\dot{x}^k . \tag{3.11}$$

Substituieren wir das in (3.4), so wird

$$\left(\frac{1}{n^2} - 1\right) S_i(x) + \frac{1}{n}\partial_{\dot{x}^i}\psi = 0 .$$

Beachten wir, daß $F$ und $F^*$ in den $\dot{x}^i$ homogen von erster Ordnung sind, so folgt aus (3.3), daß auch $\psi^k_i$, und auf Grund von (3.10a) auch $\psi$ in den $\dot{x}^i$ homogen von erster Ordnung ist. Dann bekommt man aus unserer letzten Gleichung nach einer Überschiebung mit $\dot{x}^i$:

$$\frac{1}{n}\psi = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) S_p(x)\dot{x}^p .$$

Aus (3.11) wird somit

$$\psi^k_i(x,\dot{x}) = \delta^k_i S_p(x)\dot{x}^p - \frac{1}{n} S_i(x)\dot{x}^k . \tag{3.12}$$

Dieser Wert von $\psi^k_i$ genügt schon der Gleichung (3.4). Die Gleichung (3.8) die der Gleichung (3.5) entspricht, gibt

$$\left(\frac{\partial S_p(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial S_i(x)}{\partial x^p}\right)\dot{x}^p = 0 ,$$

woraus folgt, daß

$$\frac{\partial S_p(x)}{\partial x^i} - \frac{\partial S_i}{\partial x^p} = 0 ,$$

d.h. $S_p$ ist ein Gradientvektor: $\dfrac{\partial S}{\partial x^p}$. Aus (3.3) wird nun auf Grund von (3.9) und (3.12)

$$\delta^k_i(F^* - \lambda F) = \delta^k_i \frac{\partial S(x)}{\partial x^p}\dot{x}^p = \delta^k_i \frac{dS(x)}{dt}$$

w.z.b.w.

Wir wollen noch darauf hinweisen, daß falls $S_p(x)$ ein Gradientvektor ist, d.h.

$$S_p = \frac{\partial S(x)}{\partial x^p}$$

besteht, so gibt (3.12) ein explizites Beispiel für $\psi^k_i$, so daß (3.4) und (3.5) mit $\varphi^k_i = \text{konst.}$ gelten.

**Literaturverzeichnis**

[1] A. Kawaguchi, *Theory of connections in a Kawaguchi space of order two*, Proc. Imp. Acad. 13 (1937), S. 183-186.

[2] A. Moór, *Über äquivalente Variationsprobleme erster und zweiter Ordnung*, Journ. Reine Angew. Math. 223 (1966), S. 131-137.

[3] T. Y. Thomas, *Tensors, whose components are absolute constants*, Ann. Math. 27 (1926), S. 548-550.

*Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1966*