ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

# Sur les approximations de M. Leja dans le problème plan de Dirichlet

par W. KLEINER (Kraków)

## Introduction

**1.** Soit $D$ un domaine borné simplement connexe dans le plan complexe, $D_\infty$ son extérieur (considéré sans le point à l'infini), $C = \partial D = \partial D_\infty$ la frontière commune, $f(z)$ une fonction réelle continue sur $C$, et $u(z)$ la solution simultanée des deux problèmes de Dirichlet suivants: $u(z)$ est continue dans le plan ouvert, harmonique dans $D$ et $D_\infty$, égale à $f$ sur $C$, et $u(z) = \log|z| +$ fonction bornée au voisinage de l'infini.

La méthode des points extrémaux, introduite par M. Leja ([9], [10], voir aussi [6]), consiste à trouver des points $x_{jn} = x_{jnf} \in C$ ($j = 0, 1, \ldots, n$; $n = 2, 3, \ldots$) tels que le produit

$$V^2(x_{0n}, \ldots, x_{nn}; f) = \prod_{j=0}^{n} \Delta_{jn}, \tag{1}$$

où

$$\Delta_{jn} = \prod_{k \neq j, k=0}^{n} \omega(x_{jn}, x_{kn}), \quad \omega(z, \zeta) = |z-\zeta| \exp[-f(z)-f(\zeta)] \quad (z, \zeta \in C)$$

soit le plus grand et à construire au moyen d'eux divères suites de fonctions dont la limite est liée à $u(z)$. M. Leja a utilisé les suites suivantes:

$$S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} \Phi_{jn}(z), \quad v_n = V^2(x_{0n}, \ldots, x_{nn})^{1/n(n+1)}, \tag{2}$$

$$\Phi_{jn}(z) = \Big[\exp - \sum_{k \neq j, k=0}^{n} f(x_{kn})\Big] A_{jn}(z)/\Delta_{jn}, \quad A_{jn}(z) = \prod_{k \neq j, k=0}^{n} |z - x_{kn}|.$$

Supposons que les points $x_{jn}$ soient rangés de manière que $\Delta_{0n} \leqslant \Delta_{jn}$ ($j = 0, \ldots, n$). Alors, M. Leja démontre ([10], [11]) que les limites suivantes existent:

$$v_n \downarrow v = v(C, f) > 0, \quad n^{-1} \log S_n(z) \to \Psi(z, f) \quad (n \to \infty, z \in D \cup C \cup D_\infty), \tag{3}$$

$$n^{-1} \log \Phi_{0n}(z) \to \Psi(z, f) \quad (n \to \infty, z \in D \cup D_\infty),$$

et que la limite $\Psi(z, f)$ est harmonique dans $D$ et $D_\infty$ et continue partout. On a

$$\Psi(z, f) = f(z) \qquad (z \in C_f \subset C)\,. \tag{4}$$

L'ensemble $C_f$ n'est jamais vide, mais $C - C_f$ peut aussi être non vide. Toutefois ([10], [6])

$$\lambda^{-1}\Psi(z, \lambda f) \to u(z) \qquad (\lambda \downarrow 0\,,\ z \in D)\,. \tag{5}$$

Appelons la fonction $f$ résoluble et écrivons $f \in R$ si $C_f = C$. Cette notion a été introduite par M. Siciak [18], qui a démontré: 1° que $f$ est résoluble si, et seulement si elle est la trace sur $C$ d'une fonction sous-harmonique dans le plan ouvert ayant un pôle de partie principale $\log|z|$ à l'infini, 2° que $\Psi(z, f)$ est alors sous-harmonique et $= u(z)$ dans le plan ouvert.

**2.** Nous supposons dès lors que 1° $C$ est une courbe simple, 2° $f \in R$, 3° $\mathrm{Var}\{f(z), z \in C\} < \infty$, 4° que pour un $a > 0$, $\Psi(z, f) = u(z) \in C^a$ dans $D \cup C$ et dans $D_\infty \cup C$, c'est-à-dire il existe un $A > 0$ tel que

$$|u(z) - u(\zeta)| \leqslant A|z-\zeta|^a \qquad (z, \zeta \in D \text{ ou bien } z, \zeta \in D_\infty)\,. \tag{6}$$

Si $C$ admet une courbure continue et $g(\zeta) \in C^1$ sur $C$, il existe [7] un $\lambda_0 > 0$ tel que toutes les hypothèses ci-dessus sont remplies par $f = \lambda g$ pour $\lambda \in (0, \lambda_0\rangle$. Par suite, $\lambda^{-1}\Psi(z, \lambda g)$ donne la résolution du problème de Dirichlet pour $g$ dans $D$, et (9), (10) sont valables.

**3.** Nous avons [19]

$$\Delta_{0n}^{1/n} \to v\,; \tag{7}$$

donc par (2), (3), (7) (voir [14])

$$(n+1)^{-1}\log F_n(z) \to F(z) = F(z, f) \qquad (n \to \infty\,,\ z \in D \cup D_\infty)\,, \tag{8}$$

$$F_n(z) \overset{\mathrm{dt}}{=} |z - x_{0n}|\,A_{0n}(z) = |z - x_{0n}|\,|z - x_{1n}| \ldots |z - x_{nn}|\,,$$

$$F(z, f) = \Psi(z, f) + \log v + h(f)\,, \qquad h(f) = \lim h_n(f)\,,$$

$$h_n(f) = (n+1)^{-1}\sum_{j=0}^{n} f(x_{jn})\,.$$

C'est pour la suite (8) que nous nous proposons d'estimer l'ordre de la convergence:

Théorème. *Sous les conditions* 1°-4° *du* n° 2,

$$F(z, f) = (n+1)^{-1}\log F_n(z) + O(n^{-1/2}\log n)V(z) \qquad (z \in D \cup D_\infty)\,, \tag{9}$$

$$\log v + h(f) = \log v_n + h_n(f) + O(n^{-1/2}\log n)\,, \tag{10}$$

*où* $V(z) = \mathrm{Var}_{\zeta \in C} \log|z - \zeta|^{-1}$ *est une fonction continue dans* $D \cup D_\infty$.

Nous avons à remercier M. Siciak qui a attiré notre attention sur la formule naturelle (10), (8) pour la valeur constante de la différence $F-\Phi$ et aussi suggéré de remplacer les conditions semblables à celles du travail [5], dans lesquelles nous nous étions d'abord placés, par la condition $f \in R$.

La démonstration est donnée aux n$^{os}$ suivants.

### Mesures et potentiels

**4.** Désignons par $S, S_1, T_n$ les classes des mesures (signées) [1] suivantes:

$\sigma \in S$ si $\sigma$ est portée par $C$ ($\int g d\sigma = 0$ pour toute fonction continue $g$ s'annulant sur $C$),

$\sigma \in S_1$ si $\sigma \in S$ et $\sigma(C) = 1$,

$\tau \in T_n$ si $\tau$ porte la masse aux $n$ points $a_1, \ldots, a_n \in C$ seulement, $1/n$ en chacun d'eux: $\int g(z) d\tau = \sum\limits_i g(a_i) n^{-1}$ pour chaque $g(z)$ continue. Les points $a_i$ dépendent de $\tau$.

Pour des mesures quelconques $\sigma, \tau$ soient

$$(11)\qquad U^\sigma(z) = \int \log|z-\zeta|^{-1} d\sigma(\zeta)\,, \qquad (\sigma, \tau) = \int U^\sigma d\tau\,, \qquad \|\sigma\|^2 = (\sigma, \sigma)$$

le potentiel de $\sigma$, l'énergie mutuelle ou produit scalaire de $\sigma$ par $\tau$, et l'énergie de $\sigma$ respectivement. Pour des mesures d'énergie finie le produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique. Il l'est aussi pour $\sigma$ de potentiel continu et $\tau \in T_n$, bien que l'énergie de $\tau$ soit infinie. Supposons le diamètre de $C \leqslant 1$; le noyau $\log|z-\zeta|^{-1}$ est alors positif pour $z, \zeta \in C$. De plus, il est défini, c'est-à-dire $\|\sigma\|^2 > 0$ ($\sigma \in S$) sauf pour $\sigma \equiv 0$ [16].

Posons encore

$$(12)\qquad U_0^\tau(z) = \int \log_0|z-\zeta|^{-1} d\tau(\zeta)\,, \qquad (\tau, \sigma)_0 = \int U_0^\tau d\sigma\,, \qquad \|\tau\|_0^2 = (\tau, \tau)_0\,,$$

où le signe $_0$ désigne que pour $z = \zeta$ l'intégrande est à remplacer par 0. (12) vaut pour $\tau \in T_n$, mais une mesure continue peut aussi y entrer. On voit immédiatement que pour $\sigma$ continue et $\tau \in T_n$, $(\tau, \sigma)_0$ est une forme bilinéaire symétrique, égale à $(\tau, \sigma)$, et que $\|\sigma\|_0^2 = \|\sigma\|^2$, $\|\tau\|_0^2 = \sum\limits_{i \neq k} n^{-2} \log_0 |a_i - a_k|^{-1}$.

### Application à la méthode des points extrémaux

**5.** $\Psi$ étant sous-harmonique, il existe [17] une et une seule mesure positive $\varphi \in S$ telle que dans le plan ouvert

$$(13)\qquad \Psi(z, f) = U^{-\varphi}(z) + H(z) \qquad \text{où} \qquad H(z) \equiv b = \text{const}\,, \quad \varphi(C) = 1\,.$$

Nous savons d'abord seulement que $H(z)$ est harmonique partout. Mais, au voisinage de l'infini, $H(z) = q\log|z|$, $q = 1-\varphi(C)$ (par (3) et (11)), donc $H(z) \geqslant \text{const}$ (si $q \geqslant 0$) ou bien $H(z) \leqslant \text{const}$ (si $q \leqslant 0$), donc par le théorème de Liouville [8] $H(z) \equiv b = \text{const}$; cela entraîne $q = 0$. Observons que $\varphi$ est continue, car $U^\varphi$ est continu en vertu du n°2.

Introduisons [4], [20] deux intégrales (voir (13) et n° 1)

$$I(\sigma, f) = \iint \{\log|z-\zeta|^{-1} + f(z) + f(\zeta)\}\, d\sigma(\zeta)\, d(z) \tag{14}$$

$$= \|\sigma-\varphi\|^2 - \|\varphi\|^2 + 2b \qquad (\sigma \in S_1)\,,$$

$$I_0(\tau, f) = \iint \{\log|z-\zeta|^{-1} + f(z) + f(\zeta)\}_0\, d\tau(\zeta)\, d(z) \tag{15}$$

$$= \|\tau-\varphi\|_0^2 - \|\varphi\|^2 + 2b \qquad (\tau \in T_n)$$

où la signification de $_0$ est la même que dans (12). Pour $\tau \in T_n$

$$I_0(\tau, f) = n^{-2}\log 1/V^2(a_1, \ldots, a_n; f)\,. \tag{16}$$

C'est cette relation qui permet l'application de la théorie du potentiel à l'étude de la méthode des points extrémaux [4], [20]. *La mesure* $\sigma_n \in T_n$ *pour laquelle* $a_j = x_{j-1,n-1}$ (n° 1) *est distinguée dans* $T_n$ *comme celle qui rend* $I_0(\tau, f)$ *minimum. On a*

$$U^{\sigma_n}(z) = -n^{-1}\log F_{n-1}(z, f)\,, \qquad I_0(\sigma_n, f) = (n-1)n^{-1}\log 1/v_{n-1}\,, \tag{17}$$

$$\int f\, d\sigma_n = h_{n-1}(f)\,.$$

### Estimation de la convergence

**6.** On trouve dans [4] la démonstration du fait suivant: De toute suite partielle $\sigma_{n(k)}$ on peut extraire une suite $\sigma_{n(k(j))} \to \sigma^*$, où $\sigma^* \in S_1$ et $I(\sigma^*, f) \leqslant I(\sigma, f)$ $(\sigma \in S_1)$. La démonstration de M. Górski se rapporte à l'espace, mais elle vaut aussi pour le plan — il suffit d'y écrire $\log|P-Q|^{-1}$ au lieu de $1/PQ$. Or, il suit de (14) qu'il existe une seule mesure minimale dans $S_1$: la mesure $\varphi$. Donc $\sigma^* = \varphi$ indépendamment de la suite $n(k)$, d'où $\sigma_n \to \varphi$. Par (5), (11), (12) de [4]

$$I_n \overset{\text{df}}{=} I_0(\sigma_n, f) \to I \overset{\text{df}}{=} I(\varphi, f) = -\|\varphi\|^2 + 2b\,. \tag{18}$$

D'autre part, par (17), (3) $(n-1)^{-1} n I_n \uparrow \log 1/v$ qui est donc égal à $I$. Donc $I_n \leqslant n^{-1}(n-1)I$, et nous avons par (15), (14), (18)

$$\|\sigma_n - \varphi\|_0^2 \leqslant -n^{-1}I\,. \tag{19}$$

Soit $Q_j$ la circonférence $|z-x_{j,n-1}| = n^{-p}$, $p = \max(3, 1/a)$ (n° 2); $C^* = C \cup Q_0 \cup \ldots \cup Q_{n-1}$; $\sigma^*_{jn}$ une mesure de densité constante et de masse $1/n$ sur $Q_j$, et $\sigma^*_n = \sum\limits_j \sigma^*_{jn}$. Soit encore $\sigma_n = \sum\limits_j \sigma_{jn}$ où $\sigma_{jn}(\{x_{j,n-1}\}) = 1/n$, $\sigma_{jn} = 0$ hors de ce point. Comme la moyenne de la fonction surharmonique $l(\zeta) = \log|z-\zeta|^{-1}$ sur $Q_j$ est au plus égale à sa valeur au point $x_{j,n-1}$, on a

$$U^{\sigma^*_{jn}}(z) \leqslant U^{\sigma_{jn}}(z) = n^{-1}\log|z-x_{j,n-1}|^{-1}$$

et puis

$$(\sigma^*_{jn}, \sigma^*_{kn}) \leqslant (\sigma_{jn}, \sigma_{kn}) \qquad (j \neq k) .$$

Comme $(\sigma^*_{jn}, \sigma^*_{jn}) = pn^{-2}\log n$, on obtient par sommation $\|\sigma^*_n\|^2 \leqslant \|\sigma_n\|_0^2 + pn^{-1}\log n$. Donc par (11), n° 2, (13) et (19),

$$\begin{aligned} (20) \qquad 0 &\leqslant \|\sigma^*_n - \varphi\|^2 = \|\sigma^*_n\|^2 - 2(\varphi, \sigma^*_n) + \|\varphi\|^2 \\ &\leqslant \|\sigma_n\|_0^2 + pn^{-1}\log n - 2(\varphi, \sigma_n) + An^{-1} + \|\varphi\|_0^2 \\ &= \|\sigma_n - \varphi\|_0^2 + O(n^{-1}\log n) = O(n^{-1}\log n) . \end{aligned}$$

Or, nous avons donné dans [7], un raisonnement par lequel (20) entraîne

$$(21) \qquad [\sigma^*_n - \varphi] = O(n^{-1/2}\log n) \qquad \text{et} \qquad [\sigma_n - \varphi] = O(n^{-1/2}\log n) ,$$

où [ ] est une norme définie pour des mesures $\beta \in S$ par

$$(22) \qquad [\beta] = \sup|\beta(L)| ,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les arcs de Jordan $L \subset C$. Rappelons un lemme, démontré dans [7] (37), que nous écrivons ici sous la forme générale

$$(23) \qquad \Big|\int\limits_C h(\zeta)\,d\beta(\zeta)\Big| \leqslant [\beta]\operatorname{Var}\{h(\zeta), \zeta \in C\} .$$

Par (21) et (22)

$$(24) \qquad |U^{\sigma_n}(z) - U^{\varphi}(z)| \leqslant V(z)\,O(n^{-1/2}\log n) ,$$

$$V(z) = \operatorname{Var}\{\log|z-\zeta|^{-1}, \zeta \in C\} , \qquad z \notin C .$$

Donc par (17), (13)

$$(25) \qquad |n^{-1}\log F_{n-1}(z, f) - \Psi(z, f) + b| \leqslant V(z)\,O(n^{-1/2}\log n) \qquad (z \notin C) .$$

Nous avons encore à calculer $b$. Intégrons (13) par rapport à $\varphi$; comme $\Psi = f$ sur $C$, on obtient à l'aide de (18)

$$b = \|\varphi\|^2 - \int f\,d\varphi = I - \int f\,d\varphi .$$

La formule approchée naturelle sera alors

$$b \approx b_n = I_n - \int f\, d\sigma_n .$$

Or,

$$I_n - I = \|\sigma_n - \varphi\|_0^2 = O(n^{-1}\log n)$$

par (19), (20) — et

$$\int f\, d\sigma_n = \int f\, d\varphi + O(n^{-1/2}\log n)$$

par (21), (22), donc

$$b = b_n + O(n^{-1/2}\log n) ,$$

et (10) est ainsi démontré (voir (17) et les remarques qui suivent (18)).

**7.** Remarque. Les dérivées convergent aussi, et nous avons par exemple

$$\left|\frac{\partial}{\partial x} U^{\sigma_n}(z) - \frac{\partial}{\partial x} F(z, f)\right| = \left|\int D(z, \zeta)\, d(\sigma_n - \varphi)\right| \leqslant V(z)\, O(n^{-1/2}\log n) ,$$

$$V_x(z) = \operatorname{Var}\{D(z, \zeta), \zeta \in C\} ,$$

$$D(z, \zeta) = \frac{\partial}{\partial x} \log \frac{1}{|z-\zeta|} = -\frac{\cos\arg(z-\zeta)}{|z-\zeta|} \qquad (z = x+iy \,\bar{\epsilon}\, C) ,$$

voir (23), (21), (17), (13).

**Travaux cités**

[1] N. Bourbaki, *Intégration,* Paris 1952.

[2] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten,* Math. Zeitschr. 17 (1932), pp. 228-249.

[3] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre,* Lund 1935.

[4] J. Górski, *Méthode des points extrémaux de résolution du problème de Dirichlet dans l'espace,* Ann. Polon. Math. 1 (1955), pp. 418-429.

[5] — *Une remarque sur la méthode des points extrémaux de F. Leja,* Ann. Polon. Math. 7 (1959), pp. 63-69.

[6] M. Inoue, *Sur un procédé pour construire la solution du problème de Dirichlet,* Proc. Imp. Acad. Tokyo 14 (1936), pp. 368-372.

[7] W. Kleiner, *Sur l'approximation de la représentation conforme par la méthode des points extrémaux de M. Leja,* Ann. Polon. Math. 14 (1964), pp. 131-140.

[8] M. Krzyżański, *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego,* cz. I, Warszawa 1957.

[9] F. Leja, *Sur une famille de fonctions harmoniques dans le plan, liées à une fonction donnée sur la frontière d'un domaine,* Bull. Acad. Polon. Sci. Kraków 1936, pp. 79-92.

[10] — *Une méthode élémentaire de résolution du problème de Dirichlet dans le plan,* Ann. Soc. Polon. Math. 23 (1950), pp. 230-245.

[11] F. Leja, *Généralisation de certaines fonctions d'ensemble*, Ann. Soc. Polon. Math. 16 (1937), pp. 41-52.

[12] — *Sur les suites de polynômes, les ensembles fermés et la fonction de Green*, Ann. Soc. Polon. Math. 12 (1934), pp. 57-71.

[13] — *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957.

[14] — *Propriétés des points extrémaux des ensembles plans et leur application à la représentation conforme*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), pp. 319-342.

[15] G. Pólya, G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen*, Journ. Math. 165 (1931) pp. 4-49.

[16] M. Riesz, *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels*, Acta Litterarum ac Scientiarum, Sectio Scientiarum Mathematicarum, Szeged, 9 (1938), pp. 1-42.

[17] F. Riesz, *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* II, Acta Math. 54 (1930), pp. 321-360.

[18] J. Siciak, *Some applications of the method of extreme points*, Colloq. Math. 11 (1964), sous presse.

[19] — *O równości promienia i rozwartości zbioru względem funkcji tworzącej* $|z-\zeta|/u(z)u(\zeta)$, Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego 5 (1959), pp. 35-45 (Polish, English and Russian summaries).

[20] A. Szybiak, *Some properties of plane sets with positive transfinite diameter*, Ann. Polon. Math. 3 (1956), pp. 1-28.

UNIVERSITÉ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

*Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1962*