ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LII (1990)

La multiplication d'une forme linéaire par une fraction rationnelle. Application aux formes de Laguerre–Hahn

par J. Dini et P. Maroni (Paris)

Abstract. We give a sense to the linear form $R^{-1}u$, where R is a polynomial and u is a linear form defined on the space of the polynomials; we thus generalize the works found in [1], [6], [7] on the product of a nonnegative weight by a rational fraction. We also show that if u is a Laguerre–Hahn form [4], [5], then Ru is a Laguerre–Hahn form.

Introduction. Soit u une forme linéaire de Laguerre–Hahn [3], c'est-à-dire u vérifie l'équation [5]

$$-D(Au)+(A'+C)u = Bx^{-1}(u^2)$$

où A, B, C sont des polynômes, A' désigne la dérivée de A, D est l'opérateur de dérivation, x^{-1} désigne la transposée de l'opérateur θ_0:

$$\theta_0\colon P\to P, \quad f\to\frac{f(x)-f(0)}{x}.$$

Soit R le polynôme normalisé admettant les racines complexes distinctes $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$.

On montre que la forme linéaire $u_R = Ru$ est solution d'une équation fonctionnelle semblable à la précédente, à savoir

$$-D(ARu_R)+\{(AR)'+AR'+CR-2B\sum_{i=1}^{m}\alpha_i R'(\tau_i)l_i(x)\}u_R = Bx^{-1}(u_R)^2,$$

où

$$l_i(x) = \frac{R(x)}{R'(\tau_i)(x-\tau_i)}, \quad 1\leqslant i\leqslant n,$$

et

$$\alpha_i = (l_i(x)u)_0, \qquad 1\leqslant i\leqslant n.$$

La technique utilisée est basée sur l'introduction d'un opérateur que l'on notera R^{-1} et qui revêt les deux propriétés fondamentales

$$R(R^{-1}u) = u, \qquad R^{-1}(Ru) = u - \sum_{i=1}^{n} (l_i(x)u)_0 \delta_{\tau_i},$$

où δ_{τ_i} est la mesure de Dirac au point τ_i.

Cet opérateur R^{-1} est une généralisation de l'opérateur x^{-1} introduit par Maroni [5].

D'autres propriétés algébriques de R^{-1} ont été également établies.

1. Rappels et notations. On désigne par $\boldsymbol{P}$ l'espace des polynômes muni de sa topologie de L.F., limite inductive stricte des espaces $\boldsymbol{P}_n$, où $\boldsymbol{P}_n$ est l'espace des polynômes de degré au plus n, et par $\boldsymbol{P}'$, son espace dual. $\boldsymbol{C}$ désigne l'ensemble des nombres complexes.

Soit u un élément de $\boldsymbol{P}'$; les nombres complexes u_n, $n \geqslant 0$ définis par

$$u_n = \langle u, x^n \rangle, \qquad n \geqslant 0$$

sont appelés les *moments* de la forme linéaire u par rapport à la suite $\{x^n\}_{n \geqslant 0}$.

On prendra comme base universelle de $\boldsymbol{P}'$ la suite

$$\left\{ \frac{(-1)^n}{n!} D^n \delta \right\}_{n \geqslant 0},$$

où D^n est la dérivée $n$ième de la mesure de Dirac à l'origine.

Nous allons rappeler dans ce paragraphe la définition du produit multiplicatif de deux éléments de $\boldsymbol{P}'$ introduit par Maroni dans [5], et un certain nombre de ses propriétés qui nous seront utiles par la suite.

DÉFINITION 1.1. Soit u un élément de $\boldsymbol{P}'$ Le *produit multiplicatif* de u par un polynôme f est défini par

$$uf(x) = \sum_{n=0}^{p} \Big(\sum_{m=n}^{p} a_m u_{m-n} \Big) x^n \tag{1}$$

avec

$$f(x) = \sum_{m=0}^{p} a_m x^m$$

où a_m est un nombre complexe, $m = 0, \ldots, p$. ∎

La transposée de l'application linéaire continue

$$\boldsymbol{P} \to \boldsymbol{P}, \qquad f \to uf,$$

permet de définir le produit de deux éléments de P'

DÉFINITION 1.2. Soient u et v deux éléments de $\boldsymbol{P}'$; le *produit* vu est défini par

$$\langle vu, f \rangle = \langle v, uf \rangle \tag{2}$$

pour tout f dans P. ∎

En remplaçant f par x^n, $n \geqslant 0$, dans la relation (2), on a les moments du produit vu en fonction de ceux de u et de v:

$$(vu)_n = \sum_{i+j=n} u_i v_j, \qquad n \geqslant 0.$$

PROPRIÉTÉS 1.1. Pour tous u, v dans $\boldsymbol{P}'$ et f dans $\boldsymbol{P}$, on a

(i) $\delta f = f$,
(ii) $v(uf) = (vu)f$. ∎

Par transposition, on déduit les propriétés suivantes

PROPRIÉTÉS 1.2. Pour tous u, v et w dans $\boldsymbol{P}'$, on a
(i) $\delta u = u$,
(ii) $(uv)w = u(vw)$. ∎

2. L'opérateur θ_τ. Soit τ un nombre complexe et f un polynôme quelconque; alors le polynôme g défini par

$$g(x) = f(x) - f(\tau)$$

admet τ pour racine.

Notons θ_τ l'opérateur linéaire continu suivant:

$$\theta_\tau\colon P \to P, \qquad f \to \frac{f(x)-f(\tau)}{x-\tau}. \tag{3}$$

On énonce ci-dessous deux propriétés fondamentales de l'opérateur θ_τ.

PROPOSITION 2.1. *L'opérateur linéaire θ_τ vérifie les propriétés suivantes:*
(i) *pour tout (τ, τ', f) dans $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P}$, on a $\theta_\tau(\theta_{\tau'} f) = \theta_{\tau'}(\theta_\tau f)$,*
(ii) *pour tout (τ, f, v) dans $\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{P}'$, on a $\theta_\tau(vf) = v(\theta_\tau f)$.* ∎

Démonstration. (i) Soient τ et τ' deux nombres complexes distincts. Il est facile de voir que

$$\theta_\tau(\theta_{\tau'} f)(x) = \frac{f(x) - \dfrac{x-\tau'}{\tau-\tau'} f(\tau) - \dfrac{x-\tau}{\tau'-\tau} f(\tau')}{(x-\tau)(x-\tau')},$$

d'où

$$\theta_\tau(\theta_{\tau'} f)(x) = \theta_{\tau'}(\theta_\tau f)(x).$$

(ii) Soit v un élément de $\boldsymbol{P}'$ Par linéarité, il suffit de montrer la relation (ii) pour $f = x^p$, $p \geqslant 0$. La relation est évidente pour $p = 0$. Soit p un entier supérieur ou égal à 1. De la définition du produit à droite d'une forme linéaire par un polynôme, il résulte:

$$\theta_\tau(vx^p) = \sum_{i=0}^{p-1} \Big(\sum_{n=i}^{p-1} v_{p-n-1} \tau^{n-i} \Big) x^i$$

D'autre part

$$v\theta_\tau(x^p) = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^{p-i-1} \sum_{n=0}^{i} v_{i-n} x^n = \sum_{n=0}^{p-1} \Big(\sum_{i=n}^{p-1} v_{i-n} \tau^{p-i-1} \Big) x^n,$$

d'où

$$v\theta_\tau(x^p) = \sum_{i=0}^{p-1} \Big(\sum_{n'=i}^{p-1} v_{n'-i} \tau^{p-n'-1} \Big) x^i.$$

Par un changement d'indice $n' = p+i-n-1$, on constate que

$$v(\theta_\tau x^p) = \theta_\tau(v x^p), \qquad p \geqslant 0.$$

La relation (ii) est ainsi démontrée. ∎

On va généraliser la proposition 1.1. Soit τ le n-uplet

$$\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$$

où τ_i, $i = 1, \ldots, n$ sont des nombres complexes. On va lui associer un opérateur linéaire continu de $\boldsymbol{P}$ dans $\boldsymbol{P}$ que l'on notera encore θ_τ défini par

$$\theta_\tau = \theta_{\tau_1} \circ \theta_{\tau_2} \circ \ldots \circ \theta_{\tau_n}.$$

PROPOSITION 2.2. *On a les propriétés suivantes:*
(i) *pour tout* (τ, τ') *dans* $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{C}^m$, *on a* $\theta_\tau \circ \theta_{\tau'} = \theta_{\tau'} \circ \theta_\tau$,
(ii) *pour tout* (τ, f, v) *dans* $\boldsymbol{C}^n \times \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{P}'$, *on a* $\theta_\tau(vf) = v(\theta_\tau f)$. ∎

Démonstration. (i) Evident d'après l'associativité de la composition des applications et (i) de la proposition 2.1.

(ii) Soit $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n)$ dans $\boldsymbol{C}^n$. Par définition de l'opérateur θ_τ, on a

$$\theta_\tau(vf) = \Big(\prod_{i=1}^{n} \theta_{\tau_i} \Big)(vf)$$

qui donne en utilisant la relation (i) de la proposition 2.2 et la relation (ii) de la proposition 2.1

$$\theta_\tau(vf) = \Big(\prod_{i=1}^{n-1} \theta_{\tau_i} \Big)\big(v(\theta_{\tau_n} f)\big).$$

En réitérant ce procédé à cette dernière relation, on obtient (ii). ∎

La proposition suivante donne explicitement l'expression de θ_τ dans le cas où $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ avec $\tau_i \neq \tau_j$ si $i \neq j$, $i, j = 1, \ldots, n$.

PROPOSITION 2.3. *Soit* $\{\tau_i\}_{1 \leqslant i \leqslant n}$ *un ensemble de nombres complexes distincts; alors pour tout* f *dans* $\boldsymbol{P}$, *on a*

$$(4) \qquad (\theta_\tau f)(x) = \frac{f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) l_i(x)}{R(x)},$$

où R et l_i, $i = 1, \dots, n$ sont des polynômes définis par

$$R(x) = \prod_{i=1}^{n} (x-\tau_i), \qquad l_i(x) = \frac{R(x)}{(x-\tau_i)R'(\tau_i)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n. \ \blacksquare$$

Démonstration. On va établir la formule (4) par récurrence sur l'entier naturel $n \geqslant 1$. Il est clair que la formule est valide pour $n = 1$. Supposons qu'elle le soit jusqu'à l'ordre n et établissons-la à l'ordre $n+1$.

De la propriété (i) de la proposition 2.2 et de l'hypothèse de récurrence, il résulte

$$(\theta_\tau f)(x) = \frac{\left((\theta_{\tau_{n+1}} f)(x) - \sum_{i=1}^{n} (\theta_{\tau_{n+1}} f)(\tau_i) l_i(x)\right)}{R(x)},$$

qui devient, en utilisant la définition de $\theta_{\tau_{n+1}} f$,

$$(5) \quad (\theta_\tau f)(x) = \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \frac{x-\tau_{n+1}}{\tau_i - \tau_{n+1}} l_i(x) \right.$$
$$\left. - \left((x-\tau_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i(x)}{\tau_{n+1}-\tau_i} + 1 \right) f(\tau_{n+1}) \right\} \frac{1}{(x-\tau_{n+1})R(x)}.$$

On montrera dans le lemme 2.1 que

$$(x-\tau_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i(x)}{\tau_{n+1}-\tau_i} + 1 = \frac{R(x)}{R(\tau_{n+1})}.$$

On injecte cette dernière relation dans (5), on obtient

$$(6) \quad (\theta_\tau f)(x) = \left\{ f(x) - \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i) \frac{x-\tau_{n+1}}{\tau_i - \tau_{n+1}} l_i(x) \right.$$
$$\left. - \frac{R(x)}{R(\tau_{n+1})} f(\tau_{n+1}) \right\} \frac{1}{(x-\tau_{n+1})R(x)}.$$

On note $\tilde{R}$ et $\tilde{l}_i$, $i = 1, \dots, n+1$ les polynômes suivants:

$$\tilde{R}(x) = (x-\tau_{n+1})R(x), \qquad \tilde{l}_i(x) = \frac{\tilde{R}(x)}{(x-\tau_i)\tilde{R}'(x)}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n+1.$$

Il est clair que

$$\tilde{l}_i(x) = \frac{x-\tau_{n+1}}{\tau_i - \tau_{n+1}} l_i(x), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\tilde{l}_{n+1}(x) = \frac{R(x)}{R(\tau_{n+1})}.$$

Compte tenu de ces notations, (6) s'écrit

$$(\theta_\tau f)(x) = \frac{f(x) - \sum_{i=1}^{n+1} f(\tau_i)\tilde{l}_i(x)}{\tilde{R}(x)}. \blacksquare$$

Montrons maintenant le lemme 2.1.

LEMME 2.1. *Sous les notations ci-dessus, on a*

$$(x-\tau_{n+1}) \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i(x)}{\tau_{n+1}-\tau_i} + 1 = \frac{R(x)}{R(\tau_{n+1})}. \blacksquare \tag{7}$$

Démonstration. Notons g et h les polynômes suivants

$$g(x) = \frac{R(x)-R(\tau_{n+1})}{(x-\tau_{n+1})R(\tau_{n+1})}, \quad h(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{l_i(x)}{\tau_{n+1}-\tau_i}.$$

g et h sont deux polynômes de degré $n-1$, qui coïncident en n points τ_i, $i = 1, \ldots, n$; d'où $g \equiv h$. ■

3. L'opérateur R^{-1}. Soient:

- s_i, $i = 1, \ldots, m$ des entiers naturels $\geqslant 1$,
- $n = s_1 + s_2 + \ldots + s_m$,
- $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_1, \ldots, \tau_m, \ldots, \tau_m)$ le n-uplet constitué de s_i nombres complexes τ_i, $1 \leqslant i \leqslant m$,
- R le polynôme normalisé de degré n

$$R = \prod_{i=1}^{m} (x-\tau_i)^{s_i}.$$

DÉFINITION 3.1. On désigne par R^{-1} la transposée de l'opérateur linéaire continu θ_τ. ■

R^{-1} est donc l'application de $\boldsymbol{P}'$ dans $\boldsymbol{P}'$ défini par

$$\langle R^{-1}u, f\rangle = \langle u, \theta_\tau f\rangle \quad \text{pour tout } (u, f) \text{ dans } \boldsymbol{P}' \times \boldsymbol{P}.$$

Par souci de simplification, on considérera, dans toute cette partie, le cas où $s_i = 1$, $1 \leqslant i \leqslant n$. l_i désigne le polynôme

$$l_i(x) = \frac{R(x)}{(x-\tau_i)R'(\tau_i)}. \tag{8}$$

On énonce deux propriétés fondamentales de R^{-1}, la première traduit son injectivité et la seconde combinée avec la première montre que, généralement, il n'est pas surjectif.

PROPOSITION 3.1. *Pour tout u dans $\boldsymbol{P}'$, on a*

(i) $R(R^{-1}u) = u$, *R^{-1} est donc injectif,*

(ii) $R^{-1}(Ru) = u - \sum_{i=1}^{n} (l_i(x)u)_0 \delta_{\tau_i}$. ■

Démonstration. Elle résulte de la proposition 2.3 et de la définition de R^{-1}. ∎

Les propriétés de R^{-1} sont données dans les propositions 3.2 et 3.3.

PROPOSITION 3.2.
(i) $R^{-1}(uv) = (R^{-1}u)v = u(R^{-1}v)$ *pour tout* (u, v) *dans* $\mathbf{P}' \times \mathbf{P}'$,
(ii) $R^{-1}(S^{-1}u) = (RS)^{-1}u = S^{-1}(R^{-1}u)$ *pour tout* u *dans* $\mathbf{P}'$ *et pour tous* R *et* S *tels que le produit* RS *ait des racines distinctes,*
(iii) $R^{-1}(S^{-1}u) = S^{-1}(R^{-1}u)$ *pour tous polynômes* R *et* S *admettant chacun des racines distinctes.* ∎

Démonstration. (i), (ii) et (iii) résultent des propriétés (i), (ii) de la proposition 2.2 et de la formule (4) de la proposition 2.3. ∎

COROLLAIRE 3.1. $R^{-1} = (x-\tau_1)^{-1}(x-\tau_2)^{-1} \quad (x-\tau_n)^{-1}$. ∎

La proposition suivante donne les moments de la forme linéaire $(x-t)^{-1}u$, où t est un nombre complexe.

PROPOSITION 3.3. $(x-t)^{-1}u$ *est une forme linéaire non régulière et ses moments sont*

$$((x-t)^{-1}u)_m = \begin{cases} 0 & si\ m=0, \\ \sum_{n=0}^{m-1} t^n u_{m-n-1} & si\ m \geqslant 1. \end{cases} \tag{9}$$ ∎

Démonstration. Evident. ∎

PROPOSITION 3.4. *Quels que soient* t, t' *dans* $\mathbf{C}$, f *dans* $\mathbf{P}$ *et* u *dans* $\mathbf{P}'$, *on a*

$$\langle \delta_t \delta_{t'}, f \rangle = \theta_t(xf)(t'), \tag{10}$$

$$\delta_t f = \theta_t(xf), \tag{11}$$

$$\delta_t((x-t)f) = xf. \tag{12}$$ ∎

Démonstration. Elle résulte directement des définitions. ∎

On va maintenant donner explicitement l'expression de $R^{-m}u$, $m \geqslant 1$, où l'on pose par convention

$$R^{-(m+1)} = R^{-1}(R^{-m}).$$

PROPOSITION 3.5. *Soit* u *un élément de* $\mathbf{P}'$ *Pour tout entier positif* m *et tout nombre complexe* t, *on a*

$$(x-t)^{-m}u = x^{-m}(u\delta_t^m), \tag{13}$$

$$((x-t)^{-1}u)^m = (x-t)^{-m}u^m, \tag{14}$$

et plus généralement

$$R^{-1}u=(x^{-n}u)\prod_{i=1}^{n}\delta_{\tau_i}, \tag{15}$$

$$(R^{-1}u)^m=R^{-m}u^m. \ \blacksquare \tag{16}$$

Démonstration. Preuve de (13). On va montrer (13) pour $m=1$, le cas m quelconque se déduit facilement par récurrence.

Soit f un polynôme quelconque; on a

$$\langle x((x-t)^{-1}u), f\rangle=\langle u, \theta_t(xf)\rangle,$$

où encore d'après (11)

$$\langle x((x-t)^{-1}u),\ f\rangle=\langle u, \delta_t f\rangle,$$

d'où

$$x((x-t)^{-1}u)=u\delta_t,$$

et puisque le moment d'ordre 0 de $(x-t)^{-1}u$ est nul, on en déduit d'après (ii) de la proposition 3.1

$$(x-t)^{-1}u=x^{-1}(u\delta_t).$$

La preuve de (14), (15) et (16) se fait aisément par récurrence. ■

On va finir ce paragraphe par un résultat portant sur la dérivée de la forme linéaire $R^{-1}u$. On établira tout d'abord le lemme suivant.

LEMME 3.1. *Soit f un élément de $\mathbf{P}$; on a*

$$\theta_\tau(f')(x)=(\theta_\tau(f))'(x)+(\theta_\tau)^2(R'f)(x). \ \blacksquare$$

Démonstration. On a

$$\theta_\tau(f')(x)=(\theta_\tau(f))'(x)+(\theta_\tau)^2(R'f)(x)+E(x)$$

où

$$E(x)=\frac{1}{R(x)}\sum_{j=1}^{n}\frac{L_j(x)}{(x-\tau_j)},$$

avec

$$L_j(x)=aR(x)-b\prod_{\substack{l=1\\ l\neq j}}^{n}(x-\tau_l)-(x-\tau_j)^2\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}c_i\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i\\ l\neq j}}^{n}(x-\tau_l)+1,$$

où

$$a=\frac{R''(\tau_j)}{2R(\tau_j)},\quad b=\frac{1}{R'(\tau_j)},\quad c_i=\frac{1}{R'(\tau_i)(\tau_i-\tau_j)},\quad i\geqslant 1,\ i\neq j.$$

On constate que L_j est un polynôme de degré au plus n, qui admet $n+1$ racines. Plus précisément

$$L_j(\tau_k) = 0, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \quad L_{j'}(\tau_j) = 0.$$

On en déduit que

$$E(x) = 0.$$

D'où le lemme. ∎

PROPOSITION 3.6. *Soit u une forme linéaire définie sur $\mathbf{P}$, alors*

$$D(R^{-1}u) = R^{-1}Du - R'(R^{-2}u). \ ∎$$

Démonstration. Soit f un élément de $\mathbf{P}$. De la définition des opérateurs D et R^{-1} et du lemme 3.1, résulte

$$\langle D(R^{-1}u), f\rangle = -\langle u, (\theta_\tau f)'\rangle - \langle u, (\theta_\tau)^2(R'f)\rangle$$

ou encore

$$\langle D(R^{-1}u), f\rangle = \langle R^{-1}Du, f\rangle - \langle R'(R^{-2}u), f\rangle.$$

D'où la proposition. ∎

4. Application aux polynômes de Laguerre–Hahn. On considère une suite de polynômes orthogonale de Laguerre–Hahn, c'est-à-dire une suite pour laquelle une forme linéaire verifie l'équation

$$-D(Au) + (A' + C)u = B(x^{-1}u^2) \tag{17}$$

où A, B et C sont des polynômes quelconques.

On va établir le résultat suivant.

THÉORÈME 4.1. *Soit $\{P_n\}_{n\geqslant 0}$ une suite de polynômes de Laguerre–Hahn relativement à une forme linéaire u et soit R un polynôme admettant des racines distinctes τ_i, $i = 1, \ldots, n$.*

On suppose que la forme linéaire $u_R = Ru$ est régulière [2] *et on désigne par $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ sa suite orthogonale.*

Alors la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geqslant 0}$ est de Laguerre–Hahn. ∎

Démonstration. On va établir que la forme linéaire u_R vérifie une équation du même type que (17). On dérive ARu_R et on utilise (17); on obtient

$$-D(ARu_R) + \{(AR)' + AR' + CR\}u_R = R^2B(x^{-1}u^2). \tag{18}$$

Le second membre de cette dernière égalité s'écrit

$$R^2B(x^{-1}u^2) = J_1 + J_2 + J_3,$$

où

$$J_1 = R^2B\big(x^{-1}(R^{-1}u_R)^2\big), \quad J_2 = R^2B\big(x^{-1}\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{\tau_i}\big)^2\big),$$

$$J_3 = 2R^2B\big(x^{-1}\big(\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{\tau_i}\big)R^{-1}u_R\big)\big)$$

avec $\alpha_i = \big(l_i(x)\big)_0$.

En utilisant (16) et la propriété (iii) de la proposition 3.2, on a

$$J_1 = Bx^{-1}(u_R)^2.$$

Et grâce à la relation (10), on a

$$J_2 = 0.$$

Il nous reste à étudier J_3.

D'après la propriété (i) de la proposition 3.2 et la propriété (i) de la proposition 3.1, J_3 s'écrit

$$J_3 = RB\big(x^{-1}\big(\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\delta_{\tau_i}\big)u_R\big)\big).$$

Soit f un élément de $\boldsymbol{P}$. En vertu de la formule (11), on a

$$\langle J_3, f\rangle = 2\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle u_R,\, \theta_\tau\big(x\theta_0(RBf)\big)\rangle.$$

De cette dernière relation découle

$$J_3 = 2B\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i R'(\tau_i)l_i(x)\big)u_R.$$

En injectant les expressions trouvées pour J_i, $i = 1, 2, 3$ dans l'équation (18), on obtient

$$-D(ARu_R) + \big\{(AR)' + AR' + CR - 2B\big(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i R'(\tau_i)l_i(x)\big)\big\}u_R = Bx^{-1}(u_R)^2. \quad \blacksquare$$

Références

[1] E. B. Christoffel, *Über die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben*, J. Reine Angew. Math. 55 (1858), 61–82.

[2] J. Dini et P. Maroni, *Sur la multiplication d'une forme semi-classique par un polynôme*, à paraître.

[3] J. Dzoumba, Thèse de 3ème cycle, Université Pierre et Marie Curie, Laboratoire d'Analyse Numérique, 1985.

[4] A. Magnus, *Riccati-acceleration of Jacobi continued fractions and Laguerre–Hahn orthogonal polynomials*, Rapports No. 26, Mai 1983, Séminaire de Mathématiques (nouvelle série).

[5] P. Maroni, *Le calcul des formes linéaires et les polynômes orthogonaux semi-classiques*, Publ. du Labor. Analyse Numérique CNRS 86023 (1986), Paris VI, Segovia 1986, Lecture Notes 1329, 279–290.
[6] A. Nikiforov et V. Ouvarov, *Eléments de la théorie des fonctions spéciales*, Mir, Moscou 1983.
[7] V. B. Uvarov, *The connection between systems of polynomials that are orthogonal with respect to different distribution functions*, USSR Computational Math. and Phys. 9.6 (1969), 25–36.

UNIVERSITÉ PIERRE ET MARIE CURIE
CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
LABORATOIRE D'ANALYSE NUMÉRIQUE
PARIS, FRANCE

Reçu par la Rédaction le 25.07.1988