ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIII (1963)

Certaines évaluations des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation du type parabolique

par I. Łojczyk-Królikiewicz * (Kraków)

Dans ce travail nous allons établir certaines évaluations des solutions des problèmes de Fourier sous l'hypothèse que ces solutions appartiennent à la classe E_2 (¹) et sont régulières (²) dans le domaine de leur existence (³).

1. Nous nous occuperons d'abord du troisième problème de Fourier relatif à l'équation

$$(1)\qquad F[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k(X,t)u'_{x_k} + c(X,t)u - u'_t = f(X,t)\,.$$

Soit $X(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ un point variable de l'espace euclidien à m dimensions $\mathcal{E}^m$ et (X,t) un point variable de l'espace-temps à m-1 dimensions. Nous considérons le domaine D de cet espace, constituant l'extérieur d'un cylindre à $m+1$ dimensions, dont la frontière se compose des domaines non bornés S_0 contenue dans le plan $t=0$ et S_T contenue dans le plan $t=T$ $(T>0)$, et de la surface latérale σ dont l'équation s'écrit sous la forme:

$$(2)\qquad G(X) = 0\,.$$

Nous supposons que la fonction $G(X)$ est de classe C^2 dans une sphère L: $\sum_{i=1}^{m} x_i^2 = R^2$, telle que la frontière FS_0 appartienne à l'intérieur de la

* Je tiens à exprimer ma gratidude à M. J. Szarski pour ses précieuses remarques.

(¹) Nous appelons E_a $(a>0)$ une classe de fonctions $f(X)$ ayant la propriété suivante: il existe deux nombres constants positifs M et K tels que $|f(X)| < M\exp K|X|^a$ dans un domaine D (v. le travail [2]).

(²) C'est-à-dire admettent des dérivées du premier et du second ordre par rapport aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et du premier ordre par rapport à t continues aux points intérieurs de D, sont continue dans la fermeture $\overline{D}$ du domaine D, et sur la surface latérale de D admettent une derivée du/dl, où l est une demi-droite orthogonale à l'axe t, pénétrant dans $\overline{D}$.

(³) Ce problème a été posé par M. Krzyżański.

sphère L. Dans cette hypothèse, en vertu du théorème 1 du travail [1] (p. 682), on peut prolonger la fonction $G(X)$ sur tout l'espace $\mathcal{E}^m$ de manière qu'elle soit bornée et de classe C^2 dans $\mathcal{E}^m$ et aussi que l'on ait des inégalités:

$$(3) \qquad |G''_{x_i}(X)| \leqslant G_1 \quad \text{et} \quad |G''_{x_i x_j}(X)| \leqslant G_2 \quad \text{dans} \quad \bar{S}_0\,,$$

où G_1, G_2 sont des nombres constants non négatifs.

Nous supposons encore que l'on a

$$(4) \qquad \operatorname{grad}^2 G(X) \geqslant \Gamma^2 > 0\,, \quad \text{où} \quad \Gamma = \text{const} \quad \text{et} \quad X \in FS_0\,.$$

A tout point de σ nous faisons correspondre une demi-droite orthogonale à l'axe t, pénétrant dans $\bar{D}$, de sorte qu'il existe une constante $\gamma_0 > 0$ telle que l'on ait

$$(5) \qquad \cos(l, n) \geqslant \gamma_0 > 0\,.$$

Nous choisissons le signe de la fonction $G(X)$ dans (2) de manière que l'on ait

$$(6) \qquad G'_{x_i} = \cos(n, x_i)\,|\overline{\operatorname{grad}} G|$$

n étant le vecteur normal à σ intérieur par rapport au domaine D. Nous désignons par Σ la somme $S_0 + \sigma$ [4]. Nous supposons que les coefficients $a_{ij}(X, t)$, $b_k(X, t)$ de l'équation (1) sont continus et bornés dans D:

$$(7) \qquad |a_{ij}(X, t)| \leqslant A\,, \quad |b_k(X, t)| \leqslant B \quad \text{pour} \quad (X, t) \in D\,, \quad i, j, k = 1, \ldots, m\,,$$

où A et B sont des nombres non négatifs. Le coefficient $c(X, t)$ est supposé borné supérieurement dans D, c'est-à-dire

$$(8) \qquad c(X, t) \leqslant c_0 \quad \text{dans} \quad D\,,$$

c_0 étant une constante. Nous supposons aussi que dans le domaine D entier la forme $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ est définie positive et nous désignons par $\mathcal{A}$ le plus petit nombre positif tel que l'on a

$$(9) \qquad \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X, t)\lambda_i\lambda_j \leqslant \mathcal{A} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2 \quad \text{pour} \quad (X, t) \in D\,.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit $u(X, t)$ une solution de l'équation (1) régulière et de classe E_2, admettant une dérivée du/dl en tout point de σ. Supposons que l'on ait*

$$(10) \qquad |u(X, 0)| \leqslant M \quad \textit{pour} \quad (X) \in \bar{S}_0$$

---

[4] Ces hypothèses sont les mêmes que celles du travail [4].

et

(11) $$L[u] = du/dl + h(X, t)u = g(X, t) \quad \textit{pour} \quad (X, t) \in \sigma,$$

où les fonctions $h(X, t)$ *et* $g(X, t)$ *satisfont aux inégalités*

(12) $$h(X, t) \leqslant -h_0 < 0,$$

(13) $$|g(X, t)| \leqslant g_0 \exp(b_0 t), \quad \textit{où} \quad b_0 \leqslant c_0 \quad \textit{et} \quad (X, t) \in \sigma,$$

g_0 *et* h_0 *étant des nombres positifs. Si la fonction* $f(X, t)$ *satisfait à l'inégalité* $|f(X, t)| \leqslant M_0 \exp(d_0 t)$ *dans* D, *où* $d_0 \leqslant c_0$, *alors on a dans le domaine* $\bar{D}$ *l'inégalité*

$$|u(X, t)| \leqslant (M + g_0/h_0 + M_0 t)\exp(c_0 t).$$

La méthode de la démonstration de ce théorème est pareille à celle que M. Krzyżański a appliquée pour démontrer un théorème analogue dans le travail [3] relatif au premier problème de Fourier (5).

Nous introduisons la nouvelle fonction inconnue:

$$\bar{v}(X, t) = u(X, t)\exp(-c_0 t) - M_0 t - g_0/h_0.$$

En vertu de l'inégalité (10) on a $\bar{v}(X, 0) \leqslant M$ pour $X \in S_0$. La fonction $\bar{v}(X, t)$ est une solution de l'équation de la forme

(14) $$\bar{F}[v] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X, t)v''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} \bar{b}_k(X, t)v'_{x_k} + \bar{c}(X, t)v - v'_t = \bar{f}(X, t),$$

où $\bar{b}_k(X, t) = b_k(X, t)$ et dans laquelle le coefficient de la fonction inconnue et le second membre de cette équation s'expriment par les formules:

$$\bar{c}(X, t) = c(X, t) - c_0 \leqslant 0$$

et

$$\bar{f}(X, t) = f\exp(-c_0 t) + M_0 - cM_0 t + c_0 M_0 t - c\frac{g_0}{h_0} + c_0\frac{g_0}{h_0} \geqslant 0$$

pour $(X, t) \in D$. Nous avons en outre

$$L[\bar{v}] = \frac{d\bar{v}}{dl} + h\bar{v} = g\exp(-c_0 t) - hM_0 t - hg_0/h_0 \geqslant 0$$

pour $(X, t) \in \sigma$, où l'on a par hypothèse $h(X, t) \leqslant -h_0 < 0$. Or en appliquant à la fonction $\bar{v}$ le théorème 1, n° 6 du travail [4], nous obtenons $\bar{v}(X, t) \leqslant M$ pour $(X, t) \in \bar{D}$, d'où résulte l'inégalité

(15) $$u(X, t) \leqslant \exp(c_0 t)(M + g_0/h_0 + M_0 t) \quad \text{dans} \quad \bar{D}.$$

---

(5) Cette méthode a été appliquée dans les travaux de M. Picone, voir p. ex. [5].

D'une manière analogue, en introduisant la fonction auxiliaire $\bar{\bar{v}}(X,t) = u(X,t)\exp(-c_0t)+M_0t+g_0/h_0$ et appliquant le même raisonnement, nous obtenons l'inégalité

$$(16)\qquad u(X,t) \geqslant -\exp(c_0t)(M+g_0/h_0+M_0t) \quad \text{dans} \quad \bar{D}\,.$$

On déduit aussitôt des inégalités (15) et (16) la conclusion de notre théorème.

Remarque. Il est évident que le théorème énoncé ci-dessus est valable dans l'intérieur du cylindre, l'hypothèse que $u(X,t)$ est de classe E_2 étant superflue.

2. Nous allons trouver une évaluation pareille dans le cas, où $h(X,t)\leqslant H$ pour H arbitraire. Nous poserons $h_0 = \max(0,H)$.

THÉORÈME 2. *Si, dans les hypothèses du théorème* 1, *on a aussi* $h(X,t)\leqslant h_0$, *alors les constantes* N_1, h_1, c_1 *étant définies par les formules*:

$$c_1 = am(amAG_1^2+mAG_2+BG_1)+c_0 \quad \textit{où} \quad a > h_0/\Gamma\gamma_0,$$
$$h_1 = a\Gamma\gamma_0-h_0 \quad \textit{et} \quad N_1 = \sup_{X\epsilon\bar{S}} \exp\big(aG(X)\big)\,,$$

on a

$$(17)\qquad |u(X,t)| \leqslant N_1(M+g_0/h_1+M_0t)\exp(c_1t) \quad \textit{dans} \quad \bar{D}.$$

Démonstration. Introduisons une fonction auxiliaire, donnée par la formule

$$v(X,t) = u(X,t)\exp\big(aG(X)\big)\,,$$

où $a>0$ sera déterminé plus loin. La nouvelle fonction satisfait à l'équation (14) dans laquelle $\bar{b}_k(X,t)$ sont bornées et $\bar{c}(X,t)\leqslant am(amAG_1^2+ +mAG_2+BG_1)+c_0$ dans $\bar{D}$ pour $a>0$ arbitraire. Cette fonction $v(X,t)$ remplit aussi la condition aux limites

$$\frac{dv}{dl}+\bar{h}(X,t)v = \bar{g}(X,t) \quad \text{sur} \quad \sigma\,,$$

où

$$\bar{h}(X,t) = -a\sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}\cos(l,x_i)+h(X,t) \leqslant -a\Gamma\gamma_0+h_0\,;$$

choisissant donc en $a > h_0/\Gamma\gamma_0$ on a

$$\bar{h}(X,t) \leqslant -a\Gamma\gamma_0+h_0 = -\bar{h}_1 < 0 \quad \text{sur} \quad \sigma\,.$$

On déduit, de la définition de c_1 et N_1 les inégalités:

$$|\bar{f}(X,t)| \leqslant N_1M_0\exp(c_1t) \quad \text{dans} \quad D\,,$$
$$|\bar{g}(X,t)| \leqslant N_1g_0\exp(c_1t) \quad \text{sur} \quad \sigma\,,$$

et

$$|v(X, 0)| \leqslant N_1 M \quad \text{dans} \quad \bar{S}_0 .$$

Nous pouvons appliquer le théorème 1 à la fonction $v(X, t)$ et nous obtenons l'inégalité (17).

3. Les théorèmes 1 et 2 concernent de cas où les fonctions $f(X, t)$ et $g(X, t)$ sont bornées lorsque $X \to \infty$. Admettons maintenant que ces fonctions soient non bornées. Nous allons d'abord trouver une évaluation dans le cas général.

THÉORÈME 3. *Supposons vérifiées les hypothèses* (2)-(9). *Désignons par $w(X)$ une fonction satisfaisant aux conditions suivantes*:

1° *$w(X)$ est de classe C^2 et $w(X) > 0$ dans $\bar{S}_0$*,

2° *il existe un nombre $P > 0$ tel que $F[w] \leqslant P \cdot w$ dans S_0*,

3° *il existe un nombre $w_0 = \max_i \sup_{X \in \bar{S}_0} |w'_{x_i}/w|$.*

Soit $|f(X, t)| \leqslant M_0 w(X) \exp(Pt)$ dans $\bar{D}$ et $|g(X, t)| \leqslant g_0 w(X) \exp(Pt)$, $h(X, t) \leqslant h_0$ sur σ.

Si $u(X, t)$ est une solution de (1) *régulière et de classe E_2 dans D, satisfaisant à la condition aux limites* (11) *et telle que $|u(X, 0)| \leqslant M \cdot w(X)$ dans $\bar{S}_0$, alors il existe des nombres h_2, c_2 tels que l'on a l'inégalité*

$$|u(X, t)| \leqslant N_1 (M + g_0/h_2 + M_0 t) w(X) \exp(c_2 t) \quad \textit{dans} \quad \bar{D},$$

où N_1 a été défini dans le théorème 2.

D é m o n s t r a t i o n. Prenons la fonction auxiliaire

$$v(X, t) = u(X, t)/w(X) .$$

On vérifie qu'elle satisfait à l'équation (14) avec $|b_k(X, t)| \leqslant \bar{B} = B + 2w_0 mA$ pour $k = 1, 2, \ldots, m$ et $\bar{c}(X, t) = F[w]/w \leqslant P$ dans D et aussi $|\bar{f}(X, t)| \leqslant M_0 \exp(Pt)$ dans D. Elle satisfait en outre à l'inégalité $|v(X, 0)| \leqslant M$ dans $\bar{S}_0$ et à la condition aux limites

$$\frac{dv}{dl} + \bar{h}v = \bar{g}(X, t) \quad \text{sur} \quad \sigma ,$$

où

$$\bar{h} = \sum_{i=1}^{m} w'_{x_i}/w \cos(l, x_i) + h(X, t) .$$

Désignons $w_1 = \max_i \sup_{X \in FS_0} |w'_{x_i}/w|$, donc $\bar{h} \leqslant w_1 m + h_0 = \bar{h}_0$ sur σ et aussi $|\bar{g}(X, t)| \leqslant g_0 \exp(Pt)$ sur σ.

En appliquant à la fonction $v(X, t)$ le théorème 2 nous avons

$$|v(X, t)| \leqslant N_1 (M + g_0/h_2 + M_0 t) \exp(c_2 t)$$

où $c_2 = a_0 m (a_0 m A G_1^2 + m A G_2 + \bar{B} G_1) + P$ avec $a_0 > \bar{h}_0/\Gamma\gamma_0$, et $h_2 = a_0 \Gamma \gamma_0 - \bar{h}_0$; ceci démontre notre théorème.

4. En profitant du théorème 3, nous pouvons donner une évaluation de la solution de (1) dans deux cas particuliers.

THÉORÈME 4. *Conservons les hypothèses* (2)-(9). *Soit* $u(X,t)$ *une solution de* (1) *régulière et de classe* E_2 *dans* D, *satisfaisant à la condition aux limites* (11). *Si l'on a*

1° $|f(X,t)| \leqslant M_0 \exp(kr+Pt)$ *dans* D, *où* $P = c_0 + k^2\mathscr{A} + km(A+B)$,

2° $|g(X,t)| \leqslant g_0 \exp(kr+Pt)$ *sur* σ,

3° $|u(X,0)| \leqslant M \exp(kr)$ *dans* $\bar{S}_0$,

où $r = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$, *alors la fonction* $u(X,t)$ *satisfait dans le domaine* $\bar{D}$ *entier à l'inégalité*:

$$|u(X,t)| \leqslant N_1(M+g_0/h_2+M_0t)\exp(c_0t+kr)\,.$$

Démonstration. Il est facile de voir que la fonction $w(X) = \exp(kr)$ satisfait aux hypothèses du théorème 3, car

$$\frac{F[\exp(kr)]}{\exp(kr)} \leqslant c_0 + k^2\mathscr{A} + km(A+B) = P$$

et aussi $|w'_{x_i}/w| = |kx_i/r| \leqslant k$, ce qui démontre le théorème.

Remarque. Dans le cas où $h_0 < -km$, on a simplement

$$|u(X,t)| \leqslant (M+g_0/h_0+M_0t)\exp(kr+Pt) \qquad \text{dans } \bar{D}\,,$$

en vertu du théorème 1 appliqué directement à la fonction $v(X,t) = u(X,t)\exp(kr)$.

THÉORÈME 5. *Soit*

1° $|f(X,t)| \leqslant M_0 \varrho^n \exp(Pt)$ *dans* D *où* $P = n(n-1)\mathscr{A} + mn(A+B) + c_0$

2° $|g(X,t)| \leqslant g_0 \varrho^n \exp(Pt)$ *et* $h(X,t) \leqslant h_0$ *sur* σ,

où $\varrho = \left(1+\sum_{i=1}^{m} x_i^2\right)^{1/2}$, *les autres hypothèses étant identiques à celles du théorème* 4. *Si* $u(X,t)$ *est une solution régulière, de classe* E_2 *dans* D *et telle que* $|u(X,0)| \leqslant M\varrho^n$ *dans* $\bar{S}_0$, *alors*

$$|u(X,t)| \leqslant N_1(M+g_0/h_2+M_0t)\,\varrho^n\exp(c_2t) \qquad \textit{dans} \quad \bar{D}\,,$$

où les constantes sont définies comme dans le théorème 4

Démonstration. Ce théorème est aussi un corollaire du théorème 3, car

$$\frac{F[\varrho^n]}{\varrho^n} \leqslant [n(n-1)\mathscr{A}\varrho^{n-2} + mn(A+B)\varrho^{n-1} + c_0\varrho^n]\varrho^{-n} \leqslant P$$

dans D et aussi $|w'_{x_i}/w|| \leqslant n$.

Travaux cités

[1] Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления*, т. I, Москва-Ленинград 1951.

[2] M. Krzyżański, *Sur les solutions des équations du type parabolique déterminées dans une région illimitée*, Bull. Amer. Math. Soc., V. 47, N. 12, p. 911-915.

[3] — *Évaluations des solutions de l'équation aux derivées partielles du type parabolique déterminées dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 93-97.

[4]— *Sur l'unicité des solutions du second et troisième problème de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), p. 201-208.

[5] M. Picone, *Sul problema della propagazione del calore in ul mezzo privo di frontiera*, Mathematische Annalen 101 (1929), p. 701-714.

Reçu par la Rédaction le 16. 11. 1959