ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Verallgemeinerte harmonische Analysis

von S. Hartman (Wrocław)

1. Seit Bohr ist der Begriff der harmonischen Analysis viel ausgedehnter als die klassische Fourierreihenlehre. Vom heutigen Standpunkt aus ist die letztere nur ein Sonderfall einer Theorie, die sich nach ihrem Inhalt und ihren Methoden auf Funktionenräume auf Gruppen bezieht.

In naheliegender Weise darf ein Element τ der abelschen Gruppe G eine Periode der auf G erklärten Funktion f heißen, wenn $f(t+\tau) = f(t)$ für jedes $t \in G$ gilt. Alle Perioden bilden offenbar eine Gruppe H, und f kann als eine Funktion auf G/H aufgefaßt werden. Die Periodizität, d.h. das Vorhandensein von Perioden, die vom neutralen Element verschieden sind, ist für Funktionen auf Gruppen im allgemeinen kein aufschlußreicher Umstand, wohl aber nimmt sie an Bedeutung zu, falls die Gruppe G/H einfacher als G ist und im Falle von topologischen Gruppen ganz besonders dann, wenn G/H kompakt ist, weil die kompakten Gruppen dank dem in ihnen vorhandenen invarianten Maße und dem Peter-Weylschen Satze das dankbarste Anwendungsgebiet der harmonischen Analyse, selbst im nicht-abelschen Fall, bilden. Am besten bewährt sie sich aber bei der Untersuchung von abelschen kompakten Gruppen, weil ja die irreduziblen unitären Darstellungen derselben lauter eindimensional sind.

In der klassischen Theorie der Fourierreihen, wo man mit Funktionen von der Periode 2π zu tun hat, ist G durch die reelle Achse R zu ersetzen; die Gruppe H besteht in diesem Fall aus allen Vielfachen von 2π, und G/H ist die Kreisdrehungsgruppe T. Es ist vorteilhaft Funktionen auf T statt periodischer Funktionen auf R zu betrachten. Wir wollten eben an diesem einfachsten Beispiel die Methode klarmachen, die darin besteht, daß man die zu untersuchenden Funktionen auf ein Kompaktum überträgt. Eine solche Übertragung ist nicht immer leicht oder überhaupt möglich, sie scheint aber jedenfalls erstrebenswert. Zum Beispiel, die Bohrschen fastperiodischen (fp.) Funktionen lassen sich nicht so einfach wie die periodischen auf einer kompakten Gruppe interpretieren. Was dank dem Vorhandensein von (reinen) Perioden gelingt, war von den „ε-Fastperioden" oder „Verschiebungszahlen" nicht zu erwarten. Dennoch was sich durch Faktorgruppenbildung nicht mehr erzielen ließ, konnte durch Einbettung in eine größere Gruppe erreicht werden: die sog. Bohrsche Kompaktifizierung der reellen Achse oder m.a.W. das Bohrsche Kompaktum K ist eine Gruppe, welche ein stetig isomorphes Bild $\varphi(R)$ von R als eine dichte Untergruppe enthält, und zwar so, daß genau die fp. Funktionen auf R die gleichmäßig stetigen Funktionen auf $\varphi(R)$ ergeben, welche also zu stetigen Funktionen auf ganz K erweitert werden können. Daß diese stetigen Funktionen dabei auch periodisch sind, ist nebensächlich.

Die harmonische Analyse hat durch die Entdeckung der fp. Funktionen von der Kreisdrehungsgruppe aus auf andere abelsche Gruppen übergegriffen. Nunmehr waren das schließlich ebenfalls kompakte Gruppen, weil man die Bohrschen Funktionen auf R einfach als stetige Funktionen auf K auffassen kann, und weil für andere lokal kompakte abelsche Gruppen eine analoge Konstruktion möglich ist. Die Bennennung „fastperiodisch" hat sich mehr aus Traditionsgründen als wegen tatsächlicher Anknüpfung an die Periodizität erhalten. Auch die Besicovitchschen B^p fp. Funktionen lassen sich auf K übertragen, insofern sie als Elemente von $\mathfrak{L}^p(K)$ gedeutet werden können. Wir sehen noch später, wie man die guten Eingeschaften der kompakten Gruppen auch in anderen Fällen zur Untersuchung von Funktionen auf R mit Erfolg benutzen kann, selbst wenn es nicht ohne geeignete Kunstgriffe gelingt.

Man wäre geneigt zu glauben, daß man mit fastperiodischen Funktionen im Sinne von Bohr, Stepanoff, Weyl, Besicovitch usf. noch nicht bis an die Grenzen des Anwendungsbereiches der harmonischen Analyse vorgedrungen ist. Diese Grenzen scheinen dort zu liegen, wo die geeignet definierten Fourierkoeffizienten noch existieren, also z.B. im Falle der reellen Variablen $t \geqslant 0$ bei Funktionen, für welche

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

für jedes oder fast jedes λ existiert.

Welches sind solche Funktionen? Das Literaturnachschlagen und Herumfragen brachte den Verfasser zu der Anschauung, daß in dieser Hinsicht nicht viel bekannt war. Das würde sich schon in das allgemeine Bild fügen, dem man begegnet, wenn man von dem gut erforschten Gebiet der im Intervall oder auf dem Kreise definierten Funktionen zu den auf der ganzen Achse erklärten übergeht. Schon die Gruppenalgebra der reellen Achse ist ja viel komplizierter und weniger erforscht als diejenige der Kreisgruppe (hier wirkt sich das Fehlen der Kompaktheit ungünstig aus!).

Verschiedene Probleme, die sich in diesem Zusammenhang aufdrängten, wurden kurz danach in einigen interessanten Arbeiten gelöst, deren Inhalt zusammen mit den früher bekannten Ergebnissen auf eine nahezu abgeschlossene Theorie Anspruch erheben kann, welche in Polen als verallgemeinerte harmonische Analyse bezeichnet wurde. Einer Übersicht dieser, allerdings nicht sehr umfangreichen, Theorie ist der vorliegende Aufsatz gewidmet, wenn auch ohne die Vollständigkeit der bibliographischen Angaben, besonders der früheren, zu beanspruchen. Vom Verfasser wurden bei dieser Gelegenheit gewisse zusätzliche Resultate oder Bemerkungen mit dargelegt.

2. Wir beginnen mit einem Ergebnis von Eggleston [4], der in Beantwortung einer Frage von Herz [6] folgendes bewiesen hat:

ist $f(t)$ beschränkt und gleichmäßig stetig in $-\infty < t < \infty$, so ist

$$a_f(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\lambda t} dt = 0 \tag{1}$$

für jedes λ mit Ausnahme einer Menge Z vom Lebesgueschen Maße Null

Überdies gilt nach Eggleston $\nu(Z) = 0$ für eine Maßfunktion ν von Carathéodory genau dann, wenn ν folgende Eigenschaft aufweist: ist $\{n_k\}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $0 < n_{k+1} - n_k < C$, so ist für jedes t außerhalb einer ν-Nullmenge die Folge $\{n_k t\}$ mod 1 gleichverteilt. Daß das Maß von Lebesgue dieser Bedingung genügt, und auch ohne $n_{k+1} - n_k < C$ zu verlangen, folgt aus einem bekannten Satze von Weyl. Gelegentlich sei bemerkt, daß selbst für $n_{k+1} - n_k < C$ unabzählbar viele Zahlen t existieren können, für welche $\{n_k t\}$ nicht mod 1 gleichverteilt ist (vgl. dazu [5]). Eggleston zeigt an einem Beispiel, daß die Ausnahmemenge für (1) auch unabzählbar sein kann. Ehe wir diese Frage näher betrachten, wollen wir bemerken, daß Z sowohl aus den Zahlen λ besteht, für welche $a_f(\lambda)$ unbestimmt ist, wie auch aus denjenigen, für welche es zwar existiert, aber von 0 verschieden ist. Dementsprechend zerlegen wir Z in zwei Teile

$$Z = Z_1 \cup Z_2 .$$

Können *beide* Teile unabzählbar sein? Die verneinende Antwort ist in einem Ergebnis von Urbanik [11] enthalten, das aber noch viel mehr umfaßt, mehr sogar als der folgende

Satz 1. *Hat man*

$$\|f\|_p = \left\{\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t)|^p dt\right\}^{1/p} < \infty \tag{2}$$

und $p > 1$, so gibt es eine Besicovitchsche B^p-fp. Funktion f^* mit $a_{f^*}(\lambda) = a_f(\lambda)$, sooft $a_f(\lambda)$ wohlbestimmt ist.

Da $a_f(\lambda)$ bekanntlich für jedes λ bestimmt und nur für abzählbar viele λ von 0 verschieden ist, so kann Z_2 nicht unabzählbar sein, selbst wenn man (2) mit $p > 1$ anstatt der Beschränktheit und der gleichmäßigen Stetigkeit von f verlangt. Das Egglestonsche Ergebnis ist aber dadurch nicht im vollen Maße überholt, weil es für beschränkte und gleichmäßig stetige Funktionen ja mehr aussagt und sogar an Hand eines Satzes aus [5] die Folgerung gestattet, daß Z nicht nur eine Nullmenge nach Lebesgue ist, sondern auch das Maß 0 im Sinne der durch $\left(\log\frac{1}{t}\right)^{-1-\varepsilon}$ $(\varepsilon > 0)$ definierten Hausdorffschen Dimension hat.

Nun schreiten wir zur Erörterung der Resultate von Urbanik in ihrem vollen Umfang vor. Alle komplexwertigen lokal integrierbaren Funktionen, für welche die Ungleichung in (2) mit einem $p \geqslant 1$ gilt, bilden einen linearen Raum M^p. Marcinkiewicz hat gezeigt [9], daß der Quotientraum $\mathcal{M}^p = M^p/Q^p$, wo Q^p die Klasse aller $f \in M^p$ mit $\|f\|_p = 0$ bedeutet, in bezug auf die Norm $\|\cdot\|_p$ vollständig und somit ein Banachraum ist. Die B^p-Funktionen (d.h. die Besicovitchschen fp. Funktionen mit dem Exponenten p) sind diejenigen Elemente von $\mathcal{M}^p$, die zur Abschließung $\mathcal{B}^p$ der Menge aller trigonometrischen Polynome $\sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_k t}$ (a_k komplex, λ reell) gehören. Bezeichnen wir noch mit $\widetilde{\mathcal{M}}^p$ die Menge der Funktionen aus $\mathcal{M}^p$, für welche der Mittelwert

$$m(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\,dt$$

existiert, so ist $\widetilde{\mathcal{M}}^p$ ein (abgeschlossener) Teilraum von $\mathcal{M}^p$ und man hat

$$\mathcal{B}^p \subset \widetilde{\mathcal{M}}^p \subset \mathcal{M}^p .$$

Nun ist m ein lineares Funktional auf $\widetilde{\mathcal{M}}^1$ und es kann demnach zu einem linearen Funktional $\mathfrak{M}$ auf ganz $\mathcal{M}^1$ ohne Normerhöhung erweitert werden, d.h. so daß

$$|\mathfrak{M}(f)| \leqslant \|f\|_1 \qquad (f \in \mathcal{M}^1)$$

gilt.

Hat man nun $p > 1$, $f \in \mathcal{M}^p$ und $g \in \mathcal{M}^q$ $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1\right)$, so gilt nach der Hölderschen Ungleichung $fg \in \mathcal{M}^1$. Hält man f fest, so stellt also $\mathfrak{M}_f(g) = \mathfrak{M}(fg)$ ein wohlbestimmtes lineares Funktional auf $\mathcal{M}^q$ dar (seine Beschränktheit folgt wieder aus der Hölderschen Ungleichung). Insbesondere ist $\mathfrak{M}_f$ auf $\mathcal{B}^q$ bestimmt, da aber $\mathcal{B}^q$ mit $\mathfrak{L}^q(K)$ isometrisch-isomorph ist, so muß $\mathfrak{M}_f$ auf $\mathcal{B}^q$ durch ein Element des konjugierten Raumes $\mathcal{B}^p \simeq \mathfrak{L}^p(K)$ ausdrückbar sein. Genauer, es gibt eine Funktion f^* aus $\mathcal{B}^p$ derart, daß

$$(3) \qquad \mathfrak{M}_f(g) = m(f^* g) \qquad (g \in \mathcal{B}^q) .$$

Setzt man $g(t) = e^{-i\lambda t}$, so ist $\mathfrak{M}_f(g)$ als ein verallgemeinerter Fourierkoeffizient von f zu deuten, und wegen (3) hat man $\mathfrak{M}_f(e^{-i\lambda t}) = a_{f^*}(\lambda)$.

Ist für ein λ der „klassische" Koeffizient $a_f(\lambda)$ wohlbestimmt, so folgt $a_f(\lambda) = a_{f^*}(\lambda)$, da ja $\mathfrak{M}_f(g) = m(fg)$ gilt, falls $m(fg)$ existiert. Somit ist Satz 1 bewiesen.

Tatsächlich wurde mehr bewiesen, ist nämlich $\mathfrak{m}$ ein beliebiger *verallgemeinerter Mittelwert*, d.h. eine beliebige Erweiterung des linearen Funktionals m aus $\mathcal{B}^1$ (und nicht erst aus $\tilde{\mathcal{M}}^1$!) auf ganz $\mathcal{M}^1$, so ist für ein $f \in \mathcal{M}^p$ $(p > 1)$ das $\mathfrak{m}$-*Spektrum* von f, d.h. die Menge $\{\lambda\colon \mathfrak{m}(fe^{-i\lambda t}) \neq 0\}$ höchstens abzählbar und es gibt eine Funktion f^* aus $\mathcal{B}^p$, für welche $\mathfrak{m}(fe^{-i\lambda t}) = a_{f^*}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ gilt. Dieser Satz kommt in [11] als Corollary 1 aus Theorem 3 vor. Theorem 3 selbst umfaßt aber allgemeinere Funktionenklassen als $\mathcal{M}^p$ $(p > 1)$. Ist nämlich Φ eine N-Funktion im Sinne von Orlicz, d.h. hat man

$$\Phi(u) = \int_0^{|u|} \varphi(t)\,dt\,,$$

wo $\varphi(t)$ eine schwach wachsende rechtsstetige Funktion mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(t) > 0$ für $t > 0$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$ ist, und erfüllt Φ die Bedingung (Δ_2): $\Phi(2u) < C\Phi(u)$, so gibt es für jeden verallgemeinerten Mittelwert $\mathfrak{m}$ und jede zu $\mathcal{M}^\Phi$ gehörende, d.h. die Bedingung

$$\|f\|_\Phi \overset{\mathrm{df}}{=} \overline{\lim_{T\to\infty}}\, \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \Phi(|f(t)|)\,dt < \infty$$

erfüllende Funktion f eine Funktion f^* aus $\mathcal{B}^\Phi$ mit $\mathfrak{m}(fe^{-i\lambda t}) = a_{f^*}(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < \infty)$, wo $\mathcal{B}^\Phi$ die Abschließung in $\mathcal{M}^\Phi$ der Menge aller trigonometrischen Polynome nach der Norm $\|\cdot\|_\Phi$ bedeutet.

Die Elemente von $\mathcal{B}^\Phi$ sind die sog. B^Φ-fp. Funktionen (eine Teilmenge von $\mathcal{B}^1$). Sie haben abzählbare Spektra ([2], vgl. auch [1]). Die Grundidee der Urbanikschen Überlegung haben wir schon durch den Beweis von Satz 1 geschildert, der ja nur ein Sonderfall von Theorem 3 (für $\Phi(u) = |u|^p$ $(p > 1)$ und spezialisierte $\mathfrak{m}$) ist. Im allgemeinen erheischt aber der Beweis einen größeren Mittelaufwand, hauptsächlich dadurch, daß die Beziehung $fg \in \mathcal{M}^1$ diesmal nicht für den einfachen Fall $f \in \mathcal{M}^p$ und $g \in \mathcal{B}^q$, sondern für $f \in \mathcal{M}^\Phi$ und $g \in \mathcal{B}^\Psi$ festgestellt werden muß, wo

$$\Psi(u) = \int_0^{|u|} \sup_{\varphi(v)\leqq t} v\,dt$$

die zu Φ komplementäre Funktion ist. Hat man diese Prämisse erreicht, so geht alles weitere ungefähr so wie beim Satz 1, ein wenig nur durch den Umstand erschwert, daß $\mathcal{B}^\Phi$ und $\mathcal{B}^\Psi$ im allgemeinen nicht gegenseitig konjugiert sind, wie es für $\mathcal{B}^p$ und $\mathcal{B}^q$ der Fall ist.

3. Der Verfasser hat die Frage gestellt, ob es eine Funktion aus $\mathcal{M}^1$ gibt, für welche $a(\lambda)$ überall bestimmt und dennoch auf einer unabzählbaren Menge von Null verschieden ist. Aus Satz 1 folgt sofort, daß eine solche Funktion nicht zu $\mathcal{M}^p$ mit $p > 1$ gehören könnte, für $\mathcal{M}^1$ gibt aber Satz 1 keinen Aufschluß. Die Antwort ist im folgenden Satze von Kahane [7] enthalten:

SATZ 2. *Ist für eine in* $(0, \infty)$ *lokal integrierbare Funktion* f *der Koeffizient* $a(\lambda)$ *auf einer abgeschlossenen Menge* F *von* λ*-Werten bestimmt, so ist für jedes* $\varepsilon > 0$ *die Menge der* $\lambda \in F$ *mit* $|a(\lambda)| > \varepsilon$ *zerstreut* (*d.h. ohne insichdichten Teil*).

Hier wird nicht einmal $f \in \mathcal{M}^1$ vorausgesetzt! Da eine zerstreute Menge abzählbar ist, so ist $a(\lambda) \neq 0$ höchstens auf einer abzählbaren Teilmenge von F. Nimmt man als F die ganze reelle Achse, so kommt die verneinende Antwort auf die oben erwähnte Frage. Man folgert aber mehr:

SATZ 3. *Es gibt keine Funktion, für welche* $a(\lambda)$ *auf einer unabzählbaren Menge wohlbestimmt und von Null verschieden wäre.*

Also ist die Voraussetzung, daß $a(\lambda)$ *überall* existiert, überflüssig. In der Tat: die Menge der λ-Werte, für welche $a(\lambda)$ existiert, ist borelsch; so ist auch ihre Teilmenge mit $a(\lambda) \neq 0$ und demnach muß sie eine perfekte Teilmenge enthalten, falls sie unabzählbar ist.

Kahane's Überlegung ist anderer Art als die von Urbanik; von der Funktionalanalysis und von der Kompaktifizierung wird kein Gebrauch gemacht. Der Beweis ist indirekt: man nimmt an, daß $|a(\lambda)| > \varepsilon > 0$ auf einer insichdichten Menge F stattfindet und man konstruiert eine Folge von eingeschachtelten Intervallen I_j von der Eigenschaft, daß $F \cap I_j \neq \emptyset$ und daß für $\lambda \in I_j \cap F$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt - \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-i\lambda t}dt > \frac{\varepsilon}{\pi}$$

gilt. Dann gelangt man zum Widerspruch, indem man für den Schnittpunkt λ_0 aller I_j feststellt, daß $a(\lambda_0)$ nicht existiert, obwohl λ_0 zu der (abgeschlossenen) Menge F gehören muß.

Kahane macht darauf aufmerksam, daß die Abgeschlossenheit von F wesentlich ist, und konstruiert einfacherweise eine Funktion aus $\mathcal{M}^1$, derart daß $a(\lambda) = 1$ für jedes rationale Vielfache von π gilt.

Mit verallgemeinerten Mittelwerten verhält sich die Sache anders. Urbanik [11] zeigt, daß es einen verallgemeinerten Mittelwert $\mathfrak{m}_1$ auf $\mathcal{M}^1$ und eine Funktion $f_0 \in \mathcal{M}^1$ gibt, derart daß $\mathfrak{m}_1(f_0 e^{-i\lambda t}) = 1$ für unabzählbar viele λ gilt. Später bemerkte er, daß man für dieselbe Funktion sogar

$$|\mathfrak{m}_1(f_0 e^{-i\lambda t})| = 1 \quad \text{für jedes } \lambda \tag{4}$$

hat. Dies ist eine angenäherte Antwort auf eine Frage von Steinhaus, der wissen wollte, ob man einen verallgemeinerten Mittelwert $\mathfrak{m}^*$ so bilden kann, daß für geeignete Funktion g schlechthin $\mathfrak{m}^*(ge^{-i\lambda t}) = 1$ für jedes λ gälte.

Wir skizzieren hier die diesbezügliche Überlegung aus [11], indem wir des Autors Erlaubnis ausnutzen auch (4) mit herzuleiten.

Man geht von einem verallgemeinerten Banach-Mazurschen Grenzwert $\operatorname*{Lim}_n z_n$ für beschränkte Folgen komplexer Zahlen aus, wobei man berechtigterweise annimmt, daß immer $\operatorname*{Lim}_n z_n = \lim_k z_{n_k}$ für eine geeignete Teilfolge gilt. Man setzt

$$\mathfrak{m}_1(f) = \operatorname*{Lim}_n \frac{1}{2n!} \int_{-n!}^{n!} f(t)\,dt \qquad (f \in \mathcal{M}^1).$$

Danach definiert man die Funktion f_0 in der Weise, daß sie in den Intervallen $\left(n! - (n!)^{-1}, n!\right)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ sehr rasch ansteigende konstante Werte annimmt und sonst Null ist. Damit erreicht man, daß

$$\frac{1}{2n!} \int_{-n!}^{n!} f_0(t)e^{-i\lambda t}dt = e^{-in!\lambda} + o(1)$$

und also

$$\mathfrak{m}_1(f_0 e^{-i\lambda t}) = \operatorname*{Lim}_n e^{-in!\lambda}$$

für jedes λ gilt. Da man $\operatorname*{Lim}_n e^{-in!\lambda} = \lim_k e^{-in_k!\lambda}$ für eine von λ abhängige Teilfolge $\{n_k\}$ hat, so folgt (4). Außerdem kann man durch eine Rechnung feststellen, daß man für unabzählbar viele λ die vertikalen Striche in (4) weglassen darf.

Andererseits konnte Urbanik auch einen verallgemeinerten Mittelwert $\mathfrak{m}_2$ finden, derart daß für jedes $f \in \mathcal{M}^1$ eine B^1-fp. Funktion f^* mit $a_{f^*}(\lambda) = \mathfrak{m}_2(fe^{-i\lambda t})$ $(\lambda \in R)$ existiert ([11]). Das wird folgendermaßen erreicht: ist $\mathfrak{m}_0$ ein beliebiger verallgemeinerter Mittelwert, so ist der Ausdruck $\mathfrak{m}_0(fg)$ ein lineares Funktional im Raume aller Bohrschen fp. Funktionen g und daher im Raum aller stetigen Funktionen auf dem Bohrschen Kompaktum K. Gemäß dem Satze von Riesz gibt es also ein Borelsches Maß μ_f auf K so daß $\mathfrak{m}_0(fg) = \int_K g\,d\mu_f$ für jedes g gilt. Die erwünschte Funktion f^* erhält man als die Dichte des absolut stetigen Teiles von μ_f und man setzt $\mathfrak{m}_2(f) = m(f^*)$. Die verlangte Identität $\mathfrak{m}_2(fe^{-i\lambda t}) = \mathfrak{m}_2(f^*e^{-i\lambda t})$ folgt daraus, daß man für jede festgesetzte Bohrsche fp. Funktion $g_0(t)$, also insbesondere für $e^{-i\lambda t}$, die Äquivalenz $\mathfrak{m}_2(fg_0) = \mathfrak{m}_2(f^*g_0)$ hat; diese ergibt sich aus der Gleichheit $\int_K gg_0\,d\mu_f = \int_K g\,d\mu_{fg_0}$ (g — eine beliebige Borsche fp. Funktion), welche $d\mu_{fg_0} = g_0\,d\mu_f$ nach sich zieht.

4. In Anbetracht der Ergebnisse von Urbanik rückt die Frage nahe, welches die Funktionen aus $\mathcal{M}^p$ $(p \geqslant 1)$ sind, deren Fourier-Bohrsche Transformierte überall bestimmt und gleich Null ist, m.a.W. die Funktionen mit leerem Spektrum. Denn das sind die „Korrektionsglieder" zu den Besicovitchschen fp. Funktionen: jede Funktion aus $\mathcal{M}^p$ $(p > 1)$ ist ja die Summe einer B^p-Funktion und einer Funktion ohne Spektrum. Diese Frage wurde im vollen Umfang von Kahane gelöst [8]. Er nennt eine in $(-\infty, \infty)$ lokal integrierbare Funktion H-fastperiodisch (fp. im Sinne von Hartman), wenn

$$a(\lambda) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_x^{x+T} f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

für jedes λ existiert (und dann offenbar von x unabhängig ist) und R-fastperiodisch (fp. im Sinne von Ryll-Nardzewski (¹)), falls dieser Grenzwert *gleichmäßig* in x erreicht wird. Es sei H_0 die Menge der H-fp. Funktionen mit leerem Spektrum (d.h. $a(\lambda) = 0$ überall). Entsprechend sei R_0 definiert. Kahane bemerkt zuerst, daß man für jede lokal integrierbare Funktion f eine Funktion g aus R_0 mit $|f| = |g|$ finden kann. Man soll nur f mit einem Faktor $e^{i\varphi(t)}$ multiplizieren, wo die reelle Funktion φ sehr stark wächst. Kahane's Ergebnis liegt aber viel tiefer:

Satz 4. *Ist f lokal integrierbar, bezeichnet f_n die Teilfunktion f/I_n im Intervall $I_n = (n, n+1)$ $(-\infty < n < \infty)$ und hat man $f_n = O(|n|^a)$ mit $a < 1/2$, so gehört die Funktion $\sum_n \pm f_n$ für fast jede Vorzeichenfolge zu H_0. Ist f beschränkt, so gibt es eine Vorzeichenfolge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\sum_n \varepsilon_n f_n \in R_0$.*

Die Beweismethode ist probabilistisch. Man beweist zuerst das folgende Hauptlemma: sind μ_j $(j = 1, \ldots, \nu)$ Maße im Intervall $I = (0, l)$, $\mu = \sum_{j=1}^{\nu} \pm \mu_j$, wo die Vorzeichen beliebig gesetzt werden, und

$$m = \Big\{\sum_{j=1}^{\nu} \big(|\mu_j|(I)\big)^2\Big\}^{1/2},$$

so ist mit einer Wahrscheinlichkeit $> 1 - e^{-\xi}$ die Fourier-Stieltjes-Transformierte von μ im Intervall $(-T, T)$ $(T \geqslant 1/l)$ kleiner als $am\sqrt{\log(l\nu T) + \xi}$, wo a eine absolute Konstante bedeutet.

Um den ersten Teil von Satz 4 zu bewiesen, setzt man $d\mu_j(x) = f_j(x)dx$, $l = T = \nu$, $\xi = 2\log\nu$. Der zweite Teil erheischt eine kompliziertere Konstruktion. Aus Satz 4 (genauer, aus seinem zweiten Teil) folgert Kahane leicht:

(¹) Das ist mit den von R. Doss eigenführten R-fp. Funktionen nicht zu verwechseln; bei den letzteren wurde durch die Bezeichnung auf Riemann angespielt.

jede beschränkte und gleichmäßig stetige Funktion ist das Produkt von zwei beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen aus R_0. Er kann auch beweisen, daß jede unendlich oft differenzierbare und beschränkte Funktion die Quadratsumme von vier unendlich oft differenzierbaren und beschränkten Funktionen aus R_0 ist.

Diese Ergebnisse, und ganz besonders die beiden letzten, wirken entmutigend, falls man in der verallgemeinerten harmonischen Analysis ein neues mathematisches Werkzeug sehen möchte. Der Funktionen mit leerem Spektrum gibt es einfach zu viel; sie verdienen kaum den Namen „fastperiodisch" in irgendwelchem Sinn.

Obwohl die Aussichten auf eine „vernünftige" und nutzbringende Theorie wegen der Sätze von Kahane so gut wie verschwunden sind, so scheinen doch die Arbeiten von ihm und Urbanik bemerkenswert, da es sich hier um eine Lösung natürlicher Probleme handelt, die trotz ihres klassischen Aspekts lange offen blieben.

5. Nunmehr wenden wir uns der Frage zu, ob man gewisse hier dargestellte Resultate auf mehrere Dimensionen übertragen kann. Man darf sich dabei auf die Ebene E beschränken. Zuerst versuchen wir es mit der Theorie von Urbanik. Hier begegnet man keinen wesentlichen Schwierigkeiten, sobald ein Verfahren für die Mittelwertbildung festgelegt ist. Anstatt der linearen Intervalle $[-T, T]$, über die gemittelt wird, um dann mit T nach unendlich zu gehen, nehme man etwa eine feste aufsteigende Folge von Rechtecken K_i mit dem Mittelpunkt im Koordinatenanfang und mit $\bigcup_i K_i = E$. Dann ist der Bohrsche Mittelwert $m(f)$ einer Funktion von zwei Variablen als

$$\lim_i \frac{1}{|K_i|} \iint_{K_i} f(t, u)\,dt\,du$$

und die entsprechende Norm $\|f\|_p$ als

$$\left\{\overline{\lim_i} \frac{1}{|K_i|} \iint_{K_i} |f(t, u)|^p dt\,du\right\}^{1/p}$$

zu definieren. Der Marcinkiewiczsche Raum $\mathcal{M}_2^p$ besteht aus Klassen normäquivalenter Funktionen, für welche $\|f_p\| < \infty$ gilt. Er ist vollständig, weil man für eine gegebene Cauchyfolge $\{f_n\}$ eine Grenzfunktion durch das stückweise „Zusammenkleben" der f_n, analog wie man es im Falle einer Variablen macht (s. z.B. [3]), konstruieren kann. Der Raum $\widetilde{\mathcal{M}}_2^p$ wird so wie für den eindimensionalen Fall definiert. Dasselbe bezieht sich auf $\mathcal{B}_2^p$: hier nimmt man die Abschließung nach der Norm $\|f\|_p$ der Menge aller trigonometrischen Polynome $\sum_{j=1}^{n} a_j e^{i(\lambda_j t + \mu_j u)}$. Man beachte, daß für verschiedene K_i-Folgen oder wenn man etwa Kreise anstatt der Rechtecke zugrunde legt, die Räume $\mathcal{M}_2^p$ oder $\widetilde{\mathcal{M}}_2^p$ nicht übereinstimmen müssen. Auch die Besicovitchschen Funktionen brauchen nicht dieselben zu sein, obwohl alle an Hand einer aufsteigenden Folge nach Jordan meßbarer Mengen E_i $(\bigcup_i E_i = E)$ erhaltenen $\mathfrak{B}_2^p$-Räume isometrisch sind, weil sie alle auf den Raum $\mathfrak{L}^p$ über der Bohrschen Kompaktifizierung von E durch eine Isometrie übergehen. Wird aber eine Folge $\{E_i\}$ ein für alle Mal gewählt, so bleibt Satz 1 und auch der volle Theorem 3 von Urbanik samt dem Beweise aufrechterhalten.

Man kann den Mittelwert von $f(t, u)$ auch iterierterweise bestimmen, d.h. als $\underset{u}{m}\left(\underset{t}{m}(f(t, u))\right)$. Diese Definition ist der Norm

$$N_2(f) = \overline{\lim_{U\to\infty}} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} \overline{\lim_{T\to\infty}} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |f(t, u)|\, dt\, du \tag{5}$$

angepaßt, die auch zu einem möglichen Begriff der Besicovitchschen fp. Funktionen von zwei Variablen und zu deren Verallgemeinerung führt. Mag $\mathcal{N}_2$ den linearen Raum der N_2-normfiniten Funktionen modulo Normäquivalenz bezeichnen. Die Bohrschen fp. Funktionen von zwei Variablen kann man als Elemente von $\mathcal{N}_2$ betrachten. Ist $f(t, u)$ eine Bohrfunktion, so ist der Mittelwert $\underset{t,u}{m}(f)$ gleich $\underset{u}{m}\left(\underset{t}{m}(f)\right)$. Ersichtlich kann er auch an Hand einer beliebigen aufsteigenden Folge von Rechtecken K_i mit $\bigcup_i K_i = E$ erhalten werden. Da der Grenzwert

$$\underset{t}{m}(f) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t, u)\, dt$$

gleichmäßig in u erreicht wird, so kann man die Grenzfunktion einer Cauchyfolge $\{f_n\}$ von Bohrfunktionen immer stückweise in horizontalen Streifen konstruieren. Mithin ist die Abschließung $\mathfrak{B}_2^1$ der Menge aller Bohrfunktionen in $\mathcal{N}_2$ eben ein Modell für den Raum der Besicovitchschen fp. Funktionen.

Die Fourier-Bohr-Koeffizienten einer Funktion aus $\mathfrak{B}_2^1$ kann man berechnen, indem man zuerst

$$a^\lambda(u) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t, u)\, e^{-i\lambda t} dt$$

und dann

$$a(\lambda, \mu) = \lim_{U\to\infty} \frac{1}{2U} \int_{-U}^{U} a^\lambda(u)\, e^{-i\mu u} du$$

setzt. Sonstige Funktionen aus $\mathcal{N}_2$ brauchen nicht die so bestimmte Fourier-Bohr-Transformierte zu haben, wenn aber $a(\lambda, \mu)$ für jedes Paar

(λ, μ) existiert, dann kann man fragen, ob $a(\lambda, \mu) = 0$ außerhalb einer abzählbaren Menge in der λ, μ-Ebene gelten muß. Kahane's Beweis von Satz 2 läßt sich nicht direkt auf den zweidimensionalen Fall übertragen, wohl aber können wir auf Grund von Satz 3 und vermöge einer zusätzlichen Überlegung folgendes beweisen:

SATZ 5. *Ist f eine lokal flach integrierbare Funktion, so kann der Ausdruck $a(\lambda, \mu)$ nur in einer abzählbaren Menge von (λ, μ)-Punkten wohlbestimmt und von Null verschieden sein.*

Also wird nicht einmal $f \in \mathcal{N}_2$ gefordert und Satz 5 ist eine glatte Verallgemeinerung von Satz 3. Zuerst bemerken wir, daß das Vorhandensein von $a(\lambda, \mu)$ nicht etwa zur Folge hat, daß $a^\lambda(u)$ für jedes u existiert. Offenbar muß es für *fast* jedes u existieren, mehr aber setzen wir nicht voraus.

Wir dürfen annehmen, daß f B-meßbar ist. Wäre es nicht der Fall, so können wir f durch Abänderung auf einer Nullmenge zu einer B-meßbaren Funktion machen, was offenbar weder die Existenz noch den Wert von $a(\lambda, \mu)$ beeinflußt. Ist aber f B-meßbar, so ist in der (λ, u)-Ebene die Menge der Punkte, wo $a^\lambda(u)$ existiert, borelsch, und $a^\lambda(u)$ selbst eine B-meßbare Funktion von zwei Variablen. Es ist klar, daß $a(\lambda, \mu) \neq 0$ für irgendein μ nur dann möglich ist, wenn die Menge der u-Werte mit $a^\lambda(u) \neq 0$ ein positives Maß hat. Nun wenden wir folgenden Satz von Ryll-Nardzewski ([10]) an:

Ist A eine Borelsche Menge in der (λ, u)-Ebene und ist für jedes u_0 der Durchschnitt von A mit der Geraden $u = u_0$ abzählbar, so hat der Durchschnitt von A mit einer Geraden $\lambda = \lambda_0$ bis auf abzählbar viele Werte von λ_0 das Maß Null.

Nehmen wir als A die (offenbar borelsche) Menge $\{(\lambda, u): a^\lambda(u) \neq 0\}$, so ist die Voraussetzung obigen Satzes wegen Satz 3 erfüllt, die Behauptung aber lehrt, daß es nur abzählbar viele λ gibt, für welche $a(\lambda, \mu) \neq 0$ für irgend ein μ gilt. Eine nochmalige Anwendung von Satz 3, diesmal bei festem λ, schließt den Beweis von Satz 5.

Am Ende wollen wir bemerken, daß durch die hier angeführten Sätze nicht alle Fragen aus der verallgemeinerten harmonischen Analysis beantwortet werden. Z.B. man weiß im Falle *einer* Variablen nicht, wie sich die Spektra von Funktionen mit endlicher S^p-Norm $\{\sup\limits_x \int\limits_x^{x+1} |f|^p dt\}^{1/p}$ oder W^p-Norm $\left\{\lim\limits_{l\to\infty} \frac{1}{l} \sup\limits_x \int\limits_x^{x+l} |f|^p dt\right\}^{1/p}$ $(p \geqslant 1)$ verhalten. Insbesondere kann man fragen, ob für eine Funktion f mit überall bestimmter Transformierten $a_f(\lambda)$ und endlicher S^p-Norm oder W^p-Norm im Falle $p > 1$ immer eine S^p-*fastperiodische* (d.h. ein S^p-Limes von Bohrschen fp. Funktionen) bzw. W^p-*fastperiodische* Funktion f^* mit $a_{f^*}(\lambda) = a_f(\lambda)$ für jedes λ existiert. Das wäre ein Analogon zu Satz 1 von Urbanik.

Literaturverzeichnis

[1] J. Albrycht, *Some remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz space*, Bull. Acad. Pol. des Sci., Série Math., Astr. et Phys. 4 (1956), S. 1-3.

[2] — *Some remarks on the Marcinkiewicz-Orlicz space, II*, Bull. Acad. Pol. des Sci., Série Math., Astr. et Phys. 7 (1959), S. 11-12.

[3] A. S. Besicovitch, *Almost periodic functions*, Cambridge 1932.

[4] H. G. Eggleston, *The Bohr spectrum of a bounded function*, Proc. Am. Math. Soc. 9 (1958), S. 328-332.

[5] P. Erdös and S. J. Taylor, *On the set of points of convergence of a lacunary trigonometric series and the equidistribution properties of related sequences*, Proc. London Math. Soc. (2) 7 (1957), S. 598-615.

[6] C. S. Herz, *The Bohr spectrum of bounded functions*, Bull. Am. Math. Soc. 62 (1955), S. 76.

[7] J.-P. Kahane, *Sur les coefficients de Fourier-Bohr*, Studia Math. 21 (1961), S. 103-106.

[8] — *Sur les fonctions presque-périodiques généralisées dont le spectre est vide*, Studia Math. 21 (1962), S. 231-236.

[9] J. Marcinkiewicz, *Une remarque sur les espaces de M. Besicovitch*, C. R. Acad. Sci. Paris 208 (1939), S. 157.

[10] C. Ryll-Nardzewski, *An analogue of Fubini's theorem and its application to random linear equations*, Bull. Acad. Pol. des Sci., Série Math., Astr. et Phys. 8 (1960), S. 511-513.

[11] K. Urbanik, *Fourier analysis in Marcinkiewicz spaces*, Studia Math. 21 (1961), S. 93-102.

MATHEMATISCHES INSTITUT DER POLNISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

Reçu par la Rédaction le 31. 12. 1963