ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Sur un théorème concernant les fonctions univalentes linéairement accessibles de M. Biernacki

par A. Bielecki et Z. Lewandowski (Lublin)

1. Une fonction complexe

$$f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots, \qquad a_1 \neq 0\,, \tag{1}$$

holomorphe dans le cercle $C_1 = \{z\colon |z| < 1\}$, s'appelle presque convexe s'il existe une fonction $g(z) = b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$, $b_1 \neq 0$, univalente et convexe dans C_1, telle que

$$\operatorname{re}\{f'(z)/g'(z)\} > 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1\,. \tag{2}$$

Ces conditions étant remplies, la fonction $f(z)$ doit être univalente dans C_1 et

$$\operatorname{re}\{1 + zg''(z)/g'(z)\} > 0 \quad \text{pour} \quad |z| < 1\,. \tag{3}$$

Les fonctions presque convexes ont été introduites dans la théorie des fonctions univalentes par W. Kaplan en 1952; voir [3], p. 169. Z. Lewandowski a remarqué que la notion de fonction presque convexe coïncide avec celle de fonction linéairement accessible qui avait été définie déjà en 1936 par M. Biernacki, cf. [2], p. 293. Une fonction $f(z)$ de la forme (1) est dite linéairement accessible si l'ensemble complémentaire du domaine $f(C_1)$ dans le plan de la variable complexe peut être recouvert par des demi-droites fermées ne se coupant pas deux à deux, ce qui veut dire qu'un point appartenant à deux demi-droites distinctes doit être l'origine d'une au moins d'elles.

Or, Z. Lewandowski a démontré que toute fonction linéairement accessible est presque convexe [4] et, inversement, toute fonction presque convexe est linéairement accessible [5]. La démonstration de ce dernier théorème, donnée dans [5], est assez longue et pénible. Le but de la présente note est d'en donner une autre démonstration plus courte, basée sur un principe simple que nous avons utilisé dans [1].

2. Admettons que $f(z)$ soit une fonction de la forme (1) presque convexe dans C_1 et posons

$$F(z, t) = f(z) + tzg'(z)$$

pour $z \in C_1$ et $t \in \langle 0, \infty)$. Comme

$$F'_z(z, t)/g'(z) = zF'_z(z, t)/F'_t(z, t) = f'(z)/g'(z) + t[1 + zg''(z)/g'(z)],$$

il résulte de (1) et (2) que la fonction $F(z, t)$ est presque convexe, donc univalente, dans C_1 pour tout $t \in \langle 0, \infty)$ fixé et, en plus, on a $\operatorname{re}\{zF'_z(z, t)/F'_t(z, t)\} > 0$ pour $z \in C_1$ et $t \in \langle 0, \infty)$ (¹), ce qui entraîne (cf. [1], p. 47) la propriété suivante de la fonction $F(z, t)$:

PROPRIÉTÉ P. Si $\varrho \in (0, 1)$ et $0 \leqslant t_1 < t_2$, et si $C_\varrho = \{z: |z| < \varrho\}$, alors le domaine $F(\bar{C}_\varrho, t_1) = \{\zeta: \zeta = F(z, t_1),\ |z| \leqslant \varrho\}$ est contenu dans l'intérieur du domaine $F(C_\varrho, t_2)$.

3. Fixons un entier $n \geqslant 2$ et admettons que

$$(4) \qquad r = 1 - 1/n\,, \qquad f_n(z) = f\big((1-1/n)z\big)\,.$$

Il est visible que, pour $t \geqslant 0$, l'ensemble

$$\Gamma(t) = \{\zeta: \zeta = F(re^{i\theta}, t),\ \theta \in \langle 0, 2\pi)\}$$

est un circuit simple limitant le domaine $F(C_r, t)$, tandis que l'ensemble

$$l(\theta) = \{\zeta: \zeta = F(re^{i\theta}, t),\ t \geqslant 0\}\,, \qquad \theta \text{ fixé}\,,$$

est une demi-droite fermée dont l'origine $f(re^{i\theta}) = f_n(e^{i\sigma})$ est située sur le circuit $\Gamma(0)$ limitant le domaine $f_n(C_1)$.

Supposons que $0 \leqslant |\theta - \sigma| < 2\pi$ et que les demi-droites $l(\theta)$ et $l(\sigma)$ aient un point commun

$$\zeta = F(re^{i\theta}, t) = F(re^{i\sigma}, s)\,.$$

La fonction $F(z, t)$ étant univalente pour tout $t \geqslant 0$ fixé, on a $t \neq s$. Mais cela mène à une contradiction, car dans ce cas un des circuits $\Gamma(t)$ et $\Gamma(s)$ doit être contenu dans l'intérieur de l'autre, en vertu de la propriété P (N° 2). Nous avons ainsi montré que, pour $\theta \in \langle 0, 2\pi)$, les demi-droites $l(\theta)$ sont disjointes deux à deux. Remarquons encore qu'aucune des demi-droites $l(\theta)$ ne peut passer par des points contenus dans l'intérieur du circuit $\Gamma(0)$, sinon une demi-droite $l(\theta)$ devrait couper ce circuit en un point $f(re^{i\tau})$, où $\tau \neq \theta$, qui serait l'origine d'une autre demi-droite $l(\tau)$.

4. Fixons maintenant un point ζ situé à extérieur du circuit $\Gamma(0)$ et désignons par $\psi(\theta)$ l'angle entre l'axe réel et la demi-droite $m(\theta)$ issue du point $f(re^{i\theta})$ et passant par le point ζ, et soit $\varphi(\theta)$ l'angle entre l'axe

---

(¹) Cette condition s'interprète comme il suit: Lorsque le paramètre t croît, le circuit limitant le domaine $F(C_\varrho, t)$, $\varrho \in (0, 1)$, se meut de telle façon que la direction de la vitesse instantanée d'un point quelconque P du circuit forme un angle aigu avec la normale extérieure au circuit menée au point P. Donc le domaine $F(C_\varrho, t)$ s'élargit lorsque t croît.

réel et la demi-droite $l(\theta)$. Or, en vertu de la définition de $l(\theta)$, on a $\varphi(\theta) = \arg F_1'(re^{i\theta}) = \arg\{re^{i\theta}g'(re^{i\theta})\}$.

Mais la fonction $g(z)$ est convexe et, par conséquent, l'angle $\varphi(\theta)$ croît avec θ et $\varphi(\theta+2\pi) = \varphi(\theta)+2\pi$. D'autre part $\psi(\theta+2\pi) = \psi(\theta)$ car ζ est situé à l'extérieur du contour $\Gamma(0)$. Donc l'accroissement de l'angle $\chi(\theta) = \varphi(\theta)-\psi(\theta)$ correspondant à l'accroissement 2π du paramètre θ est aussi égale à 2π et, par suite, il existe un nombre réel θ_0 et un entier k tels que $\chi(\theta_0) = 2\pi k$; mais cela signifie que la demi-droite $l(\theta_0) = m(\theta_0)$ passe par le point ζ.

Nous avons ainsi démontré que les droites $l(\theta)$, où $\theta \in \langle 0, 2\pi)$ recouvrent tous les points extérieurs du contour $\Gamma(0)$ limitant le domaine $f_n(C_1) = f(C_r)$. Les points appartenant à $\Gamma(0)$ sont en même temps origines des demi-droites $l(\theta)$ et au N° 3 nous avons constaté que ces demi-droites ne se coupent pas deux à deux. Donc la fonction $f_n(z)$ est linéairement accessible d'après la définition due à M. Biernacki, et ce résultat est évidemment valable pour $n = 2, 3, \ldots$

D'après (4), la suite des fonctions $f_n(z)$ est uniformément convergente vers la fonction $f(z)$ dans tout cercle C_ϱ, où $\varrho \in (0,1)$, et ces fonctions sont linéairement accessibles. En vertu d'un théorème de M. Biernacki cela suffit pour que la fonction limite $f(z)$ soit aussi linéairement accessible, ce qui achève notre démonstration.

Travaux cités

[1] A. Bielecki et Z. Lewandowski, *Sur des familles de fonctions α-étoilées*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 15 (1961), p. 45-55.

[2] M. Biernacki, *Sur la représentation conforme des domaines linéairement accessibles*, Prace Matematyczno-Fizyczne 44 (1936), p. 293-314.

[3] W. Kaplan, *Close-to-Convex Schlicht Functions*, The Michigan Mathematical Journal 1, 2 (1952), p. 169-185.

[4] Z. Lewandowski, *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes I*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 12 (1958), p. 131-146.

[5] — *Sur l'identité de certaines classes de fonctions univalentes II*, Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska, Sectio A, 14 (1960), p. 19-46.

Reçu par la Rédaction le 30. 6. 1961