ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1971)

Sur quelques problèmes extrémaux dans les familles des fonctions générées par les fonctions de Carathéodory

par WIESŁAW PLASKOTA

1. Soient λ, β, M, k des nombres quelconques fixés: $\lambda \in [0, 1)$, $\beta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $M \geqslant 1$, k étant un nombre naturel. Désignons par $S_k^*(\lambda, \beta, M)$ la famille de toutes les fonctions holomorphes et univalentes dans le cercle $K = \{z: |z| < 1\}$ de la forme

$$f(z) = z + a_{k+1}^{(k)} z^{k+1} + a_{2k+1}^{(k)} z^{2k+1} + \ldots + a_{nk+1}^{(k)} z^{nk+1} + \ldots, \tag{1}$$

et satisfaisant à la condition

$$\left| \frac{e^{i\beta} \dfrac{zf'(z)}{f(z)} - i\sin\beta - \lambda\cos\beta}{(1-\lambda)\cos\beta} - M \right| < M \qquad \text{pour tout } z \in K.$$

Évidemment $S_k^*(\lambda, \beta, M_1) \subset S_k^*(\lambda, \beta, M_2)$ quand $M_1 < M_2$. Donc $S_k^*(\lambda, \beta, M) \subset S_k^*(\lambda, \beta)$, où $S_k^*(\lambda, \beta)$ est la famille de toutes les fonctions de la forme (1), β spiralement étoilées d'ordre λ dans le cercle K. La notion de fonctions spiralement étoilées a été introduite par Špaček [6].

THÉORÈME. *Si $f(z) \in S_k^*(\lambda, \beta, M)$, on a*

$$|a_{(n-1)k+1}^{(k)}| \leqslant \frac{1}{(n-1)!\,k^{n-1}} \prod_{j=1}^{n-1} |s_j|, \qquad n = 2, \ldots, N, \tag{2}$$

et

$$|a_{(n-1)k+1}^{(k)}| \leqslant \frac{1}{(N-2)!\,(n-1)\,k^{N-1}} \prod_{j=1}^{N-1} |s_j|, \qquad n = N+1, N+2, \ldots \tag{3}$$

où

$$s_j = (1-\lambda)\left(2 - \frac{1}{M}\right)\cos\beta e^{-i\beta} + k\left(1 - \frac{1}{M}\right)(j-1);$$

le nombre N,

$$N \in \left[1 + \frac{a}{k}(1-\lambda)\cos\beta,\ 2 + \frac{a}{k}(1-\lambda)\cos\beta\right),$$

avec $a = (M-1)\cos\beta + \sqrt{M^2-(n-1)^2\sin^2\beta}$, *est un nombre naturel. L'égalité dans* (2) *a lieu pour la fonction*

$$(4)\qquad f_\varepsilon(z) = z\left[1+\varepsilon\left(1-\frac{1}{M}\right)z^k\right]^{-(1-\lambda)(2-1/M)(1-1/M)^{-1}k^{-1}\cos\beta e^{-i\beta}},$$

$$|\varepsilon| = 1,\ si\ M\neq 1,$$

respectivement

$$(5)\qquad f_\varepsilon(z) = z\exp[\varepsilon(1-\lambda)k^{-1}\cos\beta e^{i\beta}z^k],\qquad |\varepsilon| = 1,\ si\ M = 1.$$

Démonstration. $f(z)\in S_k^*(\lambda,\beta,M)$ si et seulement si

$$(6)\qquad \frac{e^{i\beta}\dfrac{zf'(z)}{f(z)}-i\sin\beta-\lambda\cos\beta}{(1-\lambda)\cos\beta} = P(z),$$

où $P(z)$ est une fonction de la forme

$$(7)\qquad P(z) = 1+p_kz^k+p_{2k}z^{2k}+\quad +p_{(n-1)k}z^{(n-1)k}+\ldots$$

holomorphe dans le cercle K et telle que

$$(8)\qquad |P(z)-M| < M,\qquad z\in K.$$

Désignons par $\mathscr{P}_k(M)$ la famille des fonctions $P(z)$ qui satisfont aux conditions (7) et (8). Désignons encore par Ω_k la famille de toutes les fonctions

$$(9)\qquad \varphi(z) = c_kz^k+c_{2k}z^{2k}+\ldots+c_{nk}z^{nk}+\ldots$$

holomorphes dans le cercle K et bornées au sens de Löwner ($|\varphi(z)|<1$, $z\in K$). La fonction

$$(10)\qquad P(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-m\varphi(z)},\qquad m = 1-\frac{1}{M},$$

appartient à la famille $\mathscr{P}_k(M)$ si et seulement si $\varphi(z)$ est une fonction de la classe Ω_k (v. [4]). Nous utiliserons dans la suite une méthode de Clunie [1]. Soit $f(z)\in S_k^*(\lambda,\beta,M)$. Alors, en vertu de (6) et (10) on a

$$zf'(z)-f(z) = \{mzf'(z)+[(1+m)(1-\lambda)\cos\beta e^{-i\beta}-m]f(z)\}\,\varphi(z)$$

pour une fonction $\varphi(z)\in\Omega_k$.

D'où l'on tire, d'aprés (1),

$$(11)\qquad ka_{k+1}^{(k)}z^{k+1}+2ka_{2k+1}^{(k)}z^{2k+1}+\quad +(n-1)ka_{(n-1)k+1}^{(k)}z^{(n-1)k+1}$$
$$= (s_1z+s_2a_{k+1}^{(k)}z^{k+1}+\ldots+s_{n-1}a_{(n-1)k+1}^{(k)}z^{(n-1)k+1}+\ldots)\,\varphi(z).$$

En tenant compte de la relation (9) dans (11) on obtient l'égalité

$$ka_{k+1}^{(k)} = s_1c_k.$$

La fonction $\varphi(z)$ étant bornée, on a

$$|a_{k+1}^{(k)}| \leqslant \frac{|s_1|}{k}.$$

Soit n un nombre naturel quelconque fixé. De (11) il résulte que

$$\Big|\sum_{j=2}^{n}(j-1)ka_{(j-1)k+1}^{(k)}z^{(j-1)k+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}h_{(j-1)k+1}^{(k)}z^{(j-1)k+1}\Big| \leqslant \Big|s_1 z+\sum_{j=2}^{n-1}s_j a_{(j-1)k+1}^{(k)}z^{(j-1)k+1}\Big|.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|\sum_{j=2}^{n}(j-1)ka_{(j-1)k+1}^{(k)}(re^{it})^{(j-1)k+1}+\sum_{j=n+1}^{\infty}h_{(j-1)k+1}^{(k)}(re^{it})^{(j-1)k+1}\Big|^2 dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big|s_1 re^{it}+\sum_{j=2}^{n-1}s_j a_{(j-1)k+1}^{(k)}(re^{it})^{(j-1)k+1}\Big|^2 dt,$$

où $0<r<1$.

Intégrant et passant ensuite à la limite avec $r\to 1$ on obtient l'inégalité

$$\sum_{j=2}^{n}(j-1)^2k^2|a_{(j-1)k+1}^{(k)}|^2 \leqslant |s_1|^2+\sum_{j=2}^{n-1}|s_j|^2|a_{(j-1)k+1}^{(k)}|^2.$$

Donc

$$(12)\qquad (n-1)^2k^2|a_{(j-1)k+1}^{(k)}|^2 \leqslant |s_1|^2+\sum_{j=2}^{n-1}[|s_j|^2-(j-1)^2k^2]|a_{(j-1)k+1}^{(k)}|^2.$$

Observons que $|s_{n-1}|^2-(n-2)^2k^2>0$ si et seulement si $n\leqslant N$, N étant le nombre défini dans la conclusion du théorème. En s'appuyant sur l'inégalité (12) on déduit par récurrence les limitations (2) et (3). On prouve aussi aisément que les fonctions (4) et (5) réalisent la limitation forte (2).

Le présent travail complète les résults établis dans [5].

2. Nous étudierons maintenant un problème extrémal pour les fonctions de la classe $S^*(M) = S_1^*(0, 0, M)$, problème qui reste en rapport avec celui du rayon du noyau d'étoilement. N et M étant fixés, $1\leqslant N<M$, considérons les familles de fonctions $S^*(M)$ et $S^*(N)$ (comme $N<M$, on a évidemment $S^*(N)\subset S^*(M)$). Soit $f(z)\in S^*(M)$. Nous appellerons rayon du noyau de *N-étoilement de la fonction* $f(z)$ la borne supérieure $r(f)$ des nombres r, $0<r<1$, tels que

$$\left|\frac{zf'(z)}{f(z)}-N\right|<N \quad \text{pour } |z|<r.$$

Donc

$$r(f) = \sup\left\{r: \left|\frac{zf'(z)}{f(z)} - N\right| < N,\ |z| < r\right\}.$$

Nous appellerons rayon du noyau de *N-étoilement de la famille* $S^*(M)$ la borne inférieure r_0 des nombres $r(f)$ lorsque f parcourt la classe $S^*(M)$:

(13) $$r_0 = \inf_{f \in S^*(M)} r(f).$$

Dans cette partie de notre travail nous allons déterminer la borne (13). Désignant par $\mathscr{P}(M)$ la classe $\mathscr{P}_1(M)$ définie précédemment, on constate d'abord que l'on a, en vertu de (6),

(14) $$r = \inf_{P \in \mathscr{P}(M)} \sup\{r: |P(z) - N| < N,\ |z| < r\}.$$

Posons ensuite $\Omega = \Omega_1$ (v. section 1) et soit $\mathscr{P}$ la famille de toutes les fonctions de la forme

$$p(z) = 1 + p_1 z + p_2 z^2 + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle K et telles que $\operatorname{re} p(z) > 0$ pour $z \in K$. On sait [3] que $p(z) \in \mathscr{P}$ si et seulement si

(15) $$p(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-\varphi(z)}$$

pour une fonction $\varphi(z) \in \Omega$. D'autre part, en vertu de (10), $P(z) \in \mathscr{P}(M)$ si et seulement si

(16) $$P(z) = \frac{1+\varphi(z)}{1-m\varphi(z)}$$

pour une fonction $\varphi(z) \in \Omega$.

De (15) et (16) il résulte donc que $P(z) \in \mathscr{P}(M)$ si et seulement si

(17) $$P(z) = \frac{ap(z)}{1+bp(z)}$$

pour une fonction $p(z) \in \mathscr{P}$, où

$$a = \frac{2}{1+m}, \quad b = \frac{1-m}{1+m}$$

(v. [2]).

Par conséquent l'égalité (14) peut tre êmise sous la forme

$$r_0 = \inf_{p \in \mathscr{P}} \sup\left\{r: \left|\frac{ap(z)}{1+bp(z)} - N\right| < N,\ |z| < r\right\}.$$

Soient $F(u)$ une fonction analytique dans le demi-plan $\operatorname{re} u > 0$, $\mathfrak{z}$, $|\mathfrak{z}| < 1$, un point fixé et

$$F(p) = F[p(\mathfrak{z})] \tag{18}$$

une fonctionelle définie sur la famille $\mathscr{P}$. Alors les fonctions aux limites par rapport à la fonctionnelle (18) seront de la forme

$$p^*(z) = \frac{1+\varepsilon z}{1-\varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1,$$

donc la frontière Γ du domaine des valeurs de cette fonctionnelle est déterminée par l'équation

$$\Phi = F[p^*(\mathfrak{z})].$$

Dans le cas où $F(u) = u$ et $\mathfrak{z} = re^{i\alpha}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \alpha < 2\pi$, l'équation de la frontière Γ devient

$$\Phi = \frac{1+r^2}{1-r^2} + \frac{2r}{1-r^2} e^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$

On déduit aisément de là et de (17) que les fonctions aux limites par rapport à la fonctionnelle

$$P(\mathfrak{z}) = \frac{ap(\mathfrak{z})}{1+bp(\mathfrak{z})}, \quad \mathfrak{z} = re^{i\alpha}, 0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi, p(z) \in \mathscr{P}, \tag{19}$$

sont de la forme

$$P^*(z) = \frac{1+\varepsilon z}{1-m\varepsilon z}, \quad |\varepsilon| = 1 \tag{20}$$

et que la frontière du domaine des valeurs de la fonctionnelle (20) est la circonférence d'équation

$$w = c(r) + \varrho(r) e^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,$$

où

$$c(r) = \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2}, \quad \varrho(r) = \frac{(1+m)r}{1-m^2r^2}, \quad m = 1 - \frac{1}{M}.$$

Soit

$$A(r, t) = N - |P^*(z) - N|, \quad |z| = r, 0 < r < 1.$$

Puisque la famille $\mathscr{P}(M)$ est compacte et que la fonctionnelle (19) est continue, les raisonnements précédents montrent que le rayon r_0 du noyau de N-étoilement de la famille $S^*(M)$ est la plus petite racine positive de l'équation

$$B(r) = 0,$$

où $B(r) = \min\limits_{|z|=r} A(r, t)$, $0 < r < 1$.

Par conséquent

$$B(r) = \min_{0 \leqslant t \leqslant 2\pi} \left[N - \left| \frac{1+mr^2}{1-m^2r^2} + \frac{(1+m)r}{1-m^2r^2} e^{it} - N \right| \right].$$

Dès lors

$$B(r) = \begin{cases} \dfrac{1-r}{1+mr} & \text{pour } 0 < r \leqslant \sqrt{\dfrac{N-1}{m(1+Nm)}}, \\ 2N - \dfrac{1+r}{1-mr} & \text{pour } \sqrt{\dfrac{N-1}{m(1+Nm)}} \leqslant r < 1. \end{cases}$$

Nous aurons donc

$$r_0 \doteq \frac{2N-1}{1+2Nm}.$$

Nous avons ainsi établi le théorème suivant:

THÉORÈME. *Le rayon du noyau de N-étoilement de la famille $S^*(M)$ est déterminé par la formule*

$$r_0 = \frac{(2N-1)\,M}{M(2N+1)-2N} \quad (N < M).$$

COROLLAIRE. *Le rayon du noyau de N-étoilement de la famille S^* de toutes les fonctions $f(z), f(0) = 0, f'(0) = 1$, étoilées dans le cercle $|z| < 1$ est donne par la formule*

$$r_0 = \frac{2N-1}{2N+1}.$$

Références

[1] J. Clunie, *On meromorphic schlicht functions*, J. London Math. Soc. 34 (1959), p. 215—216.

[2] W. Janowski, *Extremal problems for a familly of functions with positive real part and for some related families*, Ann. Polon. Math. 23 (1970), p. 159—177.

[3] Z. Nehari, *Conformal mapping*, New York 1952.

[4] W. Plaskota, *Limitation des coefficients dans une famille de fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$*, Ann. Polon. Math. 24 (1970), p. 65—70.

[5] — *On the coefficients of some families of regular functions* (sous presse).

[6] L. Špaček, *Příspěvek k teorii funkci prostých*, Časopis Pěst. Mat. a Fys. 62 (1932), p. 12—19.

Reçu par la Rédaction le 18. 3. 1970