ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Das Verfahren von Ritz-Galerkin bei natürlichen Eigenwertproblemen

von W. DÜCK (Berlin)

In einer ersten Mitteilung [1] (¹) wurden die Variationsprinzipien von Rayleigh und Courant für natürliche Eigenwertprobleme bewiesen. Damit stehen uns auch die theoretischen Grundlagen für das in der Praxis sehr leistungsfähige Ritz-Galerkinsche Verfahren zur Verfügung. Wie bei Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen wird dem natürlichen Eigenwertproblem eine Matrizeneigenwertaufgabe als finites Problem zugeordnet. Dabei werden die Elemente dieser Matrizen mittels der natürlichen Produktbildungen bestimmt. Auch bei der Beurteilung der erhaltenen Näherungswerte und der Konvergenz des Verfahrens werden wir zu solchen Ergebnissen geführt, die bereits für Probleme mit Kamkeschen Randbedingungen bekannt sind.

1. Die Galerkinschen Gleichungen. Wir betrachten, wie in [1], das natürliche Eigenwertproblem

$$My - \lambda Ny = 0\,,$$
$$W_j(y) = 0, \qquad j = 1, \ldots, k\,,$$
$$R_j^M(y) = \lambda R_j^N(y), \qquad j = 1, \ldots, 2m-k\,.$$

Bezeichnet $v_1(x), \ldots, v_r(x)$ ein beliebiges System linear unabhängiger Funktionen aus Z, wird zur näherungsweisen Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen ein Ritz-Galerkinscher Ansatz

$$u(x) = \sum_{i=1}^{r} d_i v_i(x) \tag{1}$$

gemacht. Die d_i seien beliebige nicht sämtlich verschwindende Konstante. Die Gesamtheit der durch (1) bestimmten Funktionen $u(x)$ bildet eine Menge G von zulässigen Funktionen, die damit eine Untermenge

(¹) Die in [1] eingeführten Voraussetzungen, Bezeichnungen und die bewiesenen Sätze werden als bekannt angenommen.

von Z ist. Durch Variation der d_i soll der Rayleighsche Quotient $R(u)$ zu einem Extremum gemacht werden.

Satz 1. *Das natürliche Eigenwertproblem sei eigentlich definit in Z. Die Ansatzfunktionen $v_1(x), \ldots, v_r(x)$ in* (1) *mögen der Ungleichung*

$$(2) \qquad (v_i, v_i)_N > 0, \quad i = 1, \ldots, r$$

— vorausgesetzt, daß es überhaupt solche Funktionen gibt, was sicher der Fall ist, wenn mindestens r positive Eigenwerte existieren — genügen. Bilden wir Zahlen a_{ij}, b_{ij} entsprechend den Gleichungen

$$(3) \qquad a_{ij} = (v_i, v_j)_M, \quad b_{ij} = (v_i, v_j)_N; \quad i, j = 1, \ldots, r$$

und fassen wir diese Zahlen als Elemente von zwei Matrizen $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ auf, sind A und B symmetrisch und A ist positiv definit. Dem natürlichen Eigenwertproblem wird als finites Problem die Matrizeneigenwertaufgabe

$$(4) \qquad (A - \Lambda B)\, d = 0$$

zugeordnet. Λ bezeichnet einen Zahlparameter und d einen Spaltenvektor, dessen Komponenten die $d_1, \ldots, d_r$ aus (1) *sind. Das finite Matrizeneigenwertproblem besitzt genau r positive Eigenwerte Λ_i, die wir uns in der Form*

$$0 < \Lambda_1 \leqslant \Lambda_2 \leqslant \ldots \leqslant \Lambda_r$$

angeordnet denken.

Beweis. Die Symmetrie der Matrizen A und B folgt sofort wegen der bei eigentlich definiten Aufgaben gültigen Selbstadjungiertheit aus dem Bildungsgesetz (3) ihrer Elemente. Weiter gilt mit (1) und (3)

$$(5) \qquad (u, u)_M = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} d_i d_j (v_i, v_j)_M = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} d_i d_j,$$

$$(6) \qquad (u, u)_N = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} d_i d_j.$$

Wegen der eigentlichen Definitheit besitzt die durch die Matrix A vermittelte quadratische Form (5) nur positive Werte, wenn nicht sämtliche d_i verschwinden. A ist also eine positiv definite Matrix. Ist die Aufgabe volldefinit in Z, folgt aus (6) auch sofort die positive Definitheit von B. Dann ist die Existenz von r positiven Eigenwerten des Matrizeneigenwertproblems (4) gesichert. Um dieses Ergebnis auch für Aufgaben zu gewinnen, die nicht volldefinit in Z sind, können wir uns die Ansatzfunktionen in (1) entsprechend der Gleichung

$$(7) \qquad (v_i, v_j)_N = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

orthonormiert denken. Denn wie bei Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen läßt sich beweisen: Genügt das System der Ansatzfunktionen nicht (7), kann es mittels einer linearen Transformation in ein solches übergeführt werden, das (7) und auch (2) erfüllt und dieselben Eigenwerte wie (4) liefert. Wegen (7) ist die Matrix B positiv definit und das Eigenwertproblem (4) muß genau r positive Eigenwerte besitzen.

Wir bestimmen nun die d_i so, daß $R(u)$ in G zu einem Extremum wird. Dabei denken wir uns die Ansatzfunktionen im Sinne von (7) orthonormiert. Als notwendige Bedingung für ein Extremum ergibt sich

$$\frac{\partial R(u)}{\partial d_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, r,$$

wofür wir

$$(u, u)_N \frac{\partial}{\partial d_i}(u, u)_M - (u, u)_M \frac{\partial}{\partial d_i}(u, u)_N = 0$$

schreiben können. Bezeichnen wir den Wert von $R(u)$ an der Extremalstelle mit Λ und beachten wir (5), (6), finden wir die Galerkinschen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{r} d_i(a_{ij} - \Lambda b_{ij}) = 0, \qquad i = 1, \ldots, r. \tag{8}$$

Wir können (8) jetzt auch für Ansatzfunktionen bilden, die nicht im Sinne von (7) orthonormiert sind. Die Galerkinschen Gleichungen besitzen formal dasselbe Aussehen wie bei Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen, nur daß die Zahlen a_{ij}, b_{ij} mittels der natürlichen Produktbildungen bestimmt werden. (8) entspricht dem Matrizeneigenwertproblem (4). Die Eigenwerte von (4) sehen wir als Näherungswerte für die ersten r positiven Eigenwerte des natürlichen Eigenwertproblems an.

SATZ 2. *Ist das natürliche Eigenwertproblem eigentlich definit in Z, genügen weiterhin die Ansatzfunktionen in* (1) *der Ungleichung*

$$(v_i, v_i)_N < 0, \qquad i = 1, \ldots, r$$

— diese Wahl ist sicher möglich, wenn es mindestens r negative Eigenwerte gibt — und bestimmen wir Zahlen a_{ij}, b_{ij} wie in (3), *sind die durch sie bestimmten Matrizen A und B symmetrisch und A ist positiv definit. Dem natürlichen Eigenwertproblem wird wieder das finite Problem* (4) *zugeordnet, das genau r negative Eigenwerte besitzt, die wir uns in der Form*

$$0 > \Lambda_{-1} \geqslant \Lambda_{-2} \geqslant \ldots \geqslant \Lambda_{-r}$$

angeordnet denken.

Der Beweis des Satzes ergibt sich wie oben, wenn an Stelle von (7) die Orthonormierung

$$(9) \qquad (v_i, v_j)_N = \begin{cases} -1 & \text{für} \quad i = j, \\ 0 & \text{für} \quad i \neq j \end{cases}$$

verwendet wird.

2. Beurteilung der Ritzschen Näherungswerte.

Satz 3. *Ist das Eigenwertproblem eigentlich definit in Z und werden die Eigenwerte des natürlichen Eigenwertproblems in einer Folge*

$$\ldots \leqslant \lambda_{-2} \leqslant \lambda_{-1} < 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$$

angeordnet, in der jeder Eigenwert seiner Vielfachheit entsprechend oft gezählt wird, gelten für die durch das Ritz-Galerkinsche Verfahren gelieferten Näherungswerte die Ungleichungen

$$(10) \qquad \lambda_i \leqslant \Lambda_i, \quad \lambda_{-i} \geqslant \Lambda_{-i}, \quad i = 1, \ldots, r.$$

Die Eigenwerte des finiten Problems werden dabei im Sinne von Satz 1 *und* 2 *angeordnet.*

Beweis. Ist das Eigenwertproblem nicht volldefinit in Z, denken wir uns zur Beurteilung der erhaltenen Ritzschen Näherungswerte die Ansatzfunktionen im Sinne des Beweises von Satz 1 entsprechend (7) bzw. (9) orthonormiert.

Für einen r-dimensionalen Spaltenvektor d erklären wir durch die Gleichungen

$$d'Ad = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} a_{ij} d_i d_j, \qquad d'Bd = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} b_{ij} d_i d_j$$

zwei Skalarprodukte im Raum der Spaltenvektoren und durch

$$R(d) = \frac{d'Ad}{d'Bd}$$

einen Rayleighschen Quotient. Dann gilt wegen (5), (6)

$$(u, u)_M = d'Ad, \qquad (u, u)_N = d'Bd, \qquad R(u) = R(d),$$

wenn $u(x)$ mittels (1) durch den Vektor d bestimmt wird. Es ist $\Lambda_1 = \operatorname{Min} R(d)$ für alle Vektoren d, die nicht gleich dem Nullvektor sind, und damit $\Lambda_1 = \operatorname{Min} R(u)$ für alle zulässigen Funktionen $u(x)$ aus G. Wegen (7) ist $(u, u)_N > 0$ und nach dem Rayleighschen Prinzip gilt

$$\lambda_1 = \operatorname*{Min}_{\substack{u \in Z \\ (u,u)_N > 0}} R(u) \leqslant \operatorname*{Min}_{u \in G} R(u) = \Lambda_1.$$

Für die höheren Ritzschen Näherungswerte ergibt sich diese Aussage mittels des Courantschen Prinzips. $w_1(x), \ldots, w_{i-1}(x)$ bezeichnet ein beliebiges System $2n$-mal im Grundintervall stetig differenzierbarer Funktionen, die am Rande auch die Bildung $R_j^N(w_\varrho)$ gestatten. Wir bestimmen Zahl $w_\varrho^{(j)}$ entsprechend der Gleichung

$$w_\varrho^{(j)} = \int_a^b v_j(x) N w_\varrho(x)\, dx - \mathfrak{R}^N(w_\varrho)\mathfrak{x}(v_j), \qquad \varrho = 1, \ldots, i-1,\; j = 1, \ldots, r\,.$$

Die Zahlen $w_\varrho^{(1)}, \ldots, w_\varrho^{(r)}$ fassen wir als Komponenten eines Spaltenvektors w_ϱ auf. Es ist mit (1)

$$\int_a^b u(x) N w_\varrho(x)\, dx - \mathfrak{R}^N(w_\varrho)\mathfrak{x}(u) = \sum_{j=1}^{r} d_j \left\{ \int_a^b v_j(x) N w_\varrho(x)\, dx - \mathfrak{R}^N(w_\varrho)\mathfrak{x}(v_j) \right\}$$
$$= \sum_{j=1}^{r} d_j w_\varrho^{(j)} = d' w_\varrho\,.$$

Genügt also ein Spaltenvektor d der Orthogonalitätsgleichung

(11) $$d' w_\varrho = 0, \qquad \varrho = 1, \ldots, i-1\,,$$

muß auch für die durch diesen Vektor mittels (1) gebildete Funktion $u(x)$

(12) $$\int_a^b u(x) N w_\varrho(x)\, dx - \mathfrak{R}^N(w_\varrho)\mathfrak{x}(u) = 0, \qquad \varrho = 1, \ldots, i-1$$

gelten. Dann folgt aus dem Courantschen Prinzip für das natürliche Eigenwertproblem und das finite Problem

$$\Lambda_i \geqslant \underset{\substack{d \neq 0 \\ d \text{ genügt (11)}}}{\underline{\mathrm{fin}}}\; R(d) = \underset{\substack{u \in G \\ u \text{ genügt (12)}}}{\underline{\mathrm{fin}}}\; R(u) \geqslant \underset{\substack{u \in Z \\ (u,u)_N > 0 \\ u \text{ genügt (12)}}}{\underline{\mathrm{fin}}}\; R(u) = m\big(w_1(x), \ldots, w_{i-1}(x)\big)\,.$$

Daraus ergibt sich der erste Teil der Behauptung (10) und entsprechend die Aussage über die negativen Eigenwerte.

3. Konvergenz des Ritz-Galerkinschen Verfahrens. Es ist klar, daß sich durch Hinzunahme weiterer Ansatzfunktionen in (1) die Näherungswerte nicht verschlechtern können, weil die Gesamtheit der zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen vergrößert wird. Offen bleibt die Frage, ob mit wachsendem r die Näherungswerte gegen die zu bestimmenden Eigenwerte konvergieren. Es ist leicht zu begründen, daß diese Frage nicht für jedes System von Ansatzfunktionen bejaht werden kann. Wählen wir jedoch die Ansatzfunktionen aus einem relativ vollständigen Funktionensystem (2), ist die Konvergenz des Ritz-Galerkinschen Verfahrens gesichert. Da sich gegenüber den Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen keine neuen Momente ergeben, kann

(2) Vergleiche dazu etwa [2] und die dort zitierte Literatur.

der Beweis übergangen werden. Ebenso wollen wir nicht auf das wesentlich schwierigere Problem eingehen, ob auch Konvergenz gegen die Eigenfunktionen vorliegt.

4. Beispiel. Wir betrachten das Demonstrationsbeispiel

$$-y''-\lambda y = 0\,,$$
$$y(1) = 0\,, \qquad y'(0) = -\lambda y(0)\,.$$

In [1] ermittelten wir die natürlichen Skalarprodukte. Die Zahlen a_{ij}, b_{ij} bestimmen sich aus den Gleichungen

$$a_{ij} = \int_0^1 v_i'(x)\, v_j'(x)\, dx\,, \qquad b_{ij} = \int_0^1 v_i(x)\, v_j(x)\, dx + v_i(0)\, v_j(0)\,.$$

Es ist leicht zu bestätigen, daß die Aufgabe volldefinit in Z ist. Wir wollen einen zweigliedrigen Ritz-Galerkinschen Ansatz durchführen und wählen mit Rücksicht auf eine einfache und übersichtliche Rechnung die Ansatzfunktionen

$$v_1(x) = x-1\,, \qquad v_2(x) = -x^2+2x-1.$$

Sie sind offenbar Funktionen aus Z. Wegen der Volldefinitheit gilt natürlich $(v_i, v_i)_N > 0$. Für die Matrizen A und B finden wir

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{5}{4} \\ \frac{5}{4} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}.$$

Der zweigliedrige Ritz-Galerkinsche Ansatz führt zu den Näherungswerten

$$\Lambda_1 = \tfrac{20}{27} = 0{,}741\,, \qquad \Lambda_2 = 12\,.$$

Ein eingliedriger Ansatz würde mit $v_1(x)$ als Ansatzfunktion den Näherungswert $\Lambda_1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$ ergeben und mit $v_2(x)$ zu $\Lambda_1 = \frac{10}{9} = 1{,}12$ führen. $v_1(x)$ ist also die bessere Ansatzfunktion, da sie einen kleineren Näherungswert liefert.

Das in [1] entwickelte Vorgehen hat uns mühelos in die Lage versetzt, die für Aufgaben mit Kamkeschen Randbedingungen bekannten Aussagen über das Ritz-Galerkinsche Verfahren auf natürliche Eigenwertprobleme auszudehnen.

Literaturverzeichnis

[1] W. Dück, *Variationsprinzipien bei natürlichen Eigenwertproblemen*, Ann. Polon. Math. 17 (1965), S. 79-115.

[2] L. W. Kantorowitsch und W. I. Krylov, *Näherungsmethoden der höheren Analysis*, Berlin 1956.

Reçu par la Rédaction le 3. 9. 1964