ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXII (1969)

Sur un système d'équations différentielles avec dérivée à gauche

K. ZIMA (Katowice)

1. Introduction. Soit D un sous-ensemble de l'espace euclidien à $n+1$ dimensions, défini comme il suit:

$$(1)\qquad D = \{(t, x_1, x_2, \dots, x_n):\ t \in \langle 0, a), -\infty < x_i < +\infty,\ i = 1, 2, \dots, n,\ 0 < a \leqslant +\infty\}.$$

Supposons données les fonctions f_i, β_{ij} et φ_i, satisfaisant aux conditions suivantes:

1° Les fonctions $f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont définies et continues dans l'ensemble D.

2° Les fonctions $\beta_{ij}(t)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, sont définies et bornées dans l'intervalle $\langle 0, a)$, continues à gauche dans le sous-intervalle $(0, a)$ et, de plus, $\beta_{ij}(t) \leqslant t$ pour $t \in \langle 0, a)$.

3° Les fonctions $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, sont définies et continues dans l'intervalle $\langle p, 0\rangle$, où $p = \min\limits_{i,j} \{\inf\limits_{t} \beta_{ij}(t)\}$.

Dans ce travail nous étudions le système d'équations différentielles

$$(2)\qquad \begin{aligned} & y_i(t) = \varphi_i(t) \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle,\ i = 1, 2, \dots, n, \\ & \big(y_i(t)\big)'_- = f_i\Big(t, y_1\big(\beta_{i1}(t)\big), y_2\big(\beta_{i2}(t)\big), \dots, y_n\big(\beta_{in}(t)\big)\Big), \\ & \qquad\qquad t \in (0, a),\ i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Par *solution* du système (2) dans l'intervalle $\langle 0, \alpha)$, $0 < \alpha \leqslant a$, nous entendrons une suite de n fonctions $\{y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)\}$ continues dans l'intervalle $\langle p, \alpha)$, qui se confondent pour $t \in \langle p, 0\rangle$ avec les fonctions initiales $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_n(t)$, sont absolument continues dans l'intervalle $\langle 0, \alpha)$, admettent une dérivée à gauche en tout point de l'intervalle $(0, \alpha)$ et satisfont dans celui-ci à la seconde des conditions (2).

Pour le système (2) nous établirons un théorème sur l'existence locale d'une solution, un théorème sur l'existence des solutions supérieure et inférieure, enfin des théorèmes sur certaines inégalités différentielles.

Ces théorèmes, ainsi que leurs démonstrations sont inspirés par des théorèmes correspondants contenus dans la monographie [1] et relatifs au cas $\beta_{ij}(t) \equiv t$. Des théorèmes semblables, démontrés en supposant continue la fonction $\beta_{ij}(t)$ ont été établis dans le travail [2].

Les systèmes d'équations différentielles de la forme (2) à retard $\beta_{ij}(t)$ continu à gauche trouvent des applications dans la théorie des équations aux dérivées partielles. En effet, en s'appuyant sur la méthode de Szarski [1], on peut montrer que certains problèmes concernant les équations différentielles aux dérivées partielles à argument fonctionne se ramènent à l'étude des équations différentielles avec dérivée à gauche.

2. Théorème sur l'existence locale d'une solution du système (2). Ayant en vue les raisonnements ultérieurs et les théorèmes que nous nous proposons d'établir, il y aura avantage à démontrer le théorème non pas directement pour le système (2), mais pour le système „perturbé"

$$(2^*)\qquad \begin{aligned} &y_i(t) = \varphi_i(t) + \gamma_i\,, \qquad t \in \langle p, 0\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,,\\ &\big(y_i(t)\big)'_- = f_i\big(t, y_1(\beta_{i1}(t)), y_2(\beta_{i2}(t)), \ldots, y_n(\beta_{in}(t))\big) + \delta_i\,,\\ &\hspace{16em} t \in (0, a)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ et $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ sont des nombres réels, pour le moment quelconques.

THÉORÈME 1. *Pour tout couple de nombres $\varepsilon \geqslant 0$ et $\delta \geqslant 0$ il existe un nombre $h > 0$ tel que, si les nombres $\tilde{\gamma}_i$ et $\tilde{\delta}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, satisfont à la condition $|\tilde{\delta}_i| \leqslant \delta$, $|\tilde{\gamma}_i| \leqslant \varepsilon$, le système d'équations*

$$(\tilde{2})\qquad \begin{aligned} &y_i(t) = \varphi_i(t) + \tilde{\gamma}_i\,, \qquad t \in \langle p, 0\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,,\\ &\big(y_i(t)\big)'_- = f_i\big(t, y_1(\beta_{i1}(t)), y_2(\beta_{i2}(t)), \ldots, y_n(\beta_{in}(t))\big) + \tilde{\delta}_i\,,\\ &\hspace{16em} t \in (0, a)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \end{aligned}$$

admet une solution dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$.

Dans la démonstration du théorème 1 nous utiliserons les deux simples lemmes suivants.

LEMME 1. *Une fonction $\varphi(t)$ continue à gauche dans l'intervalle $(0, T\rangle$ y est mesurable au sens de Lebesgue.*

Démonstration. Soit $E_a = \{t \in (0, T\rangle : \varphi(t) < a\}$, où a est un nombre réel quelconque. Comme la fonction $\varphi(t)$ est continue à gauche, il existe aussi, lorsque $t_0 \in E_a$ (c'est-à-dire $\varphi(t_0) < a$), un intervalle fermé $\langle \tau, t_0\rangle$, $\tau < t_0$, contenu dans l'ensemble E_a. Il s'ensuit que l'ensemble E_a peut être recouvert au sens de Vitali par des intervalles fermés. En vertu du théorème de Vitali, il existe donc une suite finie ou dénombrable d'intervalles fermés $\Delta_i = \langle \tau_i, t_i \rangle$ tels que

$$(*) \qquad m(E_a \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \Delta_i) = 0\,, \qquad r \leqslant +\infty\,.$$

D'autre part, pour tout i on a $\Delta_i \subset E_a$, donc $\bigcup_{i=1}^{r} \Delta_i \subset E_a$. On peut donc représenter l'ensemble E_a sous la forme

$$(**) \qquad E_a = (\bigcup_{i=1}^{r} \Delta_i) \cup (E_a \setminus \bigcup_{i=1}^{r} \Delta_i)\,.$$

Les égalités $(*)$ et $(**)$ prouvent que l'ensemble E_a est mesurable et la démonstration du lemme 1 est achevée.

LEMME 2. *Si la fonction $\varphi(t)$ est bornée dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$ et continue à gauche, la fonction $\Phi(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds$ admet en tout point de l'intervalle $(0, T\rangle$ une dérivée à gauche et on a l'égalité*

$$(3) \qquad \Phi'_-(t) = \varphi(t) \qquad \textit{pour } t \in (0, T\rangle\,.$$

Démonstration. Il résulte du lemme 1 que la fonction $\varphi(t)$ est mesurable dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$. Etant bornée par hypothèse, elle est sommable dans l'intervalle $\langle 0, T \rangle$. Soit $t_0 \in (0, T\rangle$, $h < 0$, $t_0 + h \in (0, T\rangle$. En vertu d'une propriété élémentaire de l'intégrale de Lebesgue on a l'inégalité

$$(4) \qquad \inf_{\langle t_0+h, t_0 \rangle} \{\varphi(t)\} \leqslant \frac{\Phi(t_0+h) - \Phi(t_0)}{h} \leqslant \sup_{\langle t_0+h, t_0 \rangle} \{\varphi(t)\}\,, \qquad h < 0\,.$$

En tenant compte de l'inégalité (4) et du fait que la fonction $\varphi(t)$ est continue à gauche au point t_0, on obtient l'égalité $\Phi'_-(t_0) = \varphi(t_0)$. La démonstration du lemme 2 est ainsi achevée.

Passons maintenant à la démonstration du théorème 1. Les fonctions $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, étant, par hypothèse, continues dans l'intervalle $\langle p, 0 \rangle$, il existe un nombre $K > 0$ tel que

$$(5) \qquad |\varphi_i(t) - \varphi_i(0)| < K \qquad \text{pour } t \in \langle p, 0 \rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Soit a^* un nombre fixé de l'intervalle $(0, a)$. Considérons l'ensemble $Q \subset D$ défini par

$$(6) \qquad Q = \{(t, x_1, x_2, \ldots, x_n):\ 0 \leqslant t \leqslant a^*,\ |x_i - \varphi_i(0)| \leqslant K + \varepsilon\,, \\ i = 1, 2, \ldots, n\}\,.$$

Comme les fonctions f_i sont continues, il existe une constante $M > 0$ telle que

$$(7) \qquad |f_i(t, x_1, x_2, \ldots, x_n)| < M \qquad \text{pour } (t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \in Q\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Posons par définition

$$h = \min\left(a^*, \frac{K+\varepsilon}{M+\delta}\right) \quad \text{et} \quad \theta_\nu(t) = \frac{h}{\nu}\left[\frac{\nu}{h}t\right],$$

$\nu = 1, 2, \ldots$, où le symbole $[x]$ désigne la valeur entière du nombre x. Evidemment $\theta_\nu(t) \leqslant t$. Posons encore $\widetilde{\varphi}_i(t) = \varphi_i(t) + \widetilde{\gamma}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Considérons maintenant la suite de systèmes d'équations intégrales

$$(8) \qquad y_i(t) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_i(t)\,, & t \in \langle p, 0\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \\ \widetilde{\varphi}_i(0) + \int\limits_0^t \Big\{f_i\Big(\theta_\nu(s), y_1\big(\beta_{i1}(\theta_\nu(s))\big), \ldots, y_n\big(\beta_{in}(\theta_\nu(s))\big)\Big) + \delta_i\Big\}\,ds\,, & \\ \qquad\qquad t \in \langle 0, h\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, & \end{cases}$$

avec $\nu = 1, 2, \ldots$

La fonction $\theta_\nu(t)$ est constante sur les intervalles $\left\langle 0, \frac{h}{\nu}\right)$, $\left\langle \frac{h}{\nu}, \frac{2h}{\nu}\right)$, ..., $\left\langle \frac{\nu-1}{\nu}h, h\right)$, donc les fonctions $f_i\Big(\theta_\nu(s), y_1\big(\beta_{i1}(\theta_\nu(s))\big), \ldots, y_n\big(\beta_{in}(\theta_\nu(s))\big)\Big)$ sous le signe somme sont constantes sur les intervalles. Il en résulte que le système (8) admet une solution dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ pour tout ν naturel. (Cette solution est une "ligne polygonale d'Euler" pour le système (2*).) Par conséquent, le système (8) définit une suite infinie $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$, dont le μ-ième terme $\{y_1^\mu(t), y_2^\mu(t), \ldots, y_n^\mu(t)\}$ est une solution de ce système pour $\nu = \mu$. On voit aisément que les fonctions $y_i^\nu(t)$ satisfont à l'inégalité

$$(9) \qquad -(M+\delta)t < y_i^\nu(t) - \widetilde{\varphi}_i(0) < (M+\delta)t\,, \qquad t \in \langle 0, h\rangle\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, 3, \ldots$$

Cette inégalité signifie que la suite $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Les fonctions $y_i^\nu(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et $\nu = 1, 2, 3, \ldots$, sont équicontinues dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, car elles y satisfont à l'inégalité de Lipschitz avec la constante $M+\delta$. Il s'ensuit que la suite $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)\}_{\nu=1}^{\infty}$ contient une suite partielle uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Pour ne pas introduire de doubles indices, supposons que la suite précédente soit uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$.

Admettons donc que $\widetilde{y}_i(t) = \lim\limits_{\nu\to\infty} y_i^\nu(t)$, $t \in \langle 0, h\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Les fonctions $\widetilde{y}_1(t), \widetilde{y}_2(t), \ldots, \widetilde{y}_n(t)$ sont absolument continues dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, car elles satisfont à la condition de Lipschitz avec la constante $M+\delta$. D'autre part, l'inégalité évidente

$$t - \frac{h}{\nu} \leqslant \frac{h}{\nu}\left[\frac{\nu}{h}t\right] \leqslant t\,, \qquad \nu = 1, 2, \ldots,$$

prouve que $\lim_{\nu\to\infty}\theta_\nu(t) = t$. Comme $\theta_\nu(t) \leqslant t$, la suite $\{\theta_\nu(t)\}$ tend vers t en restant inférieure à t. Donc $\lim_{\nu\to\infty} \beta_{ij}\big(\theta_\nu(t)\big) = \beta_{ij}(t)$. En tenant encore compte de l'inégalité

$$\begin{aligned}\Big|y_i^\nu\big(\beta_{ij}(\theta_\nu(t))\big) - \widetilde{y}_i\big(\beta_{ij}(t)\big)\Big| &\leqslant \Big|y_i^\nu\big(\beta_{ij}(\theta_\nu(t))\big) - y_i^\nu\big(\beta_{ij}(t)\big)\Big| + \Big|y_i^\nu\big(\beta_{ij}(t)\big) - \widetilde{y}_i\big(\beta_{ij}(t)\big)\Big| \\ &\leqslant (M+\delta)\Big|\beta_{ij}\big(\theta_\nu(t)\big) - \beta_{ij}(t)\Big| + \Big|y_i^\nu\big(\beta_{ij}(t)\big) - \widetilde{y}_i\big(\beta_{ij}(t)\big)\Big| ,\end{aligned}$$

du fait que la fonction f_i est continue dans Q et que pour $t \in \langle p, 0\rangle$ on a $y_i^\nu(t) = \widetilde{\varphi}_i(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots$ et $i = 1, 2, \ldots, n$, il vient pour $t \in \langle 0, h\rangle$

$$\text{(10)} \quad \begin{aligned}&\lim_{\nu\to\infty} f_i\Big(\theta_\nu(t), y_1^\nu\big(\beta_{i1}(\theta_\nu(t))\big), \ldots, y_n\big(\beta_{in}(\theta_\nu(t))\big)\Big) \\ &\qquad = f_i\Big(t, \widetilde{y}_1\big(\beta_{i1}(t)\big), \ldots, \widetilde{y}_n\big(\beta_{in}(t)\big)\Big) , \qquad i = 1, 2, \ldots, n .\end{aligned}$$

Les fonctions $\Phi_i(t) = f_i\Big(t, \widetilde{y}_1\big(\beta_{i1}(t)\big), \ldots, \widetilde{y}_n\big(\beta_{in}(t)\big)\Big)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont bornées dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et continues à gauche, donc elles sont sommables (v. lemme 1). En vertu du théorème de Lebesgue sur le passage à la limite sous le signe intégrale de Lebesgue, on peut donc passer à la limite avec ν dans l'égalité

$$\text{(11)} \quad \begin{aligned}y_i^\nu(t) = \widetilde{\varphi}_i(0) + \int_0^t \Big\{f_i\Big(\theta_\nu(s), y_1^\nu\big(\beta_{i1}(\theta_\nu(s))\big), \ldots, y_n^\nu\big(\beta_{in}(\theta_\nu(s))\big) + \widetilde{\delta}_i\Big)\Big\} ds , \\ t \in \langle 0, h\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n ,\end{aligned}$$

d'où

$$\text{(12)} \quad \begin{aligned}\widetilde{y}_i(t) = \widetilde{\varphi}_i(0) + \int_0^t \Big\{f_i\Big(s, \widetilde{y}_1\big(\beta_{i1}(s)\big), \ldots, \widetilde{y}_n\big(\beta_{in}(s)\big)\Big) + \widetilde{\delta}_i\Big\} ds , \\ t \in \langle 0, h\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n .\end{aligned}$$

Nous voyons donc que les fonctions

$$\text{(13)} \qquad \widetilde{z}_i(t) = \begin{cases}\widetilde{\varphi}_i(t) & \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle , \\ \widetilde{y}_i(t) & \text{pour } t \in \langle 0, h\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n ,\end{cases}$$

constituent une solution du système d'équations intégrales

$$\text{(14)} \qquad y_i(t) = \begin{cases}\widetilde{\varphi}_i(t) , \quad t \in \langle p, 0\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n , \\ \widetilde{\varphi}_i(0) + \displaystyle\int_0^t \Big\{f_i\Big(s, y_1\big(\beta_{i1}(s)\big), \ldots, y_n\big(\beta_{in}(s)\big)\Big) + \widetilde{\delta}_i\Big\} ds , \\ \qquad\qquad t \in \langle 0, h\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n .\end{cases}$$

En s'appuyant sur le lemme 2 on en déduit que les fonctions $\widetilde{z}_1(t)$, $\widetilde{z}_2(t), \ldots, \widetilde{z}_n(t)$ constituent une solution du système (2*) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Le théorème 1 se trouve ainsi établi.

Remarque 1. Il résulte du théorème 1 que dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ il existe une solution du système (2). Il suffit de poser dans le théorème 1 $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\delta}_i = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$.

Remarque 2. Dans la classe des fonctions absolument continues le système d'équations différentielles (2) et le système d'équations intégrales (14) sont équivalents.

3. Deux théorèmes sur des inégalités différentielles fortes. Nous admettrons ici que le système considéré (2) vérifie, outre les conditions 1°-3°, la condition de „monotonie" suivante:

4° Si $\bar{x}_1 \leqslant \bar{\bar{x}}_1$, $\bar{x}_2 \leqslant \bar{\bar{x}}_2$, ..., $\bar{x}_n \leqslant \bar{\bar{x}}_n$, on a $f_i(t, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) \leqslant f_i(t, \bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n)$ pour $t \in \langle 0, a)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Sous les hypothèses 1°-4° nous établirons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Supposons que la suite de fonctions* $\{y_1(t), y_2(t), \ldots \ldots, y_n(t)\}$ *soit une solution du système* (2*) *dans l'intervalle* $\langle 0, a)$. *Supposons encore définies dans l'intervalle* $\langle p, a)$ *les fonctions continues* $z_1(t), z_2(t), \ldots \ldots, z_n(t)$ *satisfaisant aux inégalités*

$$z_i(t) < \varphi_i(t) + \gamma_i \quad \textit{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n, \tag{15}$$

$$D_- z_i(t) < f_i\big(t, z_1(\beta_{i1}(t)), z_2(\beta_{i2}(t)), \ldots, z_n(\beta_{in}(t))\big) + \delta_i \quad \textit{pour } t \in (0, a), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{16}$$

Dans ces conditions on a l'inégalité

$$z_i(t) < y_i(t) \quad \textit{pour } t \in (0, a), \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{17}$$

Démonstration. L'inégalité (15) entraîne $z_i(0) < y_i(0) = \varphi_i(0) + \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. L'inégalité $z_i(t) < y_i(t)$ est vérifiée, par continuité, dans un intervalle $\langle 0, \eta_i)$, $\eta_i > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Soit $\tilde{\eta}_i$ la borne supérieure des nombres $\eta_i > 0$ pour lesquels l'inégalité $z_i(t) < y_i(t)$ est vérifiée dans l'intervalle $\langle 0, \eta_i)$, et posons $\tau = \min(\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2, \ldots, \tilde{\eta}_n)$. Evidemment $\tau > 0$ et $z_i(t) < y_i(t)$ pour $t < \tau$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Nous allons montrer que $\tau = a$. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que $\tau < a$. On aurait donc $z_i(t) \leqslant y_i(t)$ pour $t \leqslant \tau$, $i = 1, 2, \ldots, n$ et il existerait un indice j, $1 \leqslant j \leqslant n$ tel que $z_j(\tau) = y_j(\tau)$. Alors on obtient pour le point τ et l'indice j, en vertu de 4°, (15) et (16), l'inégalité

$$D_- z_j(\tau) < f_j\big(\tau, z_1(\beta_{j1}(\tau)), \ldots, z_n(\beta_{jn}(\tau))\big) + \delta_j \leqslant$$
$$\leqslant f_j\big(\tau, y_1(\beta_{j1}(\tau)), \ldots, y_n(\beta_{jn}(\tau))\big) + \delta_j = \big(y_j(\tau)\big)'_-,$$

d'où il résulte l'inégalité

$$D_- z_j(\tau) < \big(y_j(\tau)\big)'_-. \tag{18}$$

D'autre part, pour $t < \tau$, on a $z_j(t) < y_j(t)$ et $z_j(\tau) = y_j(\tau)$, d'où l'inégalité

$$\frac{z_j(t)-z_j(\tau)}{t-\tau} > \frac{y_j(t)-y_j(\tau)}{t-\tau} \quad \text{pour } t < \tau\,,$$

qui donne, à la limite,

$$D_- z_j(\tau) \geqslant D_- y_j(\tau) = \big(y_j(\tau)\big)'_-\,. \tag{19}$$

Les inégalités (19) et (18) se contredisent, ce qui prouve que $\tau = a$ et la démonstration du théorème 2 est ainsi achevée.

THÉORÈME 3. *Soit* $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ *une solution du système* (2*) *dans l'intervalle* $\langle 0, a)$. *Supposons encore définies dans l'intervalle* $\langle p, a)$ *les fonctions continues* $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$ *satisfaisant aux inégalités*

$$z_i(t) > \varphi_i(t)+\gamma_i\,, \qquad t \in \langle p, 0\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{20}$$

$$D_- z_i(t) > f_i\Big(t, z_1\big(\beta_{i1}(t)\big), z_2\big(\beta_{i2}(t)\big), \ldots, z_n\big(\beta_{in}(t)\big)\Big)+\delta_i\,, \qquad t \in (0, a)\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{21}$$

Dans ces conditions on a dans l'intervalle $(0, a)$ *l'inégalité*

$$z_i(t) > y_i(t)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{22}$$

La démonstration du théorème 3 est analogue à celle du théorème 2.

4. Solutions supérieure et inférieure du système (2). Nous établirons maintenant le

THÉORÈME 4. *Sous les hypothèses* 1°-4° *le système d'équations* (2) *admet au moins localement une solution supérieure et une solution inférieure.*

Démonstration de l'existence d'une solution supérieure. En vertu du théorème 1 il existe, pour $\varepsilon = \delta = 1$, un nombre $h > 0$ tel que le système d'équations

$$\begin{aligned} &y_i(t) = \varphi_i(t)+\frac{1}{\nu}\,, \qquad t \in \langle p, 0\rangle\,,\ i = 1, 2, \ldots, n\,, \\ &\big(y_i(t)\big)'_- = f_i\Big(t, y_1\big(\beta_{i1}(t)\big), y_2\big(\beta_{i2}(t)\big), \ldots, y_n\big(\beta_{in}(t)\big)\Big)+\frac{1}{\nu}\,, \qquad t \in (0, a)\,, \end{aligned} \tag{23}$$

admet une solution dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ pour $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ D'après la remarque 1 sur le théorème 1 il existe dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ une solution du système d'équations (2). Soit $\{y_1^*(t), y_2^*(t), \ldots, y_n^*(t)\}$ une solution quelconque du système (2) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Les fonctions $y_1^*(t)$, $y_2^*(t), \ldots, y_n^*(t)$ satisfont aux inégalités

$$(24)\qquad y_i^*(t) < \varphi_i(t)+\frac{1}{\nu} \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(25)\qquad D_-y_i^*(t) < f_i\big(t, y_1^*(\beta_{i1}(t)), y_2^*(\beta_{i2}(t)), \ldots, y_n^*(\beta_{in}(t))\big)+\frac{1}{\nu}, \qquad t \in (0, h\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

En vertu du théorème 2 les inégalités (24) et (25) entraînent les suivantes

$$(26)\qquad y_i^*(t) < y_i^\nu(t),\quad t \in \langle 0, h\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \nu = 1, 2, \ldots,$$

où $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)\}$ est une solution du système d'équations (23) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. En vertu du même théorème on a aussi l'inégalité

$$(27)\qquad y_i^{\nu+1}(t) < y_i^\nu(t),\quad t \in \langle 0, h\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n,\ \nu = 1, 2, \ldots$$

Par conséquent, les suites $\{y_i^\nu(t)\}_{\nu=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sont décroissantes dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$ et bornées inférieurement, par exemple par les fonctions $y_i^*(t)$. De plus, les fonctions $y_i^\nu(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $\nu = 1, 2, \ldots$, satisfont à la condition de Lipschitz avec la constante $M+1$. La convergence des suites $\{y_i^\nu(t)\}_{\nu=1}^\infty$, $i = 1, 2, \ldots, n$, est donc uniforme dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Soit $\tilde{y}_i(t) = \lim_{\nu\to\infty} y_i^\nu(t)$, $t \in \langle 0, h\rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Evidemment, les fonctions $\tilde{y}_i(t)$ sont absolument continues dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. Nous allons montrer que les fonctions

$$(28)\qquad \bar{y}_i(t) = \begin{cases} \varphi_i(t) & \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n, \\ \tilde{y}_i(t) & \text{pour } t \in \langle 0, h\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

vérifient le système d'équations (2) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. En effet, les fonctions $y_i^\nu(t)$ satisfont à l'identité

$$(29)\qquad \begin{aligned} y_i^\nu(t) &= \varphi_i(t)+\frac{1}{\nu} \quad \text{pour } t \in \langle p, 0\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n, \\ y_i^\nu(t) &= \varphi_i(0)+\frac{1}{\nu}+\int_0^t \Big\{f_i\big(s, y_1^\nu(\beta_{i1}(s)), \ldots, y_n^\nu(\beta_{in}(s))\big)+\frac{1}{\nu}\Big\}ds, \quad t \in \langle 0, h\rangle. \end{aligned}$$

En passant à la limite dans (29) et en tenant compte de la remarque 2 sur le théorème 1, on constate que les fonctions (28) sont une solution du système (2) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$. À cause de l'inégalité $y_i^*(t) < y_i^\nu(t)$, $\nu = 1, 2, \ldots$, on a

$$(30)\qquad y_i^*(t) \leqslant \bar{y}_i(t) \quad \text{pour } t \in \langle 0, h\rangle,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Comme $\{y_1^*(t), \ldots, y_n^*(t)\}$ est une solution quelconque du système (2) dans l'intervalle $\langle 0, h\rangle$, on trouve, en tenant compte des inégalités (30), que $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t)\}$ est une solution supérieure du système (2) dans cet intervalle.

En prenant, au lieu du système (23), le système

$$(31)\quad \begin{aligned} &y_i(t) = \varphi_i(t) - \frac{1}{\nu}, \qquad t \in \langle p, 0\rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n, \\ &\big(y_i(t)\big)'_- = f_i\big(t, y_1(\beta_{i1}(t)), \ldots, y_n(\beta_{in}(t))\big) - \frac{1}{\nu}, \qquad t \in (0, a), \; i = 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

et en procédant de même que dans la démonstration du théorème précédent, on établit l'existence d'une solution inférieure du système d'équations (2).

5. Théorèmes sur quelques inégalités différentielles faibles. Dans ce paragraphe nous démontrerons des théorèmes analogues au théorème 2 en y remplaçant les inégalités fortes par des inégalités faibles et une intégrale quelconque $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ du système (2) par l'intégrale supérieure (inférieure) de ce système.

THÉORÈME 5. *Soit $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t)\}$ la solution supérieure du système* (2) *dans l'intervalle $\langle 0, a)$. Admettons que les fonctions $z_1(t), z_2(t), \ldots \ldots, z_n(t)$, continues dans l'intervalle $\langle p, a)$, satisfont à l'inégalité*

$$(32)\qquad z_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \quad \textit{pour } t \in \langle p, 0\rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(33)\qquad D_- z_i(t) \leqslant f_i\big(t, z_1(\beta_{i1}(t)), z_2(\beta_{i2}(t)), \ldots, z_n(\beta_{in}(t))\big), \qquad t \in (0, a)\,.\; i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Dans ces conditions on a l'inégalité

$$(34)\qquad z_i(t) \leqslant \bar{y}_i(t) \quad \textit{pour } t \in (0, a), \; i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Démonstration. Soit $a^* \in (0, a)$, d'ailleurs quelconque. En répétant le raisonnement par lequel le lemme 10.1 a été établi (v. [1]), on prouve aisément qu'il existe un indice ν_0 tel que les solutions $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots \ldots, y_n^\nu(t)\}$ du système (23) existent dans l'intervalle $\langle 0, a^*\rangle$ pour tout $\nu > \nu_0$. Evidemment, à cause de (32) et (33), on a

$$(35)\quad z_i(t) < \varphi_i(t) + \frac{1}{\nu}, \qquad t \in \langle p, 0\rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; \nu = \nu_0+1, \nu_0+2, \ldots,$$

$$(36)\quad D_- z_i(t) < f_i\big(t, z_1(\beta_{i1}(t)), \ldots, z_n(\beta_{in}(t))\big) + \frac{1}{\nu}, \qquad t \in (0, a^*\rangle, \; \nu = \nu_0+1, \nu_0+2, \ldots$$

D'après le théorème 2, on a l'inégalité

$$(37)\quad z_i(t) < y_i^\nu(t), \qquad t \in \langle 0, a^*\rangle, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; \nu = \nu_0+1, \nu_0+2, \ldots$$

De la démonstration du théorème 4 il résulte que la suite $\{y_1^\nu(t), \ldots \ldots, y_n^\nu(t)\}_{\nu=\nu_0+1}^{\infty}$ converge dans $\langle 0, a^*\rangle$ vers la solution supérieure $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t)\}$ du système (2). On obtient ainsi, en tenant compte de (37), l'inégalité

$$z_i(t) \leqslant \bar{y}_i(t) \quad \text{pour } t \in (0, a^*\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n;$$

comme le nombre a^*, appartenant à l'intervalle $(0, a)$, est arbitrare, le théorème 5 se trouve ainsi démontré.

On établit d'une façon analogue le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Soit* $\{\bar{\bar{y}}_1(t), \bar{\bar{y}}_2(t), \ldots, \bar{\bar{y}}_n(t)\}$ *la solution inférieure du système d'équations* (2) *dans l'intervalle* $\langle 0, a)$. *Admettons que les fonctions* $z_1(t), \ldots, z_n(t)$, *continues dans l'intervalle* $\langle p, a)$, *vérifient les inégalités*

$$z_i(t) \geqslant \varphi_i(t) \quad \textit{pour } t \in \langle p, 0\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n ,$$

$$D_- z_i(t) \geqslant f_i\big(t, z_1(\beta_{i1}(t)), z_2(\beta_{i2}(t)), \ldots, z_n(\beta_{in}(t))\big), \quad t \in (0, a) , \ i = 1, 2, \ldots, n .$$

Dans ces conditions on a l'inégalité

$$z_i(t) \geqslant \bar{\bar{y}}_i(t) \quad \textit{pour } t \in (0, a) , \ i = 1, 2, \ldots, n .$$

Nous omettons la démonstration.

Dans les théorèmes 3, 4, 5 et 6 nous avons supposé qu'une inégalité différentielle était vérifiée dans tout l'intervalle $(0, a)$. Nous démontrerons maintenant un théorème sur des inégalités différentielles faibles, en admettant que l'inégalité différentielle est vérifiée dans un sous-ensemble de l'intervalle $(0, a)$. Ce théorème constituera une adaptation du théorème 11.1 ([1], p. 35) au cas du système d'équations (2).

THÉORÈME 7. *Soit* $\{\bar{y}_1(t), \bar{y}_2(t), \ldots, \bar{y}_n(t)\}$ *la solution supérieure du système d'équations* (2) *dans l'intervalle* $\langle 0, a)$. *Supposons aussi données dans l'intervalle* $\langle p, a)$ *les fonctions continues* $z_1(t), z_2(t), \ldots, z_n(t)$. *Posons* (v. [1]):

$$E_i = \{t \in (0, a) \colon z_i(t) > \bar{y}_i(t)\} , \quad i = 1, 2, \ldots, n . \tag{38}$$

Si

$$z_i(t) \leqslant \varphi_i(t) \quad \textit{pour } t \in \langle p, 0\rangle , \ i = 1, 2, \ldots, n , \tag{39}$$

$$D_- z_i(t) \leqslant f_i\big(t, z_1(\beta_{i1}(t)), \ldots, z_n(\beta_{in}(t))\big) \quad \textit{pour } t \in E_i , \ i = 1, 2, \ldots, n , \tag{40}$$

on a

$$z_i(t) \leqslant \bar{y}_i(t) \quad \textit{pour } t \in (0, a) , \ i = 1, 2, \ldots, n . \tag{41}$$

Démonstration. Soit a^* un nombre arbitrairement fixé de l'intervalle $(0, a)$. Il existe un indice ν_0 tel que les solutions $\{y_1^\nu(t), y_2^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)\}$ du système (23) sont définies dans l'intervalle $\langle 0, a^*\rangle$. Comme $\lim\limits_{\nu\to\infty} y_i^\nu(t)$

$= \bar{y}_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, il suffit, pour que l'inégalité $z_i(t) \leqslant \bar{y}_i(t)$, $t \in \langle 0, a^* \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$, soit vérifiée, que l'inégalité

$$(42) \qquad z_i(t) < y_i^\nu(t)\,, \qquad t \in \langle 0, a^* \rangle\,, \; i = 1, 2, \ldots, n; \; \nu = \nu_0+1, \nu_0+2, \ldots$$

le soit aussi. L'inégalité (42) est vérifiée pour $t = 0$. Fixons ν et désignons par τ_0 la borne supérieure des nombres τ pour lesquels l'inégalité (42) a lieu dans tout l'intervalle $\langle 0, \tau)$. Il s'agit de prouver que $\tau_0 = a^*$. Pour la démonstration par l'absurde, supposons que $\tau_0 < a^*$. Evidemment, $z_i(t) < y_i^\nu(t)$ pour $t < \tau_0$ et il existe un indice j, $1 \leqslant j \leqslant n$, tel que $z_j(\tau_0) = y_j^\nu(\tau_0)$. D'où

$$(43) \qquad D_- z_j(\tau_0) \geqslant \big(y_j^\nu(\tau_0)\big)'_- = f_j\big(\tau_0, y_1^\nu(\beta_{j1}(\tau_0)), \ldots, y_n^\nu(\beta_{jn}(\tau_0))\big) + \frac{1}{\nu}\,.$$

Comme la suite $\{y_j^\nu(t)\}$ est fortement décroissante et tend vers $\bar{y}_j(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, a^*)$, il s'ensuit que

$$(44) \qquad \bar{y}_j(\tau_0) < y_j^\nu(\tau_0) = z_j(\tau_0)\,, \qquad \text{c'est-à-dire } z_j(\tau_0) > \bar{y}_j(\tau_0)\,.$$

Par conséquent, $\tau_0 \in E_j$.

En tenant compte de (40), de l'hypothèse 4° et de la définition du nombre τ_0, on obtient donc

$$D_- z_j(\tau_0) \leqslant f_j\big(\tau_0, z_1(\beta_{j1}(\tau_0)), \ldots, z_n(\beta_{jn}(\tau_0))\big) \leqslant f_j\big(\tau_0, y_1^\nu(\beta_{j1}(\tau_0)), \ldots, y_n^\nu(\beta_{jn}(\tau_0))\big)$$
$$< f_j\big(\tau_0, y_1^\nu(\beta_{j1}(\tau_0)), \ldots, y_n^\nu(\beta_{jn}(\tau_0))\big) + \frac{1}{\nu} = \big(y_j^\nu(\tau_0)\big)_-\,,$$

c'est-à-dire

$$(45) \qquad D_- z_j(\tau_0) < \big(y_j^\nu(\tau_0)\big)'_-\,.$$

L'inégalité (45) est en contradiction avec l'inégalité (43).

La démonstration du théorème 7 est donc achevée.

Remarque 3. Si $\beta_{ii}(t) \equiv t$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$, la condition 4° peut être remplacée par une condition plus faible, notamment par la condition W_+ ([1], p. 14).

Travaux cités

[1] J. Szarski, *Differential inequalities*, Warszawa 1965.

[2] K. Zima, *O pewnym układzie równań różniczkowych z opóźnionym argumentem*, Zeszyty Naukowe W. S. P., Katowice, Sekcja Matem. Nr 4 (1964), pp. 55-61.

Reçu par la Rédaction le 20. 6. 1967