ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1963)

L'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs aux équations linéaires normales du type parabolique dans l'espace $\mathcal{E}^{m+1}$

par I. Łojczyk-Królikiewicz (Kraków)

1. Dans le présent travail nous établissons certaines conditions suffisantes pour que les solutions des premier, deuxième et troisième problèmes de Fourier tendent vers zéro lorsque la variable du temps t tend vers l'infini.

Soit (X, t) un point variable de l'espace euclidien à $m+1$ dimensions. Prenons dans l'espace $\mathcal{E}^m$ un ensemble S_0 ouvert et borné et définissons le cylindre D de l'espace-temps comme le produit topologique $S_0 \times [0, \infty)$. S_0 sera sa base et sa surface latérale déterminée par le produit $\mathrm{F}S_0 \times [0, \infty)$.

Nous résoudrons d'abord les problèmes en question pour l'équation homogène

$$F[u] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} b_k u'_{x_k} - u'_t + cu = 0 \tag{1}$$

où a_{ij}, b_k, c sont des fonctions des (X, t) continues dans $\bar{D}$, ensuite pour l'équation non homogène

$$F[u] = f(X, t)\,. \tag{2}$$

Nous supposons que la forme quadratique $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}\lambda_i\lambda_j$ est non négative dans D.

2. Théorème 1. *Si $u(X, t)$ est une solution régulière* (¹) *de l'équation* (1) *dans le domaine D, telle que*

$$\lim_{t\to\infty} u(X, t) = 0 \quad \textit{uniformément pour } X \in \mathrm{F}S_0, \tag{3}$$

(¹) Nous disons que $u(X, t)$ est *régulière* dans D quand elle est continue dans la fermeture $\bar{D}$ du domaine D, admet des dérivées du second ordre par rapport aux variables $x_1, \ldots, x_m$ et du premier ordre par rapport à t, continues dans le domaine D.

si en outre les coefficients de l'équation (1) *sont continus et satisfont dans le domaine* $\bar{D}$ *aux conditions suivantes*:

$$c(X,t) \leqslant c_0 \leqslant 0\,, \tag{4'}$$

$$b_1(X,t) \leqslant B\,, \quad \textit{où} \quad B > 0\,, \tag{4''}$$

$$\textit{il existe un nombre } a_0 > 0 \textit{ tel que } a_{11} > a_0 \tag{4'''}$$

alors cette solution tend vers zéro uniformément dans $\bar{S}_0$ (²).

La méthode de la démonstration de ce théorème pour $\mathcal{E}^{m+1}$ est analogue à celle que donne M. Krzyżański dans le travail [2] pour le cas $m = 1$. D'abord nous allons démontrer un théorème auxiliaire.

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Nous supposons que*:

1° $c(X,t) \leqslant 0$,

2° *il existe une fonction* $V(X,t)$ *régulière dans le domaine* D *satisfaisant aux conditions suivantes*: $V(X,t) > 0$ *dans* $\bar{D}$, $F[V] \leqslant 0$ *dans* D *et* $\lim\limits_{t\to\infty} V(X,t) = 0$ *uniformément par rapport à la variable* X *pour* $X \in \bar{S}_0$,

3° $u(X,t)$ *est une solution de l'équation* (1) *vérifiant* (3).

Alors cette solution tend vers zéro uniformément dans S_0.

Démonstration. Nous prenons la fonction auxiliaire:

$$\bar{u}(X,t) = u(X,t) - \delta - KV(X,t)$$

où K et δ sont des constantes positives. Nous voyons que

$$F[\bar{u}] = -c(X,t)\delta - KF[V] \geqslant 0\,.$$

En vertu de (3) pour δ arbitraire positif il existe un nombre $T_0 > 0$ tel que $|u(X,t)| < \delta$ pour $t \geqslant T_0$ et pour chaque $X \in \mathrm{F}S_0$. Nous prenons le nombre K suffisamment grand pour que $\bar{u}(X, T_0) < 0$ dans $\bar{S}_0$. En vertu des théorèmes sur les extréma des solutions des équations paraboliques (voir [6], p. 177) nous avons $\bar{u}(X,t) \leqslant 0$ dans $\bar{D}_{T_0}$: $\{X \in \bar{S}_0,\ t \geqslant T_0\}$ et il en résulte que

$$u(X,t) \leqslant \delta + KV(X,t)\,.$$

D'une manière analogue, en prenant la fonction auxiliaire:

$$\bar{\bar{u}}(X,t) = u(X,t) + \delta + KV(X,t)\,,$$

(²) A. Friedman considère dans le travail [1] un problème analogue, d'abord pour l'équation non homogène, ensuite pour l'équation non linéaire, mais avec des hypothèses plus fortes concernant les coefficients de l'équation (2). H. Murakami [9] a obtenu des résultats pareils pour l'équation non linéaire, en supposant la région S_0 régulière par rapport au problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace. Des problèmes analogues ont été considérés par H. Milicer-Grużewska [8] par l'étude de la propriété limite du potentiel généralisé de simple couche.

nous obtenons

$$u(X,t) \geqslant -\delta - KV(X,t) \quad \text{dans} \quad D_{T_0}.$$

Alors la fonction $u(X,t)$ satisfait à l'inégalité

$$|u(X,t)| \leqslant \delta + KV(X,t) \quad \text{dans} \quad D_{T_0}.$$

Puisqu'il existe un nombre positif $T_1 > T_0$ tel que $V(X,t) < \delta/K$ pour $t > T_1$, nous avons enfin $|u(X,t)| \leqslant 2\delta$ pour $t > T_1$. Il en résulte que $\lim_{t\to\infty} u(X,t) = 0$ uniformément dans $\bar{S}_0$.

Pour démontrer le théorème 1, il suffit donc de construire la fonction $V(X,t)$ pour l'espace $\mathcal{E}^{m+1}$, $m > 1$, telle que:

$$(5') \qquad V(X,t) > 0 \quad \text{dans} \quad \bar{D},$$

$$(5'') \qquad F[V] \leqslant 0 \quad \text{dans} \quad D,$$

$(5''')$ $\lim_{t\to\infty} V(X,t) = 0$ uniformément par rapport à la variable $X \in \bar{S}_0$.

Il est facile de voir que la fonction $V(X,t)$ définie par la formule:

$$V(X,t) = \{-a_0/B^2 \exp[B/a_0(q-x_1)] - x_1/B + C\}\exp(-\lambda t)$$

où $p \leqslant x_1 \leqslant q$, $C > 0$ est plus grand que la borne supérieure de la fonction $a_0/B^2 \exp[B/a_0(q-x_1)] + x_1/B$ pour $p \leqslant x_1 \leqslant q$, et $\lambda = 1/2C$, satisfait aux hypothèses (5'), (5'') et (5'''). Le théorème 1 est ainsi démontré.

3. Nous allons maintenant chercher une évaluation de la solution du premier problème de Fourier. Nous supposons que les coefficients de l'équation (2) sont continus dans D, et aussi

$$(6) \qquad c(X,t) \leqslant c_0 \quad \text{dans} \quad D,$$

où c_0 une constante arbitraire.

LEMME. *Soit $u(X,t)$ une solution de l'équation* (2), *régulière dans D. Supposons que l'on ait*

$$(7) \qquad |u(X,t)| \leqslant M\exp(c_0 t) \quad \textit{pour} \quad (X,t) \in S_0 + \sigma$$

et que le second membre de l'équation (2) *satisfasse à l'inégalité*

$$(8) \qquad |f(X,t)| \leqslant M_0 \exp(c_0 t) \quad \textit{dans} \quad D.$$

Alors on a

$$|u(X,t)| \leqslant (M + M_0 t)\exp(c_0 t).$$

D é m o n s t r a t i o n [3]. Nous introduisons la nouvelle fonction inconnue:

$$v_1(X,t) = u(X,t)\exp(-c_0 t) - M_0 t.$$

---

[3] La méthode de la démonstration est la même que celle du corollaire 1 dans [3].

D'après (7) on a $v_1(X, t) \leqslant M$ pour $(X, t) \in S_0 + \sigma$. Cette fonction satisfait à une équation de la forme suivante:

$$\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(t, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} v_1(t, x) + \sum_{k=1}^{m} b_k(t, x) \frac{\partial}{\partial x_k} v_1(t, x) - \frac{\partial v_1}{\partial t} + (c - c_0) v_1$$
$$= f(t, x) \exp(-c_0 t) - c M_0 t + M_0 + c_0 M_0 t .$$

Il résulte de l'inégalité (6) et (8) que le second membre est non négatif et le coefficient de la fonction inconnue est non positif, alors $v_1(X, t) \leqslant M$ dans D.

Le même raisonnement pour la fonction

$$v_2(X, t) = u(X, t) \exp(-c_0 t) + M_0 t$$

donne l'inégalité: $v_2(X, t) \geqslant -M$ dans D. Alors

$$-(M + M_0 t) \exp(c_0 t) \leqslant u(X, t) \leqslant (M + M_0 t) \exp(c_0 t)$$

et cela démontre notre lemme.

Le théorème suivant en est un corollaire immédiat:

THÉORÈME 2. *Soit $u(X, t)$ une solution de l'équation* (2), *régulière dans D. Si les inégalités* (6), (7), (8) *restent valables pour $c_0 < 0$ alors la solution $u(X, t)$ tend uniformément vers zéro pour $t \to \infty$ dans $\bar{S}_0$.*

Remarque 1. On voit que le lemme et le théorème 2 sont valables pour S_0 non borné sous certaines conditions de croissance de la fonction $u(X, t)$, mais, dans la suite de cette note, nous ne profitons pas de cette hypothèse générale.

Remarque 2. Le théorème 2 ne contient pas le cas du théorème 1, car nous y avons $c_0 \leqslant 0$ et ici on a $c_0 < 0$.

4. L'hypothèse $c_0 \leqslant 0$ dans le théorème 1 est essentielle, car dans la démonstration du théorème auxiliaire nous profitons du théorème sur les extréma des solutions des équations du type parabolique et celui-ci est démontré pour $c_0 \leqslant 0$.

Maintenent nous allons montrer qu'en admettant une certaine hypothèse supplémentaire on peut établir un théorème analogue pour le cas $c_0 > 0$.

Nous dirons que la fonction $u(X, t)$ a la propriété E_0 dans l'ensemble S des points (X), si l'on peut trouver deux nombres constants positifs M et λ tels que $|u(X, t)| \leqslant M \exp(-\lambda t)$, pour chaque $X \in S$.

THÉORÈME 3. *Soit $u(X, t)$ une solution régulière de* (2), *en outre supposons que les coefficients de* (2), *étant continus, satisfassent aux hypothèses*: $|a_{ij}(X, t)| \leqslant A$, $-B_0 \leqslant b_k(X, t) \leqslant -B < 0$ *ou bien* $0 < B \leqslant b_k(X, t) \leqslant B_0$,

$c(X,t)$ est borné supérieurement par un nombre c_0, en outre le nombre B est suffisament grand pour qu'on ait l'inégalité $B^2 > 4Ac_0$. Si $u(X,t)$ a aussi la propriété E_0 dans $\mathrm{F}S_0$ et $f(X,t)$ a la même propriété dans $\bar{S}_0$, alors $\lim_{t\to\infty} u(X,t) = 0$ uniformément dans $\bar{S}_0$.

Démonstration. En vertu des hypothèses il existe $M_1 > 0$, $\lambda_1 > 0$, $M_2 > 0$, $\lambda_2 > 0$ tels que

$$|u(X,t)| \leqslant M_1 \exp(-\lambda_1 t) \quad \text{dans} \quad \mathrm{F}S_0$$

et

$$|f(X,t)| \leqslant M_2 \exp(-\lambda_2 t) \quad \text{dans} \quad \bar{S}_0 .$$

Nous considérons deux cas:

1° Soit

$$(9) \qquad -B_0 \leqslant b_k(X,t) \leqslant -B < 0 , \quad |a_{ij}(X,t)| \leqslant A , \quad c(X,t) \leqslant c_0 ,$$

où $c_0 > 0$ dans $\bar{D}$ et

$$(10) \qquad B^2 > 4Ac_0 .$$

Nous introduisons la fonction auxiliaire $v(X,t)$ telle que

$$(11) \qquad u(X,t) = v(X,t) \exp\left[a \sum_{i=1}^{m} x_i\right].$$

Le nombre $a > 0$ sera déterminé plus loin.

Nous avons la relation suivante:

$$F[u] = \bar{F}[v] \cdot \exp\left[a \sum_{i=1}^{m} x_i\right] = f(X,t)$$

et par conséquent $v(X,t)$ vérifie l'équation

$$(12) \qquad \bar{F}[v] = \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} v''_{x_i x_j} + \sum_{k=1}^{m} \bar{b}_k v'_{x_k} - v'_t + \bar{c} v = \bar{f}(X,t)$$

dans laquelle

$$\bar{c}(X,t) = \sum_{i,j=1}^{m} a_i a^2 + \sum_{k=1}^{m} b_k a + c \leqslant m^2 A a^2 - mBa + c_0 .$$

Nous déterminons le nombre $a > 0$ de façon que le polynôme $m^2Aa^2 - mBa + c_0$ soit négatif. En vertu de (10) l'équation $m^2Aa^2 - mBa + c_0 = 0$ a deux racines positives a_1, a_2. Nous mettons $0 < a_1 < a = a_0 < a_2$ de façon que $m^2Aa_0^2 - mBa_0 + c_0 = -\varepsilon < 0$, où le nombre $\varepsilon \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2)$.

2° Soit maintenant $0 < B \leqslant b_k(X,t) \leqslant B_0$, où B satisfait à (10) et $a_{ij}(X,t)$, $c(X,t)$ vérifient les mêmes hypothèses (9). Nous introduisons la nouvelle fonction inconnue $v(X,t)$ d'après la formule (11), avec le nombre $a > 0$. Cette fonction est la solution de l'équation (12) dans laquelle $\bar{c}(X, t) \leqslant m^2Aa^2 + mBa + c_0$ et l'équation $m^2Aa^2 + mBa + c_0 = 0$ a maintenant deux racines négatives. En mettant $a = a_0$, comme dans le premier cas, nous obtenons

$$m^2Aa_0^2 + mBa_0 + c_0 = -\varepsilon < 0 \qquad \text{pour le même } \varepsilon.$$

Le raisonnement qui suit sera le même pour les cas 1° et 2°. Nous avons obtenu $\bar{c}(X, t) \leqslant -\varepsilon < 0$.

Le second membre de l'équation (12) est de la forme suivante:

$$\bar{f}(X, t) = f(X, t)\exp\Big(-a_0\sum_{i=1}^{m} x_i\Big)$$

et alors

$$|\bar{f}(X, t)| \leqslant M_2/N_1 \exp(-\lambda_2 t) \leqslant \bar{M}_0 \exp(-\varepsilon t) \qquad \text{dans} \qquad D,$$

où N_1 est la borne inférieure de la fonction $\exp(a_0 \sum_{i=1}^{m} x_i)$ dans S_0. Nous avons aussi

$$|v(X, t)| \leqslant M_1/N_1 \exp(-\lambda_1 t) \leqslant \bar{M}_1 \exp(-\varepsilon t) \qquad \text{sur} \qquad \sigma.$$

En vertu de l'hypothèse que $u(X, t)$ est régulière dans D, il existe un nombre $M > 0$ tel que

$$|v(X, 0)| \leqslant M\exp\Big(-a_0\sum_{i=1}^{m} x_i\Big) \leqslant M/N_1 = \bar{M}_2 \qquad \text{sur} \qquad \bar{S}_0.$$

En posant ensuite $\bar{M} = \max(\bar{M}_1, \bar{M}_2)$ nous avons $|v(X, t)| \leqslant \bar{M}\exp(-\varepsilon t)$ dans $\Sigma = S_0 + \sigma$. Nous appliquons le lemme à la fonction $v(X, t)$ et alors

$$|v(X, t)| \leqslant (\bar{M} + \bar{M}_0 t)\exp(-\varepsilon t) \qquad \text{dans} \qquad \bar{D}.$$

Enfin, en vertu de l'inégalité:

$$|u(X, t)| \leqslant |v(X, t)|\exp\Big[a_0\sum_{i=1}^{m} x_i\Big] \leqslant (\bar{M} + \bar{M}_0 t)N_2 \exp(-\varepsilon t)$$

dans $\bar{D}$, le théorème 3 est démontré.

Remarque 1. Lorsque l'équation est homogène et la condition (4''') est satisfaite, on peut faire des hypothèses plus faibles sur les coefficients $b_k(X, t)$, à savoir il suffit de supposer que $b_k(X, t) \leqslant -B < 0$ ou bien $b_k(X, t) \geqslant B > 0$ et $b_1(X, t) \leqslant B_0$, où $B_0 > 0$ dans $\bar{D}$. La démonstration dans ce cas est presque identique à celle du théorème 3, mais au lieu de l'identité (11) nous prenons $u(X, t) = v(X, t)\exp\big[a\sum_{i=1}^{m} x_i - \beta t\big]$ et en mettant $\beta = \beta_0 < \min(\varepsilon, \lambda_1, \lambda_2)$ nous appliquons à la fonction $v(X, t)$ le théorème 1. Cela démontre aussi que $u(X, t)$ a dans ce cas la propriété E_0 dans $\bar{S}_0$.

Remarque 2. On peut donner un exemple montrant que l'hypothèse $b_k(X,t) \leqslant -B$ ou bien $b_k(X,t) \geqslant +B$ dans le théorème 3 est essentielle: la fonction $u(x,t) = x^2 - x + \exp(-\lambda t)$ est une solution de l'équation $u'_t = \lambda \exp(-\lambda t)$ pour $\lambda > 0$, qui a pour $x = 0$ et $x = 1$ la propriété E_0 et ne tend pas vers zéro dans tout l'ensemble $0 \leqslant x \leqslant 1$, bien que $f(X,t)$ ait aussi la propriété E_0 dans cet ensemble.

5. Soit donnée comme au nº 1 l'équation

$$F[u] = 0$$

ou bien

$$F[u] = f(X,t),$$

mais avec une condition aux limites de la forme suivante

$$L[u] = \frac{du}{dl} + h(X,t)u(X,t) = g(X,t) \quad \text{pour} \quad (X,t) \in \sigma \tag{13}$$

σ désignant la surface latérale du domaine D définie au nº 1 et l étant une demi-droite orthogonale à l'axe t, pénétrant dans l'intérieur de D.

THÉORÈME 4. *Supposons que $u(X,t)$ soit une solution de l'équation* (1), *régulière dans D, admettant des dérivées du/dl sur σ et que les coefficients de cette équation satisfassent aux hypothèses* (4'), (4''), (4''') (nº 1). *Si $u(X,t)$ satisfait aussi à* (13) *où $h(X,t) \leqslant -h_0 < 0$ sur σ et*

$$\lim_{t\to\infty} g(X,t) = 0 \quad \textit{uniformément pour chaque } X \in \mathrm{F}S_0 \tag{14}$$

alors $u(X,t)$ tend uniformément vers zéro dans l'ensemble $\bar{S}_0$ pour $t \to \infty$.

Ce théorème est connu pour $m = 1$ et il a été démontré par M. Krzyżański [4]. En appliquant la même méthode du raisonnement on démontre:

THÉORÈME AUXILIAIRE. *Soit $u(X,t)$ une solution régulière de l'équation* (1), *dans laquelle $c(X,t) \leqslant 0$, admettant des dérivées du/dl aux points de σ, et satisfaisant à la condition* (13) *avec $h(X,t) \leqslant -h_0 < 0$. Supposons qu'il existe une fonction $V(X,t)$ régulière dans D, admettant des dérivées dV/dl sur σ, telle que:*

$$V(X,t) > 0 \quad \textit{dans} \quad \bar{D}, \tag{15'}$$

$$F[V] \leqslant 0 \quad \textit{à l'intérieur de } D, \tag{15''}$$

$$L[V] < 0 \quad \textit{sur } \sigma \textit{ pour } t > 0, \tag{15'''}$$

$$\lim_{t\to\infty} V(X,t) = 0 \quad \textit{uniformément dans } \bar{S}_0. \tag{15^{IV}}$$

Si on a aussi $\lim_{t\to\infty} L[u] = 0$ uniformément par rapport à $X \in \mathrm{F}S_0$, alors la solution $u(X,t)$ tend uniformément vers zéro pour $X \in \bar{S}_0$.

La méthode de la démonstration de ce théorème pour $\mathcal{E}^{m+1}$ est presque identique à celle que donne M. Krzyżański dans [4], c'est pourquoi nous ne la reproduisons pas.

Pour démontrer le théorème 4 il suffit de construire une fonction $V(X,t)$, qui satisfera aux conditions (15')-(15^{IV}). Désignons par $\overline{u}(X)$ la fonction suivante:

$$\overline{u}(X) = -1/B\{a_0/B\exp[B/a_0(q-x_1)]+x_1\}+C\,,$$

où les nombres C et q sont fixés comme au n° 1.

Ensuite nous prenons la fonction

$$V(X,t) = \hat{u}(X)\exp(-\lambda t) = [\overline{u}(X)+d]\exp(-\lambda t)\,, \qquad \text{où} \qquad d>0\,.$$

Pour cette fonction nous avons $F[V]\leqslant \exp(-\lambda t)(-1+\lambda\hat{u})$. Puisque la fonction $\overline{u}(X)$ est bornée, on a $|\hat{u}(X)|<u_0$ dans S_0. Posant $\lambda = 1/2u_0$ nous avons $F[V]\leqslant 0$ dans D. De plus on a

$$L[V] = dV/dl+h(X,t)V\leqslant \exp(-\lambda t)\Big[\sum_{i=1}^{m}\overline{u}'_{x_i}\cos(l,x_i)-h_0 d\Big] \qquad \text{sur} \qquad \sigma\,,$$

pour d suffisamment grand, on a $L[V]<0$ sur σ.

Nous voyons que la fonction ainsi trouvée satisfait aux conditions (15')-(15^{IV}), d'où il résulte que le théorème 4 est démontré.

6. Le théorème analogue concernant le troisième problème de Fourier pour l'équation non homogène, est un facile conséquence des résultats établis dans le travail [7].

THÉORÈME 5. *Si les coefficients de l'équation* (2) *sont bornés dans* $\overline{D}$, *en particulier si* $c(X,t)\leqslant c_0<0$ *et* $|f(X,t)|\leqslant M_0\exp(c_0t)$, *la solution de cette équation, régulière dans* D, *satisfaisant à la condition aux limites* (13) *avec* $h(X,t)\leqslant -h_0<0$ *et* $|g(X,t)|\leqslant g_0\exp(c_0t)$, *tend uniformément vers zéro dans* $\overline{S}_0$.

Démonstration. En appliquant à la fonction $u(X,t)$ le théorème 1 du travail cité [7] nous avons

$$|u(X,t)|\leqslant \exp(c_0t)[M+g_0/h_0+M_0t] \qquad \text{dans} \qquad \overline{D}\,,$$

où $M = \sup\limits_{X\in\overline{S}_0} u(X,0)$, donc le théorème 5 est vrai.

7. Dans le travail [4] M. Krzyżański a donné deux exemples pour l'espace-temps $\mathcal{E}^2$ où la solution du second problème de Fourier, dans le cas $c(X,t)\equiv 0$, peut tendre vers une constante ou vers l'infini, bien que les conditions $\lim\limits_{t\to\infty} g(0,t)=0$ et $\lim\limits_{t\to\infty} g(1,t)=0$ soient vérifiées.

On peut montrer qu'il existe des conditions suffisantes pour que la solution du deuxième problème de Fourier tende vers zéro uniformément dans $\overline{S}_0$ pour $t\to\infty$ quand $c(X,t)\leqslant c_0<0$ dans $\overline{D}$.

Nous supposons que $u(X,t)$ satisfait à l'équation (2), où l'on a $|a_{ij}(X,t)| \leqslant A$, $|b_k(X,t)| \leqslant B$ et $c(X,t) \leqslant c_0 < 0$ pour $(X,t) \in \bar{D}$, et à la condition aux limites

$$(16) \quad \frac{du}{dl} + h(X,t) = g(X,t) \quad \text{pour} \quad X \in \mathrm{F}S_0, \quad \text{où} \quad h(X,t) \leqslant 0 .$$

Ici l est une demi-droite orthogonale à l'axe t, issue d'un point de la frontière et pénétrant dans l'intérieur de D de manière que

$$(17) \qquad \cos(l,n) \geqslant \gamma > 0 \quad \text{sur} \quad \sigma$$

n étant le vecteur intérieur normal à la surface σ. Nous introduirons des hypothèses supplémentaires concernant l'hyper-surface $\mathrm{F}S_0$ (4).

Soit $G(X) = 0$ l'équation de la surface $\mathrm{F}S_0$ et supposons que:

(18′) la fonction $G(X)$ soit de classe C^2 dans S_0 et de classe C^1 dans $\bar{S}_0$,

$$(18'') \qquad |\mathrm{grad}\, G(X)| \geqslant \Gamma > 0 \quad \text{sur} \quad \mathrm{F}S_0 ,$$

$$(18''') \qquad |G''_{x_i x_j}(X)| < G_2 \quad \text{dans} \quad \bar{S}_0, \quad G_2 = \text{const};$$

il résulte des hypothèses précédentes que

$$(18^{\mathrm{IV}}) \qquad |G'_{x_i}(X)| < G_1 \quad \text{dans} \quad \bar{S}_0, \quad G_1 = \text{const}.$$

Nous prenons le signe de la fonction $G(X)$ de manière que

$$(18^{\mathrm{V}}) \qquad G'_{x_i}(X) = |\mathrm{grad}\, G| \cos(n, x_i) \quad \text{sur} \quad \sigma \text{ (5)}.$$

THÉORÈME 6. *Soit $u(X,t)$ une solution du problème de Fourier pour l'équation* (2) *avec les coefficients $a_{ij}(X,t)$ et $b_k(X,t)$ bornés et avec $c(X,t) \leqslant c_0 < 0$ dans D, pour la condition aux limites* (16). *Supposons que $f(X,t)$ et $g(X,t)$ aient la propriété* E_0 *respectivement dans S_0 et $\mathrm{F}S_0$. Soit $G(X) = 0$, l'équation de la frontière $\mathrm{F}S_0$, où la fonction $G(X)$ satisfait aux hypothèses* (18′)-(18$^{\mathrm{V}}$). *Alors cette solution tend uniformément vers zéro dans $\bar{S}_0$ (et elle y a la propriété* E_0 *pour l'équation homogène).*

Démonstration. Soit

$$|f(X,t)| \leqslant M_1 \exp(-\lambda_1 t) \quad \text{et} \quad |g(X,t)| \leqslant M_2 \exp(-\lambda_2 t) .$$

Nous introduisons une nouvelle fonction $v(X,t)$ déterminée par la formule $u(X,t) = v(X,t)\exp[-aG(X)]$ où $a > 0$ sera fixé plus loin. Cette fonction vérifie l'équation de la forme (12) où

---

(4) Ces hypothèses sont presque identiques à celles du travail [5].

(5) Si $\bar{S}_0$ est la sphère à m dimensions de rayon r, la fonction $G(X)$ peut être, par exemple, $G(X) = -\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + r^2$.

$$\bar{c}(X,t) = -a\sum_{k=1}^{m} G'_{x_k} b_k(X,t) - a\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t)G''_{x_i x_k} +$$
$$+ a^2 \sum_{i,j=1}^{m} a_{ij}(X,t) G'_{x_i} G'_{x_j} + c(X,t)\,.$$

Désignons par K la borne supérieure de la fonction $\sum_{i,j=1}^{m} a_{ij} G'_{x_i} G'_{x_j}$ dans $\bar{S}_0$. Nous avons en vertu des hypothèses

$$\bar{c}(X,t) \leqslant a(mBG_1 + m^2AG_2 + aK) + c_0\,.$$

Prenons le nombre $a = a_0 > 0$ suffisamment petit, tel que

$$a_0(mBG_1 + m^2AG_2 + a_0K) + c_0 = -\varepsilon < 0\,,$$

où $\varepsilon \leqslant \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Pour ce nombre a_0 nous avons $\bar{c}(X,t) \leqslant -\varepsilon < 0$ et aussi

$$|\bar{f}(X,t)| = |f(X,t)|\exp[a_0 G(X)| \leqslant M_1 N_1 \exp(-\lambda_1 t) \leqslant \bar{M}_0 \exp(-\varepsilon t)$$

dans $\bar{D}$ où N_1 est la borne inférieure de la fonction $\exp[-a_0 G(X)]$. La fonction $v(X,t)$ vérifie aussi la condition initiale

$$|v(X,0)| = |u(X,0)|\exp[a_0 G(X)] \leqslant M/N_1 = \bar{M}$$

et la condition aux limites

$$\bar{L}[v] = \frac{dv}{dl} - a_0 \sum_{i=1}^{m} G'_{x_i} \cos(l, x_i) v = \bar{g}(X,t) \qquad \text{sur} \qquad \sigma\,.$$

En profitant des hypothèses (17), (18″), (18^{V}), nous voyons que $v(X,t)$ satisfait à la condition aux limites dans laquelle

$$\bar{h}(X,t) = -a_0 \sum_{i=1}^{m} G'_{x_i}\cos(l,x_i) = -a_0|\operatorname{grad} G|\cos(n,l) \leqslant -a_0 \Gamma\gamma = -\bar{h}_0 < 0$$

et

$$|\bar{g}(X,t)| = |g(X,t)|\exp[a_0 G(X)| \leqslant M_2/N_1 \exp(-\lambda_2 t) \leqslant \bar{g}_0 \exp(-\varepsilon t)$$

pour $(X,t) \in \sigma$. En appliquant le théorème 5 à la fonction $v(X,t)$ nous voyons que

$$|v(X,t)| \leqslant (\bar{M} + \bar{g}_0/\bar{h}_0 + \bar{M}_0 t)\exp(-\varepsilon t)$$

et par conséquent

$$|u(X,t)| \leqslant (\bar{M} + \bar{g}_0/\bar{h}_0 + \bar{M}_0 t) N_2 \exp(-\varepsilon t)\,.$$

Alors $u(X,t)$ tend uniformément vers zéro dans $\bar{S}_0$. Nous voyons que dans le cas $f(X,t) \equiv 0$, $u(X,t)$ jouit bien de la propriété E_0.

8. Nous allons donner deux exemples, dans lesquels la solution du troisième problème de Fourier ne tend pas vers zéro, bien que $g(X, t)$ ait la propriété E_0 sur la frontière FS_0. Dans le premier cas le coefficient de la fonction inconnue dans l'équation aura la borne supérieure $c_0 > 0$, et le même coefficient dans la condition aux limites aura la borne supérieure $h_0 = 0$. Dans le second exemple nous aurons $h_0 > 0$, et la solution ne tendra pas vers zéro bien que $c_0 < 0$.

EXEMPLE 1 ([6]). Nous prenons une solution $u(X, t)$ de l'équation

$$u''_{xx} - u'_t + (-d^2x^2 + d)u = 0 \tag{19}$$

avec $d > 0$ arbitraire, qui satisfait à la condition aux limites

$$L[u] = u'_x \cos(n, x) - \frac{xd}{\operatorname{tgh}[2d(t+1)]} u = g(x, t)$$

pour $x = 0$, $x = 1$, où

$$|g(0, t)| = \Big| 2\pi/d\, \{\sinh[2d(t+1)]\}^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{\frac{d}{2\operatorname{tgh}[2d(t+1)]} + d(t+1)\right\} \frac{d}{\sinh[2d(t+1)]}\Big|$$
$$\leqslant M \exp[-d\theta(t+1)] \leqslant M \exp(-d\theta t), \quad \text{où} \quad 0 < \theta < 1,$$

et

$$|g(1, t)| = \Big| -2\pi/d\, \{\sinh[2d(t+1)]\}^{-1/2} \times$$
$$\times \exp\left\{-\frac{d}{\operatorname{tgh}[2d(t+1)]} + \frac{d}{\sinh[2d(t+1)]} + d(t+1)\right\} \frac{d}{\sinh[2d(t+1)]}\Big|$$
$$\leqslant M_1 \exp[-d\theta(t+1)] \leqslant M_1 \exp(-d\theta t), \quad \text{où} \quad 0 < \theta < 1.$$

Nous cherchons cette solution dans le domaine $\langle 0, 1\rangle \times \langle 0, \infty)$, et nous supposons que le vecteur normal a les coordonnées $(1, 0)$ pour $x = 0$, et $(-1, 0)$ pour $x = 1$. La solution satisfaisant à ces conditions est

$$u(x, t) = 2\pi/d\, \{\sinh[2d(t+1)]\}^{-1/2} \times \tag{20}$$
$$\times \exp\left\{\frac{-d(x^2+1)}{2\operatorname{tgh}[2d(t+1)]} + \frac{xd}{\sinh[2d(t+1)]} + d(t+1)\right\}.$$

Nous voyons que $\lim\limits_{t\to\infty} u(x, t)$ est une fonction de x bornée, qui ne s'annule pas identiquement.

EXEMPLE 2. Prenons la fonction $u(x, t)$ de l'exemple précédent déterminée par la formule (20) pour $d = 1/4$.

([6]) Cet exemple a été construit à l'aide de la solution fondamentale de l'équation (19) donnée par A. Szybiak dans son travail [10].

Remarquons que la fonction

$$v(x,t) = u(x,t)\exp[(x-1/2)^2+1/8t-1/4] \tag{21}$$

dans $\langle 0,1\rangle \times \langle 0,\infty)$ est la solution de l'équation

$$v''_{xx}-4(x-1/2)v'_x-v'_t+4[(x-1/2)^2+(-1/16x^2+1/4)-15/8]v = 0$$

avec $\bar{c}(x) \leqslant -5/8 < 0$, et qu'elle satisfait à la condition aux limites

$$v'_x\cos(n,x)+\left\{-2(x-1/2)\cos(n,x)-\frac{1/4x}{\operatorname{tgh}[1/2(t+1)]}\right\}v$$
$$= g(x,t)\exp\{1/8t-1/4-(x-1/2)^2\} = \bar{g}(x,t)\,.$$

Nous avons ici $\bar{h}(0,t) = 1$ et $\bar{h}(1,t) \leqslant 1-1/4 = 3/4$ et aussi $|\bar{g}(x,t)| \leqslant N\exp(-1/8\theta t)$ pour $x = 0$ et $x = 1$, où $N = M$ pour $x = 0$ et $N = M_1$ pour $x = 1$, on y a $1/2 < \theta < 1$. Il résulte de la formule (21) que $\lim\limits_{t\to\infty} v(x,t) = \infty$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Travaux cités

[1] A. Friedman, *Convergence of solutions of parabolic equations to a steady state*, Journ. Math. and Mech. 8. (1959), p. 57-76.

[2] M. Krzyżański, *Sur l'allure asymptotique d'une solution de l'équation du type parabolique*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, 4 (1956), p. 243-247.

[3] — *Évaluations des solutions de l'équation aux dérivées partielles du type parabolique déterminées dans un domaine non borné*, Ann. Polon. Math. 4 (1957), p. 93-97.

[4] — *Sur l'allure asymptotique des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation linéaire parabolique*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend., Ser. VIII, 28 (1960), p. 37-43.

[5] — *Sur l'unicité des solutions du second et troisième problème de Fourier relatifs à l'équation linéaire normale du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 7 (1960), p. 201-208.

[6] — *Równania różniczkowe cząstkowe rzędu drugiego*, Cz. I, Warszawa 1957.

[7] I. Łojczyk-Królikiewicz, *Certaines évaluation des solutions des problèmes de Fourier relatifs à l'équation normale du type parabolique*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), p. 221-227.

[8] H. Milicer-Grużewska, *Propriété limite du potentiel généralisé de simple, couche relativement à l'équation parabolique normale*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. III, 12 (1958), p. 359-396.

[9] H. Murakami, *Relations between solutions of parabolic and elliptic equations*, Proc. Japan Acad. 34 (1958), p. 349-352.

[10] A. Szybiak, *On the asymptotic behaviour of the solution of the equation* $u''_{xx}-u'_t+c(x)u = 0$, Bull. Acad, Polon. Sci. Sér. des sci. math., astr. et phys. 7 (1959), p. 183-186.

Reçu par la Rédaction le 13. 5. 1960