ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1971)

Sur une équation différentielle du premier ordre à argument fonctionnel

par K. Zima (Rzeszów)

Dans ce travail nous étudions le problème de Cauchy:

$$(1)\qquad \begin{aligned} & y'(t) = f\big(t, y(h(t))\big) \quad \text{pour } t\in\langle 0, \infty), \\ & y(0) = \eta \end{aligned}$$

pour lequel nous admettons les hypothèses suivantes:

1° La fonction $h(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et $0 \leqslant h(t) < \infty$:

2° La fonction $f(t, y)$ est continue dans l'ensemble $D = \{(t, y): t\in\langle 0, \infty), -\infty < y < +\infty\}$.

3° Il existe une fonction $\beta(t) > 0$, continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ telle que $|f(t, y)| \leqslant \beta(t)\cdot[|y|+1]$ et que $\int_0^\infty \beta(t)dt = \nu < +\infty$.

Soit $a(t) \overset{\text{def}}{=} \beta(t)\cdot\left[1-\frac{1}{\nu}\int_0^t \beta(s)ds\right]^{-1}$ Sur les fonctions $a(t)$ et $h(t)$ nous admettons encore les deux hypothèses suivantes:

4° $\int_{h(t)}^t a(s)ds \geqslant \gamma > -\infty$ pour $t\in\langle 0, \infty)$.

5° Il existe un nombre $\lambda_0 > 1/\nu$ tel que

$$\sup_{t\in\langle 0,\infty)} \{(e^{-\lambda_0 \int_{h(t)}^t a(s)ds}):(e^{\frac{1}{\nu}\int_0^t a(s)ds})\} < \lambda_0.$$

Remarque. Puisque $a(t) > 0$ pour $t\in\langle 0, \infty)$, on voit aisément que si $h(t) \leqslant t$ (c'est-à-dire si l'équation (1) est une équation avec retard) les conditions 4° et 5° sont automatiquement remplies.

Ces hypothèses étant admises, nous allons prouver que le problème (1) admet au moins une solution de classe C^1, définie dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. Nous nous occuperons aussi de l'unicité de la solution du problème de la forme (1), ainsi que de sa dépendance continue de la condition initiale. Nos raisonnements s'appuient sur une idée continue dans le travail [1] de M. A. Bielecki et constituent un développement de cette idée. Le résultat que nous obtenons ici généralise ceux qui ont été établis dans les travaux [2], [3] et [4].

1. Un espace du type de Banach et un critère de compacité dans cet espace. Soient une fonction $L(t) \geqslant 0$ continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et un nombre $\lambda = \mathrm{const} > 0$. Par $E_{L,\lambda}$ nous désignerons la famille des fonctions $x(t)$, continues dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, telles que

$$\sup_{t\in\langle 0,\infty)} \{|x(t)|\cdot e^{-\lambda\int_0^t L(s)ds}\} < +\infty. \tag{2}$$

L'ensemble $E_{L,\lambda}$ est fermé par rapport à l'addition et à la multiplication par un scalaire. Si l'on introduit dans cet ensemble la norme

$$\|x\|_{L,\lambda} = \sup_{\langle 0,\infty)} \{|x(t)|\cdot e^{-\lambda\int_0^t L(s)ds}\} \tag{3}$$

et la métrique

$$\varrho(x, y) = \|x-y\|_{L,\lambda} = \sup_{\langle 0,\infty)} \{|x(t)-y(t)|\cdot e^{-\lambda\int_0^t L(s)ds}\} \tag{4}$$

l'ensemble $E_{L,\lambda}$ muni de l'addition, de la multiplication par un scalaire, de la norme (3) et de la métrique (4) devient un espace linéaire, normé et complet, donc un espace de Banach. Nous désignerons cet espace par $B_{L,\lambda}$. Notons encore le simple fait que $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ entraîne $E_{L,\lambda_2} \subset E_{L,\lambda_1}$.

2. Un critère de compacité. Nous établirons maintenant une condition suffisante pour que l'ensemble $A \subset E_{L,\lambda}$ soit compact dans l'espace $B_{L,\lambda}$. Ce critère peut être énoncé sous forme du lemme suivant:

LEMME 1. *Soit* $\int_0^\infty L(s)ds = +\infty$ *et* $A \subset E_{L,\lambda}$. *Si*

(i) *les fonctions* $x(t)\in A$ *sont presque équicontinues dans l'intervalle* $\langle 0, \infty)$ (*c'est-à-dire équicontinues dans tout intervalle* $\langle 0, T\rangle$, $T < \infty$),

(j) *il existe un nombre* ω, $0 < \omega < \lambda$, *tel que l'ensemble* A *est borné dans l'espace* $B_{L,\omega}$, *l'ensemble* A *est compact dans l'espace* $B_{L,\lambda}$.

Démonstration du lemme. De l'hypothèse (j) il résulte que les fonctions qui appartiennent à l'ensemble A sont bornées dans leur ensemble au sens ordinaire dans tout intervalle $\langle 0, T\rangle$. En vertu de l'hypothèse (i) elles sont équicontinues dans chacun de ces intervalles. En s'appuyant sur le théorème d'Arzelà et sur la méthode diagonale on démontre aisément que toute suite infinie $\{x_n(t)\}$ de fonctions appartenant à l'ensemble A contient une suite partielle presque uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0. \infty)$. Pour établir le lemme 1 il suffit de prouver que toute suite, presque uniformément convergente dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, de termes appartenant à l'ensemble A est convergente au sens de la norme dans l'espace $B_{L,\lambda}$. Soit donc $\{x_n(t)\}$, $x_n(t) \in A$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, une suite convergente presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ vers la fonction $\tilde{x}(t)$. Évidemment $\tilde{x}(t) \in A$ et, en outre,

$$\|x_n - \tilde{x}\|_{L,\lambda} = \sup_{\langle 0,\infty)} \{|x_n(t) - \tilde{x}(t)| \cdot e^{-\lambda \int_0^t L(s)ds}\} \leqslant \sup_{t \in \langle 0,T\rangle} \{|x_n(t) - \tilde{x}(t)| e^{-\lambda \int_0^t L(s)ds}\} +$$

$$+ \sup_{t \geqslant T} \{|x_n(t) - \tilde{x}(t)| e^{-\lambda \int_0^t L(s)ds}\} \leqslant \sup_{t \in \langle 0,T\rangle} |x_n(t) - \tilde{x}(t)| + 2Me^{(\omega-\lambda)\int_0^T (s)ds}$$

où M est le nombre par lequel l'ensemble A est borné dans l'espace $B_{L,\omega}$. On obtient ainsi la limitation

$$\|x_n - \tilde{x}\|_{L,\lambda} \leqslant \sup_{t \in \langle 0,T\rangle} |x_n(t) - \tilde{x}(t)| + 2M \cdot e^{(\omega-\lambda)\int_0^T L(s)ds}. \tag{5}$$

Puisque $\omega - \lambda < 0$, $\int_0^\infty L(s)ds = +\infty$ et que la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers la fonction $\tilde{x}(t)$ presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, on a — en vertu de la limitation (5) — $\lim_{n\to\infty} \|x_n - \tilde{x}\|_{L,\lambda} = 0$. La compacité de l'ensemble A est ainsi établie, ce qui achève la démonstration du lemme 1.

Remarque. On voit aisément que dans l'énoncé de l'hypothèse (j) l'espace $B_{L,\omega}$ ne peut être remplacé par l'espace $B_{L,\lambda}$, même si l'on admet que les fonctions appartenant à l'ensemble A satisfont à la condition de Lipschitz avec la même constante $L(T)$ dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$, $T \in \langle 0, \infty)$. Le simple exemple suivant le prouve.

Considérons la suite auxiliaire $\{\xi_n(t)\}$ définie comme il suit:

$$\xi_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t \in \langle 0, n\rangle, \\ t - n & \text{pour } t \in \langle n, n+1\rangle, \\ 2 + n - t & \text{pour } t \in \langle n+1, n+2\rangle, \\ 0 & \text{pour } t \geqslant n+2 \end{cases}$$

et soit A une suite dont les éléments sont $x_n(t) = \xi_n(t) e^{\lambda \int_0^t L(s)ds}$. L'ensemble A est borné dans l'espace $B_{L,\lambda}$, car $\|x_n\|_{L,\lambda} = 1$ pour tout n. De plus $\|x_n - x_m\|_{L,\lambda} = 1$ pourvu que $n \neq m$, d'où il résulte que la suite $\{x_n(t)\}$ ne contient aucune suite partielle convergente dans l'espace $B_{L,\lambda}$.

LEMME 2. *Si $F(t) > 0$ est une fonction continue dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ et si $\int_0^\infty F(t)dt = \varkappa < \infty$, il existe une fonction $\varphi(t)$, continue et non négative dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$, telle que*

$$(6) \qquad F(t) \equiv \varphi(t)\cdot e^{-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t \varphi(s)ds} \quad \textit{pour } t\in\langle 0, \infty) \textit{ et } \int_0^\infty \varphi(s)ds = +\infty.$$

Démonstration. La condition (6) relative à la fonction $\varphi(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$(6') \qquad F(t) = -\varkappa\left(-\frac{1}{\varkappa}\varphi(t)\cdot e^{-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t \varphi(s)ds}\right) = -\varkappa[e^{-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t \varphi(s)ds}]',$$

d'où

$$(7) \qquad 1-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t F(s)ds = e^{-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t \varphi(s)ds}$$

De l'égalité (7) il résulte que la fonction cherchée $\varphi(t)$ est de la forme

$$\varphi(t) = F(t)\cdot\left[1-\frac{1}{\varkappa}\int_0^t F(s)ds\right]^{-1}$$

et que $\int_0^\infty \varphi(s)ds = +\infty$.

LEMME 3. *Soit τ un nombre quelconque satisfaisant à l'inégalité $\tau > 1/\nu$, où — d'accord avec l'hypothèse 3° — $\nu = \int_0^\infty \beta(t)dt$. Soit encore $a(t)$ une solution de l'équation* (6) *avec $F(t) = \beta(t)$ et $\varkappa = \nu$.* (En vertu du lemme 2 on a $\int_0^\infty a(t)dt = +\infty$.) *Sous les hypothèses* 1° - 4° *l'opérateur Φ défini comme il suit:*

$$(8) \qquad (\Phi x)(t) = \eta+\int_0^t f\big(s, x(h(s))\big)ds, \quad t\in\langle 0, \infty).$$

est pleinement continu dans l'espace $B_{a,\tau}$.

Démonstration. Soit A un sous-ensemble quelconque borné de l'espace $B_{a,\tau}$ et soit $\|x\|_{a,\tau} \leqslant M$ pour $x(t)\in A$. Nous allons montrer que l'ensemble $\Phi(A)$ est compact dans l'espace $B_{a,\tau}$. Remarquons d'abord que, en vertu de l'hypothèse 4°, il existe un nombre $K > 0$ tel que $e^{-\tau\int_{h(t)}^t (u)du} \leqslant K$ pour $t\in\langle 0, \infty)$. Soit donc $x(t)\in A$. Pour la fonction $(\Phi x)(t)$

on obtient la limitation

$$(9)\quad |(\Phi x)(t)| \leqslant |\eta| + \int_0^t \beta(s)\cdot\big[|x(h(s))|+1\big]ds$$

$$= |\eta| + \int_0^t a(s)\cdot e^{-1/\nu\int_0^s a(u)du}\cdot\big[1+|x(h(s))|\big]\,ds$$

$$= |\eta| + \frac{1}{\tau-1/\nu}\int_0^t \left\{\left(\tau-\frac{1}{\nu}\right)a(s)\,e^{(\tau-1/\nu)\int_0^s a(u)du}\left(\big[1+|x(h(s))|\big]\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-\tau\int_0^{h(s)} a(u)du}\right)e^{-\tau\int_{h(s)}^s a(u)du}\Bigg\}\,ds \leqslant |\eta| + \frac{K(1+\|x\|_{a,\tau})}{\tau-1/\nu}\,e^{(\tau-1/\nu)\int_0^t a(u)du}$$

De l'inégalité (9) il résulte donc la limitation

$$(10)\qquad \left|(\Phi x)(t)\cdot e^{-(\tau-1/\nu)\int_0^t a(u)du}\right| \leqslant |\eta| + \frac{K(1+\|x\|_{a,\tau})}{\tau-1/\nu} \leqslant |\eta| + \frac{K(1+M)}{\tau-1/\nu}.$$

Donc, si $x(t)\in E_{a,\tau}$, on a $(\Phi x)(t)\in E_{a,\tau-1/\nu}\subset E_{a,\tau}$. L'inégalité (10) prouve, de plus, que l'image $\Phi(A)$ de l'ensemble A, borné dans l'espace $B_{a,\tau}$, est bornée dans l'espace $B_{a,\tau-1/\nu}$. Pour établir la compacité de l'ensemble $\Phi(A)$ dans l'espace $B_{a,\tau}$ il suffit, en vertu du lemme 1, de démontrer que les fonctions appartenant à l'ensemble $\Phi(A)$ sont presque équicontinues dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$. Supposons donc que $(\Phi x)(t)\in\Phi(A)$. Alors on a la limitation

$$(11)\qquad |(\Phi x)(t_1)-(\Phi x)(t_2)| \leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2}\Big|f\big(s,x(h(s))\big)\Big|ds\right|.$$

$$\leqslant \left|\int_{t_1}^{t_2} a(s)\cdot e^{-1/\nu\int_0^s a(u)du}\big[1+|x(h(s))|\big]ds\right|$$

$$\leqslant \frac{K(1+M)}{\tau-1/\nu}\left|e^{(\tau-1/\nu)\int_0^{t_1} a(u)du}-e^{(\tau-1/\nu)\int_0^{t_2} a(u)du}\right|$$

$$\leqslant \frac{K(1+M)}{\tau-1/\nu}\cdot|\psi(t_1)-\psi(t_2)|,$$

où $\psi(t) = e^{(\tau-1/\nu)\int_0^t a(u)du}$. Puisque la fonction $\psi(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$ et ne dépend pas du choix de l'élément $x(t)$ de l'ensemble A, il résulte de l'inégalité (11) que les fonctions $(\Phi x)(t)$ appartenant 1 l'ensemble $\Phi(A)$ sont presque équicontinues dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$. En vertu du lemme 1 l'ensemble $\Phi(A)$ est compact dans l'espace $B_{a,\tau}$. Par conséquent l'opérateur Φ est compact dans l'espace $B_{a,\tau}$. Nous allons encore prouver que Φ est un opérateur continu dans $B_{a,\tau}$. Soit $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_{a,\tau} = 0$, $x_0(t)$, $x_n(t) \in B_{a,\tau}$ pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ Il s'agit de montrer que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi x_n - \Phi x_0\|_{a,\tau} = 0$. En vertu de la définition de la norme dans l'espace $B_{a,\tau}$ l'égalité $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\|_{a,\tau} = 0$ implique que la suite $\{x_n(t)\}$ converge vers la fonction $x_0(t)$ presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. La continuité des fonctions $h(t)$, $f(t, y)$ et la forme de l'opérateur Φ permettent de conclure que la suite $(\Phi x_n)(t)$ converge presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ vers la fonction $(\Phi x_0)(t)$. On a ensuite

$$\begin{aligned}
\|\Phi x_n - \Phi x_0\|_{a,\tau} &= \sup_{\langle 0,\infty)} \{|(\Phi x_n)(t) - (\Phi x_0)(t)| \cdot e^{-\tau \int_0^t a(u)du}\} \\
&\leqslant \sup_{\langle 0,T\rangle} |(\Phi x_n)(t) - (\Phi x_0)(t)| + \sup_{t \geqslant T} |(\Phi x_n)(t) - \eta| \cdot e^{-\tau \int_0^t a(u)du} + \\
&\quad + \sup_{t \geqslant T} |(\Phi x_0)(t) - \eta| \cdot e^{-\tau \int_0^t a(u)du} \\
&\leqslant \sup_{\langle 0,T\rangle} |(\Phi x_n)(t) - (\Phi x_0)(t)| + K_1 \cdot e^{-1/\nu \int_0^T a(u)du},
\end{aligned}$$

$$\text{où } K_1 \leqslant \frac{K(2 + \|x_n\|_{a,\tau} + \|x_0\|_{a,\tau})}{\tau - 1/\nu}.$$

Finalement on obtient donc la limitation

$$\|\Phi x_n - \Phi x_0\|_{a,\tau} \leqslant \sup_{\langle 0,T\rangle} |(\Phi x_n)(t) - (\Phi x_0)(t)| + K_1 \cdot e^{-\frac{1}{\nu} \int_0^T a(u)du} \tag{12}$$

Puisque la suite $\{(\Phi x_n)(t)\}$ converge presque uniformément dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$ vers la fonction $(\Phi x_0)(t)$ et que $\int_0^\infty a(u)du = +\infty$, on voit, en tenant compte de l'inégalité (12), que $\lim_{n\to\infty} \|\Phi x_n - \Phi x_0\|_{a,\tau} = 0$. La continuité de l'opérateur Φ a été ainsi établie, ce qui achève la démonstration du lemme 3.

3. Démonstration de l'existence d'une solution de l'équation (1). Le problème (1) est équivalent à l'équation intégrale de la forme

$$y(t) = \eta + \int_0^t f\big(s, y(h(s))\big) ds, \qquad t \in \langle 0, \infty) \tag{13}$$

et toute solution de l'équation (13) est un point fixe de l'opération Φ et inversement. Pour établir l'existence d'une solution du problème (1) il suffit donc de démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Sous les hypothèses* 1° - 5° *l'opérateur* Φ *admet au moins un point fixe dans l'espace* B_{a,λ_0}, λ_0 *étant un nombre quelconque satisfaisant à la condition* 5°.

Démonstration. La condition 5° signifie que l'on a l'inégalité

$$\sup_{\langle 0,\infty)}\{e^{-\lambda_0\int_{h(t)}^{t}a(u)du}\cdot e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^t a(u)du}\}\leqslant\lambda_0-\varepsilon<\lambda_0, \tag{14}$$

ε étant un nombre positif. Désignons par Z la sphère $\|x-\eta\|_{a,\lambda_0}\leqslant R$, contenue dans B_{a,λ_0}, dont le rayon R satisfait à la condition

$$R\geqslant(|\eta|+1)\cdot(\lambda_0-\varepsilon)\cdot\lambda_0^{-1}. \tag{15}$$

L'ensemble Z est borné, fermé et convexe dans B_{a,λ_0}. Nous allons encore prouver que $\Phi(Z)\subset Z$. En effet, soit $x(t)\epsilon Z$. Alors on a l'inégalité $\|x\|_{a,\lambda_0}\leqslant R+|\eta|$ et en outre

$$(16)\quad |(\Phi x)(t)-\eta|$$

$$\leqslant\int_0^t a(s)e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^s a(u)du}\big[1+|x(h(s))|\big]ds$$

$$\leqslant\int_0^t\{a(s)[1+|x(h(s))|]e^{-\lambda_0\int_0^{h(s)}a(u)du}\cdot e^{-\lambda_0\int_{h(s)}^{s}a(u)du}\cdot e^{+\lambda_0\int_0^s a(u)du}\cdot e^{-\frac{1}{\nu}\int_0^s a(u)du}\}ds.$$

$$\leqslant\frac{1+\|x\|_{a,\lambda_0}}{\lambda_0}(\lambda_0-\varepsilon)e^{\lambda_0\int_0^t a(u)du}\leqslant(1+R+|\eta|)(\lambda_0-\varepsilon)\cdot\lambda_0^{-1}\cdot e^{\lambda_0\int_0^t a(u)du}$$

D'où

$$\|\Phi x-\eta\|_{a,\lambda_0}=\sup_{\langle 0,\infty)}\{|(\Phi x)(t)-\eta|\cdot e^{-\lambda_0\int_0^t a(u)du}\}\leqslant(1+R+|\eta|)(\lambda_0-\varepsilon)\cdot\lambda_0^{-1}\leqslant R.$$

Si $x(t)\epsilon Z$, on a donc $(\Phi x)(t)\epsilon Z$, c'est-à-dire $\Phi(Z)\subset Z$. En vertu du théorème du point fixe de Schauder il existe dans l'ensemble Z au moins un point fixe de l'opération Φ. Par conséquent il existe dans l'ensemble Z au moins une solution du problème (1).

Remarque. Les hypothèses 1° et 2° peuvent âtre affaiblies si l'on admet, par exemple, que la fonction $f(t, x(h(t)))$ est localement intégrable dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$ pour toute fonction $x(u)$ continue dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$. Alors le point fixe $x(t)$ de l'opération Φ est une fonction presque absolument continue dans l'intervalle $\langle 0,\infty)$, vérifiant presque partout dans cet intervalle l'équation (1).

4. Existence d'une solution du problème de la forme (1) dans le cas d'un intervalle fini. Admettons les hypothèses suivantes:

1^* $f(t, y)$ est continue dans l'ensemble $\varDelta = \{(t, y) : t \in \langle 0, T\rangle, \ -\infty < y < +\infty\}$.

2^* Il existe une fonction continue et positive $\beta(t)$ telle que $|f(t, y)| \leqslant \beta(t)[|y|+1]$ pour $(t, y) \in \varDelta$.

3^* La fonction $h(t)$ est continue dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ et $0 \leqslant h(t) \leqslant T$, et considérons le problème:

$$\text{(I)} \qquad \begin{aligned} & y'(t) = f\big(t, y(h(t))\big) \quad \text{pour } t \in \langle 0, T\rangle, \\ & y(0) = \eta . \end{aligned}$$

Nous allons montrer que le problème (I) admet au moins une solution de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$. Dans ce but envisageons l'ensemble $\tilde{\varDelta} = \{(t, y) : t \in (T, \infty), \ -\infty < y < +\infty\}$. Les fonctions $f(t, y)$, $\beta(t)$ et $h(t)$, qui interviennent dans le problème (I), peuvent être prolongées sur l'ensemble $\tilde{\varDelta}$ de telle façon que les fonctions prolongées $\tilde{f}(t, y)$, $\tilde{\beta}(t)$ et $\tilde{h}(t)$ satisfassent aux hypothèses 1° - 5° faites sur le problème (1). En particulier, ces prolongements peuvent être de la forme

$$\tilde{f}(t, y) = \begin{cases} f(t, y) & \text{pour } (t, y) \in \varDelta, \\ e^{T-t} \cdot f(T, y) & \text{pour } (t, y) \in \tilde{\varDelta}, \end{cases}$$

$$\tilde{\beta}(t) = \begin{cases} \beta(t) & \text{pour } t \in \langle 0, T\rangle, \\ \beta(T) \cdot e^{T-t} & \text{pour } t \in (T, \infty), \end{cases}$$

$$\tilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{pour } t \in \langle 0, T\rangle, \\ h(T) \cdot e^{T-t} & \text{pour } t \in (T, \infty). \end{cases}$$

On vérifie aisément que les fonctions $\tilde{f}(t, y)$, $\tilde{\beta}(t)$ et $\tilde{h}(t)$ ainsi définies vérifient dans l'ensemble D les hypothèses 1° - 5°; par conséquent le problème

$$\text{(II)} \qquad \begin{aligned} & y'(t) = \tilde{f}\big(t, y(\tilde{h}(t))\big), \quad t \in \langle 0, \infty), \\ & y(0) = \eta \end{aligned}$$

admet — en vertu du théorème 1 — au moins une solution $y_0(t)$ de classe C^1 dans l'intervalle $\langle 0, \infty)$. L'inégalité $0 \leqslant h(t) \leqslant T$ ayant lieu pour $t \in \langle 0, T\rangle$, la fonction $y_0(t)$ satisfait dans l'intervalle $\langle 0, T\rangle$ à l'équation (I).

5. L'unicité de la solution du problème (1). A propos de l'unicité de la solution du problème (1) nous établirons de théorème suivant:

THÉORÈME 2. *Si les fonctions $h(t)$ et $f(t, x)$ satisfont aux hypothèses 1°, 2°, 4° et 5°, et si, au lieu de la condition 3°, est remplie la condition de*

Lipschitz

3^{**} $|f(t, \bar{x})-f(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant \beta(t)|\bar{x}-\bar{\bar{x}}|$ *et* $|f(t, 0)| \leqslant \beta(t)$,

le problème (1) *admet exactement une solution dans l'espace* B_{a,λ_0}.

Démonstration. Si la condition 3^{**} est remplie, la condition 3° l'est aussi et — en vertu du théorème 1 — le problème (1) admet dans l'espace B_{a,λ_0} au moins une solution. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que $x_1(t)$ et $x_2(t)$ soient deux solutions du problème (1) appartenant à l'espace B_{a,λ_0}. On a la limitation suivante:

$$|(\Phi x_1)(t)-(\Phi x_2)(t)|$$
$$= \left|\int_0^t \{f(s, x_1(h(s)))-f(s, x_2(h(s)))\}ds\right| \leqslant \int_0^t \beta(s)|x_1(h(s))-x_2(h(s))|ds$$
$$\leqslant \int_0^t \{a(s)e^{-1/\nu\int_0^s a(u)du}\,[|x_1(h(s))-x_2(h(s))|]\,e^{-\lambda_0\int_0^{h(s)} a(u)du}\cdot e^{-\lambda_0\int_{h(s)}^{s} a(u)du}\times$$
$$\times e^{\lambda_0\int_0^s a(u)du}\}ds \leqslant \frac{\lambda_0-\varepsilon}{\lambda_0}\|x_1-x_2\|_{a,\lambda_0} e^{\lambda_0\int_0^t a(u)du}$$

D'où

$$\{|(\Phi x_1)(t)-(\Phi x_2)(t)|\cdot e^{-\lambda_0\int_0^t a(u)du}\} \leqslant \frac{\lambda_0-\varepsilon}{\lambda_0}\|x_1-x_2\|_{a,\lambda_0}$$

c'est-à-dire $\|\Phi x_1-\Phi x_2\|_{a,\lambda_0} \leqslant \frac{\lambda_0-\varepsilon}{\lambda_0}\|x_1-x_2\|_{a,\lambda_0}$. Comme $0 < \frac{\lambda_0-\varepsilon}{\lambda_0} < 1$, l'opérateur Φ est — sous les hypothèses 1°, 2°, 3^{**}, 4° et 5° — un opérateur contractant dans l'espace B_{a,λ_0}. Par conséquent $x_1 = x_2$.

6. Dépendance continue de la solution du problème (1) de la condition initiale. Si les hypothèses 1°, 2°, 3^{**}, 4° et 5° sont verifiées et si les fonctions $x_1(t)$ et $x_2(t)$ satisfont à l'équation $y'(t) = f(t, y(h(t)))$ et aux conditions initiales $x_1(0) = \eta_1$ et $x_2(0) = \eta_2$, en procédant de même qu'au paragraphe 5 on aura l'inégalité

$$\|\Phi x_1-\Phi x_2\|_{a,\lambda_0} \leqslant |\eta_1-\eta_2| + \frac{\lambda_0-\varepsilon}{\lambda_0}\|x_1-x_2\|_{a,\lambda_0}$$

d'où, en tenant compte des égalités: $\Phi x_1 = x_1$, $\Phi x_2 = x_2$, on tire la limitation

$$\|x_1-x_2\|_{a,\lambda_0} \leqslant \frac{\lambda_0}{\varepsilon}|\eta_1-\eta_2|. \tag{17}$$

Par conséquent, sous les hypothèses 1°, 2°, 3^{**}, 4° et 5° la solution du problème (1) dépend d'une façon continue des conditions initiales dans l'espace B_{a,λ_0}.

Remarque. Les théorèmes établis ci-dessus sur l'unicité et la dépendance continue des conditions initiales des solutions du problème (1) ont un caractère relatif. Ils ne se rapportent qu'aux solutions qui appartiennent à l'espace B_{a,λ_0}. Si l'on ne fait pas sur le problème (1) d'hypothèses supplémentaires, ce problème admet en général, outre les solutions appartenant à l'espace B_{a,λ_0}, des solutions qui ne lui appartiennent pas.

Travaux cités

[1] A. Bielecki, *Une remarque sur la méthode de Banach–Cacciopoli–Tikhonov dans la théorie des équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. III, Vol. IV, No. 5 (1956), p. 261–264.

[2] J. Błaż, *O pewnym układzie równań różniczkowo-całkowych z wyprzedzającym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP w Katowicach, S.M. Nr 4 (1964), p. 85–91.

[3] — *O pewnym równaniu różniczkowym z odchylonym argumentem*, Prace Naukowe Uniwersytetu Śląskiego w Katowicach Nr 2 (Prace Matematyczne I, 1969).

[4] T. Dłotko et M. Kuczma, *Sur une équation différentielle fonctionnelle à argument accéléré*, Coll. Math. 12 (1964), p. 107–114.

Reçu par la Rédaction le 13. 6. 1970