ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Sur la notion de l'espace presque euclidien

par S. Gołąb (Kraków)

Dans un travail inséré dans ce tome MM L. Bieszk et E. Stasiak ont déterminés tous les comitants-densités du tenseur covariant de courbure dans les espaces de Riemann à deux et trois dimensions(1).

Nous allons fixer notre attention aux espaces V_3 non singuliers c'est-à-dire tels que le déterminant

$$\mathfrak{g} = \det(g_{\lambda\mu}) \tag{1}$$

du tenseur métrique $g_{\lambda\mu}$ est différent de zéro:

$$\mathfrak{g} \neq 0. \tag{2}$$

Mais nous ne supposons pas que l'espace V_3 est ordinaire (l'espace riemannien est ordinaire selon la terminologie de J. A. Schouten si la forme quadratique $g_{\lambda\mu}d\xi^\lambda d\xi^\mu$ est positivement définie).

Si $\mathfrak{G}$ représente un comitant algébrique du tenseur de courbure

$$R_{\omega\mu\lambda\nu}, \tag{3}$$

étant une densité, alors le théorème des *MM* Bieszk et Stasiak dit que l'on a

$$\mathfrak{G} = F(\mathfrak{M}), \tag{4}$$

où $\mathfrak{M}$ est une densité de Weyl au poids 4, définie au moyen des formules

$$\begin{aligned} x_1 &= R_{1212}, & x_2 &= R_{1313}, & x_3 &= R_{2323}, \\ x_4 &= R_{1213}, & x_5 &= R_{1223}, & x_6 &= R_{1323}, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\mathfrak{M} = \begin{vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Remarquons que les restantes composantes du tenseur (3) sont dépendan-

(1) L. Bieszk and E. Stasiak, *On density concomitants of the covariant curvature tensor in the two- and three-dimensional Riemann space*, Ann. Polon. Math. 26 (1972), p. 85-93.

tes des six composantes (5) essentielles. Comme $\mathfrak{M}$ est une densité de Weyl ayant la règle de transformation

$$(7) \qquad \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}\cdot|J|^{-4} = \mathfrak{M}\cdot J^{-4},$$

alors nous concluons que le signe

$$(8) \qquad \varepsilon = \operatorname{sgn}\mathfrak{M}$$

est un comitant scalaire du tenseur (3). Bien entendu $\mathfrak{M}$ est en général un champ des densités

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\xi)$$

et, par conséquent, on a aussi

$$(9) \qquad \varepsilon = \varepsilon(\xi),$$

ce qui veut dire que le signe peut changer si le point variable ξ de l'espace V_3 change.

Définition. Si

$$(10) \qquad \mathfrak{M} \equiv 0$$

alors l'espace V_3 sera appelé un *espace presque euclidien.*

Cette dénomination est justifiée parce que si V_3 est euclidien ou pseudo-euclidien, alors $R_{\omega\mu\lambda\nu} = 0$ et tous les x_i $(i = 1, \ldots, 6)$ sont égaux à zéro et l'identité (10) a lieu.

Nous posons la question si un espace d'Einstein non trivial, possédant la propriété

$$(11) \qquad R_{\lambda\mu} = \tau\cdot g_{\lambda\mu} \quad (\tau \neq 0),$$

où $R_{\lambda\mu}$ est le tenseur contracté de Ricci peut être un espace presque euclidien. Supposons (11) et calculons le déterminant $\mathfrak{M}$. Por simplifier les calculs fixons le point ξ_0 et choisissons le système local des coordonnées d'une telle façon afin que la matrice $(g_{\lambda\mu})_0$ prendrait la forme canonique

$$(12) \qquad (g_{\lambda\mu})_0 = 0 \quad \text{pour } \lambda \neq \mu.$$

Calculons dans ce système des coordonnées les composantes du tenseur $R_{\lambda\mu}$. Ce tenseur a (à cause de symétrie) seulement six composantes essentielles. Un calcul simple nous fournit

$$(13) \qquad \begin{aligned} R_{11} &= -x_1 g^{22} - x_2 g^{33}, & R_{12} &= -x_6\cdot g^{33}, \\ R_{22} &= -x_1 g^{11} - x_3 g^{33}, & R_{13} &= x_5\cdot g^{22}, \\ R_{33} &= -x_2 g^{11} - x_3 g^{22}, & R_{23} &= -x_4 g^{11}. \end{aligned}$$

Vu l'inégalité (2) nous avons d'après (12)

$$(14) \qquad \mathfrak{g} = g_{11}\cdot g_{22}\cdot g_{33} \neq 0,$$

d'où

$$g^{\lambda\lambda} = (g_{\lambda\lambda})^{-1} \quad (\lambda = 1, 2, 3). \tag{15}$$

(11) et le deuxième groupe des formules (13) nous donnent

$$x_4 = x_5 = x_6 = 0. \tag{16}$$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{aligned} -\frac{x_1}{g_{22}} - \frac{x_2}{g_{33}} &= \tau \cdot g_{11}, \\ -\frac{x_1}{g_{11}} - \frac{x_3}{g_{33}} &= \tau \cdot g_{22}, \\ -\frac{x_2}{g_{11}} - \frac{x_3}{g_{22}} &= \tau \cdot g_{33}, \end{aligned} \tag{17}$$

nous obtenons les solutions

$$x_1 = -\frac{\tau}{2} g_{11} g_{22}, \quad x_2 = -\frac{\tau}{2} g_{11} g_{33}, \quad x_3 = -\frac{\tau}{2} g_{22} g_{33}, \tag{18}$$

ce qui avec (16) et (14) donne

$$\mathfrak{M} = -\frac{\tau^3}{8} \mathfrak{g}^2. \tag{19}$$

De là il suit premièrement $\mathfrak{M} \neq 0$ et deuxièmement

$$\varepsilon = \operatorname{sgn} \mathfrak{M} = -\operatorname{sgn} \tau. \tag{20}$$

TÉORÈME 1. *Un espace V_3 d'Einstein non trivial ne peut pas être un espace presque euclidien.*

Comme un corollaire immédiat nous obtenons de là le

THÉORÈME 2. *Un espace riemannien V_3 à courbure constante, c'est-à-dire satisfaisant à l'identité*

$$R_{\omega\mu\lambda\nu} = -2\sigma g_{[\omega|\lambda|} \cdot g_{\mu]\nu}, \tag{21}$$

n'étant pas un espace euclidien ($\sigma \neq 0$) ne peut pas être un espace presque euclidien.

Remarquons que, comme on a dans les espaces d'Einstein

$$\tau = \mathrm{Const}, \tag{22}$$

nous obtenons comme conséquence le

THÉORÈME 3. *Si V_3 est un espace einsteinien, alors*

$$\varepsilon(\xi) = \mathrm{Const}. \tag{23}$$

Remarque. Si V_3 est un espace einsteinien trivial ($\tau = 0$), alors la relation $R_{\lambda\mu} = 0$ entraîne la relation $R_{\omega\mu\lambda\nu} = 0$ et, par conséquent, notre V_3 est pseudo-euclidien.

Nous allons montrer maintenant un exemple d'un espace riemannien V_3 qui n'est pas euclidien et qui est en même temps presque euclidien.

Posons dans certain système des coordonnées

$$(24)\qquad g_{11} = \xi^2, \quad g_{22} = C_2, \quad g_{33} = C_3, \quad g_{\lambda\mu} = 0 \quad \text{pour } \lambda \neq \mu$$

où C_2, C_3 sont des constantes différentes de zéro. Si nous calculons pour le tenseur métrique défini par (24) les symboles de Christoffel de deuxième espèce, alors il se montra que tous les symboles évanouissent à l'exception de deux suivants

$$(25)\qquad \left\{ {1 \atop 12} \right\} = \frac{1}{2\xi^2}, \quad \left\{ {2 \atop 11} \right\} = -\frac{1}{2C_2}.$$

Il faut maintenant calculer les composantes du tenseur de courbure

$$(26)\qquad R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = \partial_\omega \left\{ {\nu \atop \mu\lambda} \right\} - \partial_\mu \left\{ {\nu \atop \omega\lambda} \right\} + \left\{ {\nu \atop \omega\alpha} \right\} \left\{ {\alpha \atop \mu\lambda} \right\} - \left\{ {\nu \atop \mu\alpha} \right\} \cdot \left\{ {\alpha \atop \omega\lambda} \right\}.$$

Après une suite des calculs laborieux on constate que

$$(27)\qquad x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0,$$

tandis que

$$(28)\qquad x_1 = R_{1212} = g_{22} R_{121}{}^2 = C_2 \cdot \left(-\frac{1}{4C_2\xi^2} \right) = -\frac{1}{4\xi^2} \neq 0.$$

On voit de là que $\mathfrak{M} = 0$, mais $R_{1212} \neq 0$ ce qui montre le suivant

THÉORÈME 4. *Ils existent des espaces de Riemann V_3 qui ne sont pas euclidiens et en même temps sont presque euclidiens.*

On peut démontrer que le rang r de la matrice

$$\begin{Vmatrix} x_1 & x_4 & x_5 \\ x_4 & x_2 & x_6 \\ x_5 & x_6 & x_3 \end{Vmatrix}$$

est un invariant. Dans l'exemple (24) nous avons $r = 1$ d'après (27) et (28). M. L. Bieszk a construit un tel exemple d'un V_3 presque euclidien pour lequel on a $r = 2$. Il suffit de prendre pour le tenseur métrique le tenseur suivant:

$$g_{ij} = 0 \quad \text{pour } i \neq j, \quad g_{11} = C_1, \quad g_{22} = C_2,$$

où C_1, C_2 sont des constantes différentes de zéro et

$$g_{33} = g_{33}(\xi^1, \xi^2) = \xi^1 + (\xi^2)^2.$$

Dans ce cas un calcul simple nous fournit:

$$x_1 = x_4 = x_5 = 0, \quad x_2 \cdot x_3 - x_6^2 = -\frac{2}{g_{33}{}^2} \neq 0$$

ce qui montre que $r = 2$.

On sait que $\mathfrak{g}$ est une densité de Weyl au poids 2

$$\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \cdot J^{-2}.$$

Il suit de là que

$$\bar{\mathfrak{g}}^2 = \mathfrak{g}^2 \cdot J^{-4}, \tag{29}$$

ce qui confronté avec (7) permet de conclure que

$$\varrho \overset{\text{df}}{=} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{g}^2} \tag{30}$$

est un champ scalaire. On sait d'autre part que la courbure scalaire $\varkappa$ de l'espace V_3, définie par la formule

$$\varkappa \overset{\text{df}}{=} \frac{R_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu}}{3} \tag{31}$$

représente aussi un scalaire. Les scalaires ϱ et $\varkappa$ sont, d'après la définition, des comitants différentiels de deuxième ordre du tenseur $g_{\lambda\mu}$. Il se pose donc le problème quel est le rapport entre ϱ et $\varkappa$, notamment s'ils ne sont pas par hazard dépendants. Or dans le cas où V_3 est einsteinien nous avons

$$\varkappa = \frac{\tau}{3} \cdot g_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = \frac{\tau \cdot 3}{3} = \tau,$$

tandis que ϱ, vu la formule (19) est égal à

$$\varrho = -\frac{\tau^3}{8} \cdot \frac{\mathfrak{g}^2}{\mathfrak{g}^2} = -\frac{\tau^3}{8}.$$

On a donc dans ce cas là

$$\varrho = -\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^3.$$

Cette relation ne possède pas un caractère général, parce que dans l'exemple envisagé plus haut nous avons $\varrho = 0$, tandis que $\varkappa$ n'est pas égal à zéro comme le suivant calcul le montre. Nous avons

$$\varkappa = \tfrac{1}{3} R_{\lambda\mu} g^{\lambda\mu} = \sum_{\lambda} \tfrac{1}{3} R_{\lambda\lambda} g^{\lambda\lambda} = \tfrac{1}{3} \left\{ \frac{R_{11}}{\xi^2} + \frac{R_{22}}{C_2} + \frac{R_{33}}{C_3} \right\}.$$

En appliquant les formules (13) ce qui est admissible parce que les relations (12) sont satisfaites et les égalités (27) et (28) nous obtenons

$$\varkappa = -\tfrac{1}{3}\left\{\frac{x_1}{C_2}+\frac{x_1}{\xi^2}\right\} = \frac{1}{12\xi^2}\left(\frac{1}{C_2}+\frac{1}{\xi^2}\right) \neq 0.$$

ce qui montre qu'une relation de la forme

$$\varrho = f(\varkappa)$$

ne peut pas avoir lieu. Nous pouvons donc énoncer le

THÉORÈME 5. *Les comitants scalaires* (30) *et* (31) *du tenseur métrique* $g_{\lambda\mu}$ *dans* V_3 *sont en général indépendants.*

Nous nous occuperons d'une généralisation de la notion des espaces presque euclidiens pour les dimensions plus élevées dans une note ultérieure.

Reçu par la Rédaction la 25. 3. 1971