

Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires

par A. LASOTA et Z. OPIAL (Kraków)

Le présent travail constitue une contribution à l'étude du problème d'existence des solutions périodiques des équations différentielles ordinaires. Dans la première partie nous exposons une méthode générale (Théorème 1) qui dans les deux parties suivantes va nous permettre d'établir toute une série des théorèmes d'existence des solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles du premier ordre, des équations différentielles d'ordre quelconque et, en particulier, des équations différentielles du second ordre. Cette méthode consiste à comparer d'une certaine façon le système non-linéaire donné (ou l'équation non-linéaire donnée) à un système (ou à une équation) linéaire homogène ce qui fait du présent article une continuation des nos travaux antérieurs [9] et [10] où l'on appliquait cette méthode au problème d'existence des solutions du problème d'interpolation pour les équations différentielle d'ordre quelconque.

1. Exposé de la méthode.

1. Rappelons qu'une fonction $f(t, x_1, \dots, x_m)$ définie dans l'espace cartésien réel $E^{m+1} = (-\infty, +\infty) \times \dots \times (-\infty, +\infty)$ à $(m+1)$ dimensions satisfait à la condition de Carathéodory si

(i) $f(t, x_1, \dots, x_m)$ est mesurable par rapport à t , quels que soient les x_1, \dots, x_m ;

(ii) $f(t, x_1, \dots, x_m)$ est continue par rapport à l'ensemble de variables x_1, \dots, x_m pour tout t fixé.

Envisageons le système d'équation différentielles

$$(1) \quad x'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t, x) x_j + b_i(t, x) \quad (i = 1, \dots, m)$$

où l'on a posé pour abrégé $x = (x_1, \dots, x_m)$. Supposons que les fonctions $a_{ij}(t, x), b_i(t, x)$ ($i, j = 1, \dots, m$) soient définies dans tout l'espace E^{m+1} et qu'elles y satisfassent à la condition de Carathéodory.

Soit de plus

$$(2) \quad x'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t)x_j \quad (i = 1, \dots, m)$$

un système d'équations différentielles linéaires homogènes dont les coefficients $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, m$) sont supposés définis dans tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$.

Pour un ω positif désignons par $L(\omega)$ l'espace de toutes les fonctions d'une variable réelle, périodiques de période ω et sommables dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. On identifie, comme d'habitude, deux fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble de mesure nulle. Dans l'espace $L(\omega)$ nous utiliserons la notion de la convergence faible introduite de la manière suivante: on dit qu'une suite $\{a_n(t)\} \subset L(\omega)$ converge faiblement vers une fonction $a(t) \in L(\omega)$ si l'on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t a_n(s) ds = \int_0^t a(s) ds$$

uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. De façon évidente toute combinaison linéaire $\{\alpha a_n(t) + \beta b_n(t)\}$ de deux suites $\{a_n(t)\}$, $\{b_n(t)\}$ qui convergent faiblement vers $a(t)$ et $b(t)$ respectivement converge faiblement vers la fonction $\alpha a(t) + \beta b(t)$. De même, pour toute constante a la suite de fonctions $\{a_n(t) = a\}$ converge faiblement vers $a(t) = a$.

Si pour les fonctions $a_n(t), b(t) \in L(\omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) on a $a_n(t) \leq b(t)$ presque partout dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ et si la suite $a_n(t)$ converge faiblement vers une limite $a(t)$, on a alors $a(t) \leq b(t)$ presque partout dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. En effet, les fonctions

$$\varphi_n(t) = \int_0^t (b(s) - a_n(s)) ds \quad (n = 1, 2, \dots)$$

sont par l'hypothèse non-décroissantes et pour $n \rightarrow \infty$ la suite $\{\varphi_n(t)\}$ converge uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ vers la fonction absolument continue

$$\varphi(t) = \int_0^t (b(s) - a(s)) ds$$

qui, elle aussi, est non-décroissante. On a donc presque partout dans $\langle 0, \omega \rangle$

$$0 \leq \varphi'(t) = b(t) - a(t).$$

Désignons par $L_{mn}(\omega)$ l'espace de matrices $\{a_{ij}(t)\}$ à m lignes et n colonnes dont les éléments $a_{ij}(t)$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) appartiennent à l'espace $L(\omega)$. On dit qu'une suite de matrices $\{a_{ij}^1(t)\}, \{a_{ij}^2(t)\}, \dots$ de

l'espace $L_{mn}(\omega)$ converge faiblement vers une matrice $(a_{ij}(t))$ également de cet espace si les suites de fonctions $\{a_{ij}^k(t)\}$ ($k = 1, 2, \dots$) convergent faiblement vers $a_{ij}(t)$, quels que soient les indices i, j ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$).

Un ensemble de matrices $A \subset L_{mn}(\omega)$ sera dit *faiblement fermé* si la limite de toute suite faiblement convergente de matrices de A appartient aussi à A . De même, on dira qu'un ensemble $A \subset L_{mn}(\omega)$ est *borné* s'il existe une fonction $p(t) \in L(\omega)$ telle que les inégalités $|a_{ij}(t)| \leq p(t)$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$) aient lieu pour toutes les matrices $(a_{ij}(t))$ de l'ensemble A .

2. THÉORÈME 1. *Soit $A \subset L_{mn}(\omega)$ un ensemble de matrices, borné, faiblement fermé et tel que pour toute matrice $(a_{ij}(t)) \in A$ le système d'équations (2) n'admette aucune solution périodique de période ω autre que la solution identiquement nulle.*

On suppose en plus que les fonctions $a_{ij}(t, x), b_i(t, x)$ ($i, j = 1, \dots, m$) satisfaisant à la condition de Carathéodory sont périodiques en t de période ω et

$$(3) \quad (a_{ij}(t, x(t))) \in A,$$

quelle que soit la fonction $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ continue dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ et périodique de période ω , et

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^\omega \sup_{|y| \leq n} |b(t, y)| dt = 0, \quad |y| = \sum_{i=1}^m |y_i|, \quad |b| = \sum_{i=1}^m |b_i|.$$

Dans ces hypothèses il existe au moins une solution du système (1) périodique de période ω .

Le second membre du système (1) étant supposé périodique en t de période ω il suffit d'envisager ce système seulement dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ et de montrer qu'il existe au moins une solution $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ de ce système telle que

$$(5) \quad x_i(0) = x_i(\omega) \quad (i = 1, \dots, m).$$

Par l'hypothèse pour toute matrice $(a_{ij}(t)) \in A$ le système (2) n'admet qu'une seule solution $x(t)$ satisfaisant à la condition (5), à savoir la solution identiquement nulle.

3. LEMME. *Dans les hypothèses du théorème 1 pour toute matrice $(a_{ij}(t))$ de l'ensemble A et toute suite de fonctions $b_1(t), \dots, b_m(t)$ appartenant à $L(\omega)$ il existe dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ exactement une solution $x(t)$ du système d'équations différentielles linéaires*

$$(6) \quad x'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t)x_j + b_i(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

satisfaisant aux conditions (5). Cette solution satisfait en plus à l'inégalité

$$|x(t)| \leq \lambda \int_0^{\omega} |b(t)| dt$$

où λ est une constante positive indépendante du choix de la matrice $(a_{ij}(t))$ et des fonctions $b_1(t), \dots, b_m(t)$.

Démonstration. La solution générale du système (6) est de la forme

$$(7) \quad x_i(t) = \sum_{j=1}^m C_j u_{ij}(t) + v_i(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

où $(u_{1j}(t), \dots, u_{mj}(t))$ ($j = 1, \dots, m$) est un système fondamental de solutions du système homogène (2) et $(v_1(t), \dots, v_m(t))$ est une solution particulière du système (6). Pour une solution

$$y_i(t) = \sum_{j=1}^m C_j u_{ij}(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

du système (2) les conditions (5) se ramènent au système d'équations linéaires homogènes

$$(8) \quad \sum_{j=1}^m C_j (u_{ij}(0) - u_{ij}(\omega)) = 0 \quad (i = 1, \dots, m).$$

Par l'hypothèse la solution identiquement nulle est une solution unique satisfaisant à la condition (5) et, par suite, à (8). De (8) il vient donc $C_1 = \dots = C_m = 0$. On a par conséquent

$$(9) \quad \text{Det}(u_{ij}(0) - u_{ij}(\omega)) \neq 0.$$

D'autre part, pour une solution (7) du système (6) les conditions (5) se ramènent au système d'équations linéaires suivant

$$\sum_{j=1}^m C_j (u_{ij}(0) - u_{ij}(\omega)) = v_i(\omega) - v_i(0) \quad (i = 1, \dots, m)$$

qui, en vertu de (9), détermine de façon univoque les constantes C_1, \dots, C_m et, par conséquent, la solution périodique cherchée du système (6). La première partie de la conclusion du lemme se trouve ainsi démontrée.

Passons à la seconde. Supposons qu'il n'existe pas de constante ayant les propriétés demandées. Pour tout entier positif n il existe donc

une matrice $(a_{ij}^n(t)) \in A$, une suite de fonctions $b_1^n(t), \dots, b_m^n(t)$ de l'espace $L(\omega)$ et une solution $x^n(t) = (x_1^n(t), \dots, x_m^n(t))$ du système

$$x_i' = \sum_{j=1}^m a_{ij}^n(t) x_j + b_i^n(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

satisfaisant aux conditions (5) et telle que

$$\max_{\langle 0, \omega \rangle} |x^n(t)| > n \int_0^\omega |b^n(t)| dt.$$

En posant $\|x(t)\| = \max_{\langle 0, \omega \rangle} |x(t)|$ et

$$y_i^n(t) = x_i^n(t) / \|x^n(t)\|, \quad \varepsilon_i^n(t) = b_i^n(t) / \|x^n(t)\| \quad (i = 1, \dots, m)$$

on obtient

$$(10) \quad \frac{d}{dt} y_i^n(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij}^n(t) y_j^n(t) + \varepsilon_i^n(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

et, de façon évidente

$$(11) \quad \|y^n(t)\| = 1, \quad \int_0^\omega |\varepsilon^n(t)| dt < \frac{1}{n}.$$

Par l'intégration de (10) on tire

$$(12) \quad y_i^n(t) = y_i^n(0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t y_j^n(s) da_{ij}^n(s) + \int_0^t \varepsilon_i^n(s) ds \quad (i = 1, \dots, m)$$

où l'on a posé

$$a_{ij}^n(t) = \int_0^t a_{ij}^n(s) ds \quad (i, j = 1, \dots, m).$$

Comme $(a_{ij}^n(t)) \in A$ et l'ensemble A est borné, il existe une fonction sommable $p(t)$ telle que

$$(13) \quad |a_{ij}^n(t)| \leq p(t) \quad (i, j = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots)$$

dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. Donc, les fonctions $a_{ij}^n(t)$ sont absolument équicontinues. Par conséquent, en remplaçant s'il y a lieu la suite envisagée par une suite partielle convenablement choisie, on peut supposer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{ij}^n(t) = a_{ij}(t) \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, les fonctions $a_{ij}(t)$ étant absolument continues dans cet intervalle. Donc, les fonctions $a_{ij}(t) = a_{ij}'(t)$

$(i, j = 1, \dots, m)$ sont les limites faibles de suites $\{a_{ij}^n(t)\}$. Comme l'ensemble A est supposé faiblement fermé, on a en plus $(a_{ij}(t)) \in A$.

Posons dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$

$$E_i^n(t) = \int_0^t \varepsilon_i^n(s) ds \quad (i = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots).$$

En vertu de la seconde des inégalités (11) on a

$$(14) \quad \|E^n(t)\| = \max_{\langle 0, \omega \rangle} \sum_{i=1}^m |E_i^n(t)| < \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

et, par conséquent

$$(15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E_i^n(t) = 0 \quad (i = 1, \dots, m)$$

uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. D'autre part, de (10), de la première des conditions (11) et des inégalités (13) on tire

$$\left| \frac{d}{dt} (y_i^n(t) - E_i^n(t)) \right| \leq p(t) \quad (n = 1, 2, \dots; i = 1, \dots, m; 0 \leq t \leq \omega)$$

c'est-à-dire

$$(16) \quad \left| \frac{d}{dt} (y^n(t) - E^n(t)) \right| \leq mp(t) \quad (n = 1, 2, \dots; 0 \leq t \leq \omega).$$

Par (11) et (14) les fonctions vectorielles $y^n(t) - E^n(t)$ ($n = 1, 2, \dots$) sont bornées dans leur ensemble, et par (16) elles sont équi continues. Donc, en remplaçant s'il y a lieu cette suite de fonctions par une suite partielle, on peut supposer qu'il existe une fonction $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))$ telle que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (y_i^n(t) - E_i^n(t)) = y_i(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

uniformément dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. Tenant compte de (15) on en obtient immédiatement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_i^n(t) = y_i(t) \quad (i = 1, \dots, m)$$

uniformément dans $\langle 0, \omega \rangle$. En passant ensuite à la limite dans les équations (12) on en tire

$$y_i(t) = y_i(0) + \sum_{j=1}^m \int_0^t y_j(s) da_{ij}(s) \quad (i = 1, \dots, m; 0 \leq t \leq \omega).$$

Les fonctions $y_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) étant absolument continues, on en conclut que

$$(17) \quad y_i'(t) = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t) y_j(t) \quad (i = 1, \dots, m; 0 \leq t \leq \omega)$$

et, comme $x^n(0) = x^n(\omega)$ c'est-à-dire $y^n(0) = y^n(\omega)$ et $\|y^n(t)\| = 1$, on a en même temps

$$\|y(t)\| = 1, \quad y_i(0) = y_i(\omega) \quad (i = 1, \dots, m)$$

ce qui signifie que l'équation (17) admet une solution périodique non identiquement nulle ce qui est en contradiction avec l'hypothèse du lemme.

4. Revenons à la démonstration du théorème 1. Soit C_ω l'espace de fonctions vectorielles $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ continues dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. On définit une application $z = Tx$ de l'espace C_ω dans lui-même de la façon suivante: étant donnée une fonction $x(t) \in C_\omega$ on lui fait correspondre la solution $z(t)$ du système d'équations

$$(18) \quad z'_i = \sum_{j=1}^m a_{ij}(t, x(t)) z_j + b_i(t, x(t)) \quad (i = 1, \dots, m)$$

satisfaisant aux conditions aux limites

$$z_i(0) = z_i(\omega) \quad (i = 1, \dots, m).$$

En vertu du lemme une telle solution existe toujours et est unique.

Pour démontrer notre théorème il suffit évidemment de montrer que l'application $T: C_\omega \rightarrow C_\omega$ qu'on vient de définir admet au moins un point invariant. L'existence d'un tel point va résulter du théorème bien connu de Schauder: nous allons montrer à cet effet qu'il existe dans C_ω une boule fermée B telle que (i) $T(B) \subset B$, (ii) $T(B)$ est relativement compact, (iii) l'application T est continue dans B .

Supposons en effet que pour tout n entier la boule $B_n = \{x \in C_\omega: \|x\| \leq n\}$ ne contienne pas $T(B_n)$. Il existe alors des suites $\{x^n(t)\}$ et $\{z^n(t)\}$ telles que

$$z^n(t) = Tx^n(t), \quad \|z^n(t)\| > n, \quad \|x^n(t)\| \leq n.$$

Mais, en vertu du lemme on a

$$\|z^n(t)\| \leq \lambda \int_0^\omega |b(t, x^n(t))| dt \leq \lambda \int_0^\omega \sup_{|y| \leq n} |b(t, y)| dt \quad (n = 1, 2, \dots).$$

En divisant par n et tenant compte de l'hypothèse (4) on en tire

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\|z^n(t)\|}{n} \leq 0$$

ce qui est en contradiction avec les inégalités $\|z^n(t)\| > n$. Par conséquent, parmi les boules B_1, B_2, \dots on peut choisir une, disons $B = B_k$, pour laquelle $T(B) \subset B$. Nous allons montrer que l'ensemble $T(B)$ est relativement compact. En effet, les fonctions $a_{ij}(t, x(t))$ étant par l'hypo-

thèse bornées par une fonction sommable $p(t)$, du système d'équations (18) on tire

$$|z'(t)| \leq m k p(t) + \sup_{|y| \leq k} |b(t, y)| \quad (i = 1, \dots, m).$$

Donc, les fonctions $|z'(t)|$ sont bornées dans leur ensemble par une fonction sommable et, en plus, $|z(t)| \leq k$. Les fonctions de l'ensemble $T(B)$ sont donc équicontinues et bornées, d'où par le théorème de Arzelà il vient que l'ensemble $T(B)$ est relativement compact.

Il nous reste à démontrer que l'application T est continue dans la boule B . Soit $\{x^n(t)\} \subset B$ une suite de fonctions telle que l'on ait

$$\|x^n(t) - x^0(t)\| \rightarrow 0.$$

Posons $z^n(t) = Tx^n(t)$ ($n = 0, 1, \dots$). On a alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z_i^n(t) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}(t, x^n(t)) z_j^n(t) + b_i(t, x^n(t)), \quad z_i^n(0) = z_i^n(\omega) \\ & \quad (i = 1, \dots, m; n = 0, 1, \dots). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour les fonctions auxiliaires $u^n(t) = z^n(t) - z^0(t)$ on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} u_i^n(t) &= \sum_{j=1}^m a_{ij}(t, x^n(t)) u_j^n(t) + \\ & \quad + \sum_{j=1}^m (a_{ij}(t, x^n(t)) - a_{ij}(t, x^0(t))) x_j^0(t) + b_i(t, x^n(t)) - b_i(t, x^0(t)) \\ & \quad (i = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

et, de même

$$u_i^n(0) = u_i^n(\omega) \quad (i = 1, \dots, m; n = 1, 2, \dots).$$

Du lemme il vient immédiatement

$$\begin{aligned} (19) \quad \|u^n(t)\| &\leq \lambda \|x^0(t)\| \sum_{i,j=1}^m \int_0^\omega |a_{ij}(s, x^n(s)) - a_{ij}(s, x^0(s))| ds + \\ & \quad + \lambda \sum_{i=1}^m \int_0^\omega |b_i(s, x^n(s)) - b_i(s, x^0(s))| ds \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Les matrices $(a_{ij}(t, x^n(t)))$ ($n = 1, 0, \dots$) appartiennent à l'ensemble A . Les fonctions $a_{ij}(t, x^n(t))$ ($i, j = 1, \dots, m; n = 0, 1, \dots$) sont donc bornées dans leur ensemble par une fonction sommable $p(t)$. De même, les fonctions $b_i(t, x^n(t))$ ($i = 1, \dots, m; n = 0, 1, \dots$) sont bornées par la fonction $\sup_{|y| \leq k} |b(t, y)|$, sommable par l'hypothèse (4). Donc, en vertu du théorème bien connu de Lebesgue on peut passer dans (19) à la limite sous les

signes d'intégration (les fonctions $a_{ij}(t, x)$ et $b_i(t, x)$ sont supposées continues par rapport à x) d'où l'on tire

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u^n(t)\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|Tx^n(t) - Tx^0(t)\| = 0.$$

Le théorème 1 se trouve ainsi complètement démontré.

2. Applications aux systèmes d'équations différentielles et aux équations différentielles d'ordre quelconque.

1. Pour appliquer le théorème 1 aux systèmes particuliers d'équations différentielles du premier ordre ou aux équations différentielles d'ordre quelconque on n'a qu'à trouver des ensembles des systèmes ou des équations linéaires satisfaisant à l'hypothèse de ce théorème. A titre d'exemple nous allons établir le théorème suivant:

THÉORÈME 2. Soit $0 = m_0 < m_1 < m_2 < \dots < m_s = m$ une suite croissante de nombres entiers. Nous supposons que les fonctions $a_{ij}(t, x)$ ($i, j = 1, \dots, m$; $x = (x_1, \dots, x_m)$) satisfont pour tout t, x aux inégalités

$$(20) \quad (-1)^{\varepsilon_\nu} \sum_{i,j=m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} a_{ij}(t, x) \lambda_i \lambda_j \geq q(t) \sum_{i=m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} \lambda_i^2$$

$$(\varepsilon_\nu = 0 \text{ ou } 1; \nu = 1, \dots, s; -\infty < \lambda_i < +\infty),$$

$$(21) \quad a_{ij}(t, x) \equiv 0 \quad (m_{\nu-1} < i \leq m_\nu, m_\nu < j; \nu = 1, \dots, s-1),$$

$$|a_{ij}(t, x)| \leq p(t) \quad (i, j = 1, \dots, m)$$

où les fonctions $p(t)$ et $q(t)$ sont mesurables et telles que

$$(22) \quad \int_0^\omega p(t) dt < \infty, \quad \int_0^\omega q(t) dt > 0.$$

On suppose en plus que les fonctions $a_{ij}(t, x)$, $b_i(t, x)$ satisfont aux conditions de Carathéodory, aux conditions (4) et sont périodiques en t de période ω .

Dans ces hypothèses le système d'équations (1) a au moins une solution périodique de période ω .

Démonstration. Soit A l'ensemble de toutes les matrices carrées $(a_{ij}(t))$ aux éléments $a_{ij}(t)$ ($i, j = 1, \dots, m$) mesurables, périodiques de période ω et satisfaisant aux conditions (20), (21) et (22). L'ensemble A est de façon évidente faiblement fermé et borné dans l'espace $L_{mm}(\omega)$. Donc, pour démontrer le théorème 2 il suffit de montrer que pour toute matrice $(a_{ij}(t)) \in A$ le système (2) n'a aucune solution périodique autre que la solution identiquement nulle. Supposons en effet qu'une telle solution périodique $(x_1(t), \dots, x_m(t))$ existe et soit h le plus petit indice

pour lequel $x_h(0) \neq 0$. Pour un ν on a alors $m_{\nu-1} < h \leq m_\nu$ et, en vertu de (21)

$$x'_i(t) = \sum_{j=1}^k a_{ij}(t)x_j, \quad x_i(0) = 0 \quad (i = 1, \dots, k = m_{\nu-1})$$

d'où il vient que le vecteur $(x_1(t), \dots, x_k(t))$ est identiquement nul en tant que solution d'un système linéaire homogène aux valeurs initiales égales à zéro. De là, pour les fonctions $x_{k+1}(t), \dots, x_{m_\nu}(t)$, on obtient le système d'équations

$$(23) \quad x'_i(t) = \sum_{j=m_{\nu-1}+1}^{m_\nu} a_{ij}(t)x_j(t) \quad (i = m_{\nu-1}+1, \dots, m_\nu).$$

Désignons par $B(t)$ la matrice $(a_{ij}(t))$ de coefficients du système (23) et posons pour abrégé $\xi(t) = (x_{m_{\nu-1}+1}(t), \dots, x_{m_\nu}(t))$. Dans l'espace à $l = m_\nu - m_{\nu-1}$ dimensions pour le produit scalaire $(\xi(t), \xi(t))$ on a en vertu de (20)

$$(-1)^{\epsilon_\nu} \frac{d}{dt} (\xi(t), \xi(t)) = 2(-1)^{\epsilon_\nu} (\xi(t), B(t)\xi(t)) \geq 2q(t) (\xi(t), \xi(t))$$

d'où, en divisant par $(\xi(t), \xi(t))$ et en intégrant, on tire, en raison de la seconde des inégalités (22)

$$(-1)^{\epsilon_\nu} (\ln (\xi(0), \xi(0)) - \ln (\xi(\omega), \xi(\omega))) \leq -2 \int_0^\omega q(t) dt < 0$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $\xi(t)$ est périodique de période ω et le théorème 2 se trouve ainsi démontré.

2. La signification de l'hypothèse faite dans l'énoncé du théorème 2 sur la forme des matrices $(a_{ij}(t))$ de coefficients du système envisagé est bien claire: on suppose que, quel que soit le vecteur $x = (x_1, \dots, x_m)$, la matrice $(a_{ij}(t, x))$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & A_s \end{bmatrix}$$

où A_1, \dots, A_s sont des matrices carrées respectivement à $m_1, m_2 - m_1, \dots, m_s - m_{s-1}$ lignes et colonnes, telles que les formes quadratiques respectivement de $m_1, m_2 - m_1, \dots, m_s - m_{s-1}$ variables qui correspondent aux matrices symétriques $\frac{1}{2}(A_1 + A_1^*), \dots, \frac{1}{2}(A_s + A_s^*)$ (A_i^* — matrice transposée de A_i) sont en moyenne définies ou bien positives ou bien négatives;

tous les éléments qui se trouvent au-dessus des matrices A_1, \dots, A_s sont nuls, tandis que tous ceux qui se trouvent au-dessous de ces matrices sont tout à fait arbitraires.

Dans le cas particulier où la matrice $(a_{ij}(t, x))$ se réduit à la matrice A_1 (c'est-à-dire $s = 1$) et la matrice symétrisée $\frac{1}{2}(A_1 + A_1^*)$ correspond à une forme quadratique de m variables définie en moyenne, par exemple négative (c'est-à-dire $\varepsilon_1 = 1$ dans les inégalités (20)), le théorème 2 a une simple interprétation géométrique. Soit en effet $x(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ une solution arbitraire du système (1). On a alors

$$(24) \quad \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m x_i^2(t) = 2 \sum_{i,j=1}^m a_{ij}(t, x(t)) x_i(t) x_j(t) + 2 \sum_{i=1}^m b_i(t, x(t)) x_i(t)$$

d'où il vient immédiatement

$$(25) \quad \left| \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m x_i^2(t) \right| \leq 2p(t) \left(\sum_{i=1}^m |x_i(t)| \right)^2 + 2 \sum_{i=1}^m |b_i(t, x(t))| |x_i(t)|.$$

Posons pour abrégé

$$X(t) = \left(\sum_{i=1}^m x_i^2(t) \right)^{1/2}, \quad R = \max_{\langle 0, \omega \rangle} X(t), \quad r = \min_{\langle 0, \omega \rangle} X(t),$$

$$P = \exp \left(m^2 \int_0^\omega p(s) ds \right)$$

et supposons que R soit suffisamment grand pour que l'on ait (cf. (4))

$$\int_0^\omega \sup_{|y| \leq mR} |b(t, y)| dt \leq R/2P^2.$$

Comme $X(t) \leq |x(t)| \leq mX(t)$ (rappelons que $|x(t)| = |x_1(t)| + \dots + |x_m(t)|$, cf. (4)), on a à plus forte raison

$$(26) \quad \int_0^\omega |b(t, x(t))| dt \leq R/2P^2.$$

De l'égalité (25) il vient

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} X(t) \right| &\leq m^2 p(t) X(t) + \sum_{i=1}^m |b_i(t, x(t))| \frac{|x_i(t)|}{X(t)} \\ &\leq m^2 p(t) X(t) + |b(t, x(t))|. \end{aligned}$$

De cette inégalité différentielle on tire immédiatement l'inégalité

$$R \leq \left(r + P \int_0^{\omega} |b(t, x(t))| dt \right) \cdot P$$

d'où, en tenant compte de (26) on obtient $R/r \leq 2P$ ce qui signifie que pour R suffisamment grand le quotient R/r est borné par une constante indépendante de R et r .

Revenons à l'équation (24). On en tire l'inégalité

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^m x_i^2(t) \leq -2q(t) \sum_{i=1}^m x_i^2(t) + 2 \sum_{i=1}^m |b_i(t, x(t))| |x_i(t)|$$

et, en divisant par $2X(t)$,

$$\frac{d}{dt} X(t) \leq X(t) \left(-q(t) + \frac{|b(t, x(t))|}{X(t)} \right) \leq X(t) \left(-q(t) + \frac{1}{r} \sup_{|y| \leq mR} |b(t, y)| \right)$$

d'où l'on tire par l'intégration

$$\ln X(0) - \ln X(\omega) \geq \int_0^{\omega} q(s) ds - \frac{mR}{r} \left(\frac{1}{mR} \int_0^{\omega} \sup_{|y| \leq mR} |b(t, y)| dt \right).$$

Si R est suffisamment grand, le second membre de cette inégalité est positif ce qui signifie que $X(0) > X(\omega)$. Par conséquent, dans l'hypothèse supplémentaire de l'unicité des solutions du système (1), l'application S , qui à chaque point $x_0 = (x_1^0, \dots, x_m^0)$ de la boule $x_1^2 + \dots + x_m^2 \leq \varrho^2$ fait correspondre le point $x(\omega)$ de l'intégrale $x(t)$ du système (1) passant par le point x_0 applique, pour ϱ suffisamment grand, la frontière $x_1^2 + \dots + x_m^2 = \varrho^2$ de la boule considérée en une partie de cette boule. Cela permet d'appliquer à S le théorème classique de Brouwer et d'en conclure l'existence d'un point fixe de S et, par conséquent, l'existence d'au moins une solution périodique du système (1).

3. De façon analogue on peut tirer du théorème 1 un critère d'existence des solutions périodiques de l'équation différentielle d'ordre m

$$(27) \quad x^{(m)} = \sum_{i=1}^m a_i(t, x^{(m-1)}, \dots, x) x^{(m-i)} = b(t, x^{(m-1)}, \dots, x).$$

Rappelons que d'après la convention du n° 1 du paragraphe précédent $L_{1,m}(\omega)$ désigne l'espace de suites de fonctions $\{a_i(t)\} = \{a_1(t), \dots, a_m(t)\}$ ($-\infty < t < +\infty$) périodiques de période ω et sommables dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. Dans la suite $x(t)$ désignera toujours une fonctions

scalaire. A côté de l'équation (27) nous envisagerons aussi l'équation linéaire homogène

$$(28) \quad x^{(m)} + \sum_{i=1}^m a_i(t) x^{(m-i)} = 0.$$

THÉORÈME 3. Soit $A \subset L_{1,m}(\omega)$ un ensemble borné, faiblement fermé et tel que pour toute suite de fonctions $\{a_i(t)\} \in A$ l'équation (28) n'admette aucune solution périodique de période ω autre que la solution identiquement nulle.

On suppose en plus que les fonctions $a_i(t, x_1, \dots, x_m)$ ($i = 1, \dots, m$), $b(t, x_1, \dots, x_m)$ définies pour tout t réel et $x_i \in (-\infty, +\infty)$ ($i = 1, \dots, m$) satisfont aux conditions de Carathéodory, sont périodiques en t de période ω et

$$(29) \quad \{a_i(t, x_1(t), \dots, x_m(t))\} \in A,$$

quelles que soient les fonctions continues $x_1(t), \dots, x_m(t)$, et enfin

$$(30) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^\omega \sup_{|x_i| \leq n} |b(t, x_1, \dots, x_m)| dt = 0.$$

Dans ces hypothèses l'équation (27) admet au moins une solution périodique de période ω .

La démonstration de ce théorème se ramène à une vérification facile des hypothèses du théorème 1 pour le système d'équations du premier ordre que l'on obtient de (27) et (28) en remplaçant, comme d'ordinaire, $x^{(m-i)}$ par x_i .

4. Il est facile d'obtenir du théorème 3 des conditions explicites assurant l'existence des solutions périodiques. Comme exemple nous allons démontrer le théorème suivant:

THÉORÈME 4. Supposons que les fonctions $a(t, x_1, \dots, x_m)$, $b(t, x_1, \dots, x_m)$ soient définies pour tout t réel et $x_i \in (-\infty, +\infty)$, qu'elles satisfassent aux conditions de Carathéodory, à la condition (30) et soient périodiques en t de période ω . Supposons en plus que les fonctions périodiques de période ω $c_i(t)$ ($i = 1, \dots, m$) qui interviennent dans les coefficients de l'équation différentielle

$$(31) \quad c_1(t)x^{(m)} + (c'_1(t) + c_2(t))x^{(m-1)} + \dots + (c'_{m-1}(t) + c_m(t))x' + c'_m(t)x + a(t, x^{(m-1)}, \dots, x) = b(t, x^{(m-1)}, \dots, x) \quad (c_1(t) \geq 1)$$

soient absolument continues. Supposons enfin que l'on ait les inégalités

$$(32) \quad |c'_m(t) + a(t, x_1, \dots, x_m)| \leq C_m, \quad |c'_i(t) + c_{i+1}(t)| \leq C_i \quad (i = 1, \dots, m-1),$$

$$(33) \quad a(t, x_1, \dots, x_m) \geq q(t) \geq 0 \quad (a(t, x_1, \dots, x_m) \leq -q(t) \leq 0),$$

$$\int_0^\omega q(s) ds > 0.$$

Dans ces hypothèses l'équation (31) admet au moins une solution périodique de période ω , pourvu que les constantes C_i ($i = 1, \dots, m$) soient suffisamment petites, par exemple telles que l'on ait

$$(34) \quad \sum_{i=1}^m C_i \omega^i < 2.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que l'équation

$$(35) \quad c_1(t)x^{(m)} + (c_1'(t) + c_2(t))x^{(m-1)} + \dots + (c_{m-1}'(t) + c_m(t))x' + c_m'(t)x + a(t)x = 0,$$

pour toute fonction $a(t)$ périodique de période ω et satisfaisant aux conditions

$$|c_m'(t) + a(t)| \leq C_m, \quad a(t) \geq q(t) \quad (a(t) \leq -q(t)),$$

n'admet aucune solution périodique de période ω autre que la solution identiquement nulle. Soit $x(t)$ une telle solution. Supposons d'abord que l'on ait $x(t) \neq 0$ dans tout l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, par exemple $x(t) > 0$. Par l'intégration de (35) on tire

$$\left(\sum_{i=1}^m c_i(t)x^{(m-i)}(t) \right)_0^\omega = - \int_0^\omega a(t)x(t) dt.$$

On a donc, en vertu de (33)

$$0 = \int_0^\omega a(t)x(t) dt \geq \min_{\langle 0, \omega \rangle} x(t) \int_0^\omega q(t) dt > 0 \quad (\leq -\min_{\langle 0, \omega \rangle} x(t) \int_0^\omega q(t) dt < 0)$$

ce qui est impossible.

Supposons que la solution $x(t)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, mettons au point τ . On a alors

$$\dots, x(\tau - \omega) = 0, \quad x(\tau) = 0, \quad x(\tau + \omega) = 0, \dots$$

Par le théorème de Rolle on a des suites analogues pour les dérivées successives de la fonction $x(t)$

$$\dots, x^{(m-i)}(\tau_i - \omega) = 0, \quad x^{(m-i)}(\tau_i) = 0, \quad x^{(m-i)}(\tau_i + \omega) = 0, \dots$$

$$(i = 1, \dots, m-1).$$

Prenons un k pair ($k \geq 2$) et la fonction $x^{(m-k)}(t)$. En désignant par t_1, \dots, t_k k points différents où cette fonction s'annule, on a pour tout t

$$(36) \quad |x^{(m-k)}(t)| \leq |(t-t_1) \dots (t-t_k)| \frac{\mu_m}{k!}, \quad \mu_m = \max |x^{(m)}(t)|.$$

On peut choisir les points t_1, \dots, t_k de telle sorte que l'on ait $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, $t_{i-1} - t_i = \omega$ ($i = 1, \dots, k-1$) et prendre $t \in \Delta = \langle t_l, t_{l+1} \rangle$ où $l = k/2$. Il est facile de voir que la valeur maximale du polynôme $w(t) = (t-t_1) \dots (t-t_k)$ dans l'intervalle Δ est donnée par la formule

$$\max_{\langle 0, \omega \rangle} |w(t)| = \left| w\left(t_l + \frac{\omega}{2}\right) \right| = \omega^k \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{k-1}{2}\right)^2.$$

De l'inégalité (36) on tire donc

$$(37) \quad |x^{(m-k)}(t)| \leq \frac{\omega^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{k-1}{2}\right)^2 \mu_m.$$

De façon analogue, pour un k impair on a

$$|x^{(m-k)}(t)| \leq \frac{\omega^{k-1}}{(k-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 \mu_{m-1}, \quad \mu_{m-1} = \max |x^{(m-1)}(t)|.$$

Pour tout t le point le plus proche où s'annule la fonction $x^{(m-1)}(t)$ se trouve à distance au plus égale à $\omega/2$, on a donc $\mu_{m-1} \leq \frac{1}{2} \mu_m$, d'où il vient

$$(38) \quad |x^{(m-k)}(t)| \leq \frac{\omega^k}{(k-1)!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{3}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{k-2}{2}\right)^2 \frac{\mu_m}{2}.$$

De là et de (37) il résulte que l'inégalité

$$(39) \quad |x^{(m-k)}(t)| \leq \frac{1}{2} \omega^k \mu_m$$

a lieu, quel que soit $k = 1, \dots, m$. Cela étant, de l'équation (35) on tire l'inégalité

$$\mu_m \leq \sum_{i=1}^m C_i \max_{\langle 0, \omega \rangle} |x^{(m-i)}(t)| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m C_i \omega^i \mu_m$$

c'est-à-dire

$$\mu_m \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m C_i \omega^i\right) \leq 0,$$

ce qui donne, en vertu de l'inégalité (34), $\mu_m = 0$. Par conséquent, les inégalités (39) mènent à la conclusion $x(t) \equiv 0$, contrairement à l'hypothèse que $x(t)$ n'est pas identiquement nulle. Donc, l'équation (35) n'a pas de solution périodique de période ω non identiquement nulle ce qui achève la démonstration du théorème 4.

5. Des évaluations (37) et (38) il vient immédiatement que le théorème 4 reste valable lorsque l'on remplace l'inégalité (34) par l'inégalité suivante, moins restrictive

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k C_k \omega^k < 1$$

où l'on pose

$$(40) \quad \lambda_k = \begin{cases} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (k-1)}{2 \cdot 4 \dots k} & \text{si } k \text{ est pair } \geq 2, \\ \frac{1}{2^k} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (k-2)}{2 \cdot 4 \dots (k-1)} & \text{si } k \text{ est impair } \geq 1. \end{cases}$$

De même, il est facile de voir que le fait que dans les hypothèses admises les oscillations des solutions de l'équation (35) ne peuvent pas être trop fréquentes jouait un rôle décisif dans la démonstration du théorème 4. C'est pour cela qu'il est possible, en utilisant les théorèmes connus sur la fréquence des oscillations des solutions des équations d'ordre m , d'établir des théorèmes sur l'existence des solutions périodiques de ces équations. A titre d'exemple nous allons démontrer ici un théorème de ce type concernant l'équation différentielle

$$(41) \quad x^{(m)} + a(t, x_1^{(m-1)}, \dots, x) x = b(t, x_1^{(m-1)}, \dots, x).$$

THÉORÈME 5. *Supposons que les fonctions $a(t, x_1, \dots, x_m)$, $b(t, x_1, \dots, x_m)$, définies pour t, x_i ($i = 1, \dots, m$) arbitraires et périodiques en t de période ω , satisfassent aux conditions de Carathéodory, à la condition (30) et aux inégalités*

$$(42) \quad 0 \leq q(t) \leq a(t, x_1, \dots, x_m) \leq p(t)$$

où

$$(43) \quad \lambda_{m-1} \omega^{m-1} \int_0^\omega p(t) dt < 1, \quad \int_0^\omega q(t) dt > 0,$$

λ_{m-1} étant défini par les formules (40).

Dans ces hypothèses l'équation (41) admet au moins une solution périodique de période ω .

Il en est de même si l'on remplace les inégalités (42) par celles-ci

$$-p(t) \leq a(t, x_1, \dots, x_m) \leq -q(t) \leq 0.$$

Démonstration. De même que dans la démonstration du théorème précédent on montre que, quelle que soit la fonction mesurable $a(t)$, périodique de période ω , $q(t) \leq a(t) \leq p(t)$, l'équation auxiliaire

$$(44) \quad x^{(m)} + a(t)x = 0$$

n'a pas de solution périodique de période ω autre que la solution identiquement nulle. Il est facile d'exclure l'existence d'une telle solution périodique ayant le signe constant. Soit donc $x(t)$ une solution périodique s'annulant en un point, mettons t_0 . On a alors

$$\dots, x(t_0 - \omega) = 0, \quad x(t_0) = 0, \quad x(t_0 + \omega) = 0, \dots$$

et, en faisant recours au théorème de Rolle, on obtient des suites analogues pour les dérivées successives de la fonction $x(t)$ jusqu'à l'ordre $m-1$. Posons $\mu_{m-1} = \max_{\langle 0, \omega \rangle} |x^{(m-1)}(t)|$ et soit $t_1 \in \langle 0, \omega \rangle$ un point où s'annule la fonction $x^{(m-1)}(t)$, et $t_2 \in \langle 0, \omega \rangle$ le point où $|x^{(m-1)}(t)|$ prend sa valeur maximale. En vertu de (42) et (44) on a

$$(45) \quad \mu_{m-1} = \left| \int_{t_1}^{t_2} x^{(m)}(t) dt \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} a(t)x(t) dt \right| \leq \max_{\langle 0, \omega \rangle} |x(t)| \int_0^\omega p(t) dt.$$

D'autre part, dans le cas envisagé les inégalités (37) et (38) ont lieu à condition d'y remplacer m par $m-1$ et poser $k = m-1$. On en tire l'inégalité

$$|x(t)| \leq \lambda_{m-1} \mu_{m-1} \omega^{m-1}.$$

En utilisant cette évaluation dans l'inégalité (45) on en tire

$$\mu_{m-1} \leq \mu_{m-1} \omega^{m-1} \lambda_{m-1} \int_0^\omega p(t) dt$$

d'où, en vertu de (43), il vient $\mu_{m-1} = 0$ c'est-à-dire $x^{(m-1)}(t) \equiv 0$ et, par conséquent, $x(t) \equiv 0$. Donc, l'équation (44) n'a pas de solution périodique différente de la solution identiquement nulle ce qui, en raison du théorème 3, achève la démonstration du théorème 5.

3. Applications aux équations différentielles du second ordre.

1. Passons à l'étude de l'équation différentielle du second ordre

$$(46) \quad x'' + P(t, x, x')x = Q(t, x, x')$$

pour lequel l'équation linéaire homogène correspondant est de la forme

$$(47) \quad x'' + p(t)x = 0.$$

De même que dans le cas général, pour établir des critères d'existence des solutions périodiques de l'équation non-linéaire (46) on n'a qu'à chercher des classes de coefficients $p(t)$ de l'équation linéaire (47), périodiques de période ω , pour lesquels l'équation (47) n'a pas d'autres solutions périodiques de période ω que la solution identiquement nulle. En d'autres termes, on n'a qu'à chercher des classes de coefficients périodiques de période ω tels que la solution identiquement nulle soit l'unique solution de l'équation (47) satisfaisant à la condition aux limites

$$(48) \quad x(\omega) = x(0), \quad x'(\omega) = x'(0).$$

Mais cette fois-ci la recherche de telles classes de fonctions $p(t)$ est beaucoup facilitée par le fait que l'on rencontre à peu près la même situation

en étudiant le problème de stabilité des solutions de l'équation (47) avec un coefficient $p(t)$ périodique de période ω . La seule différence consiste en ce qu'on remplace dans le problème de stabilité la condition (48) par une autre condition aux limites

$$(49) \quad x(\omega) = \lambda x(0), \quad x'(\omega) = \lambda x'(0) \quad (-\infty < \lambda < +\infty)$$

et on cherche pour le coefficient $p(t)$ des conditions suffisantes (en général en forme des inégalités imposées ou bien directement à la fonction $p(t)$, ou bien à la valeur moyenne de $p(t)$ dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, ou bien encore à d'autres grandeurs liées d'une certaine façon à la fonction $p(t)$) pour que, quel que soit λ réel, la solution identiquement nulle soit l'unique solution de l'équation (47) satisfaisant à la condition aux limites (49).

Par conséquent, toute condition suffisante de stabilité de solutions de l'équation (47) qui a une forme qui puisse s'adapter aux hypothèses du théorème 3 va nous fournir un critère suffisant d'existence des solutions périodiques de l'équation non-linéaire (46). Bien davantage, comme la condition aux limites (48) n'est qu'un cas très particulier ($\lambda = 1$) de la condition (49), il est possible, en général, de donner à ce critère d'existence des solutions périodiques une forme moins restrictive que le critère de stabilité correspondant. Nous allons le montrer en détails sur quelques exemples choisis parmi les plus simples et les plus instructifs.

2. Nous allons commencer par le critère de stabilité bien connu de Liapounoff, mais dans une forme plus générale due à G. Borg [3] qui est la suivante: toutes les solutions de l'équation (47) à coefficient $p(t)$ continu et périodique de période ω sont stables pour $t \rightarrow +\infty$ (ou ce qui revient au même, toutes les solutions de cette équation sont bornées dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$) si l'on a

$$\int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0, \quad \omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 4, \quad p(t) \not\equiv 0.$$

En analysant de plus près la démonstration de ce critère (voir par exemple R. Bellman [1], p. 124 ou L. Cesari [4], p. 62) il est facile d'en tirer d'abord le lemme suivant:

LEMME. *Si la fonction $p(t)$ périodique de période ω et sommable dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ satisfait aux conditions*

$$(50) \quad \int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0, \quad \omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 16, \quad p(t) \not\equiv 0,$$

l'équation (47) n'a pas de solutions périodiques de période ω différentes de la solution identiquement nulle.

Supposons en effet qu'il existe une solution $x(t)$ de l'équation (47) non identiquement nulle et périodique de période ω . Supposons d'abord que $x(t)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$. De l'équation (47) on tire alors

$$\int_0^{\omega} \frac{x''(t)}{x(t)} dt + \int_0^{\omega} p(t) dt = 0$$

et, en intégrant par parties et tenant compte des relations $x(0) = x(\omega)$, $x'(0) = x'(\omega)$, on a

$$\int_0^{\omega} \left[\frac{x'(t)}{x(t)} \right]^2 dt + \int_0^{\omega} p(t) dt = 0$$

ce qui mène, en vertu de la première des inégalités (50), à l'inégalité

$$\int_0^{\omega} \left[\frac{x'(t)}{x(t)} \right]^2 dt \leq 0$$

qui est impossible. Dans le cas où la fonction $x(t)$ s'annule au moins une fois dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ nous pouvons admettre, sans restreindre la généralité, que $x(0) = 0$. On a alors aussi $x(\omega) = 0$ et, en plus, $x'(\omega) = x'(0)$. Il en résulte que $x(t)$ s'annule encore une fois au moins dans l'intervalle ouvert $(0, \omega)$. Soient $0, \omega_1$ et $\omega_1 + \omega_2 \leq \omega$ trois zéros consécutifs de la fonction $x(t)$. Dans les intervalles $(0, \omega_1)$, $(\omega_1, \omega_1 + \omega_2)$ on a $x(t) \neq 0$ et, par conséquent, de l'inégalité de Beurling (cf. par exemple R. Bellman [1], p. 124) on obtient

$$\int_0^{\omega_1} \left| \frac{x''(t)}{x(t)} \right| dt > \frac{4}{\omega_1}, \quad \int_{\omega_1}^{\omega_1 + \omega_2} \left| \frac{x''(t)}{x(t)} \right| dt > \frac{4}{\omega_2}$$

d'où l'on tire immédiatement, en tenant compte de l'équation (47) et de la seconde des inégalités (50)

$$(51) \quad \frac{16}{\omega} \geq \int_0^{\omega} |p(t)| dt \geq \int_0^{\omega_1 + \omega_2} \left| \frac{x''(t)}{x(t)} \right| dt > 4 \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right).$$

Mais, de façon élémentaire on démontre que, quels que soient les nombres positifs ω_1 et ω_2 , on a l'inégalité

$$\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \geq \frac{4}{\omega_1 + \omega_2}.$$

Donc, les inégalités (51) donnent enfin $\omega_1 + \omega_2 > \omega$ ce qui est en contradiction avec l'inégalité $\omega_1 + \omega_2 \leq \omega$.

Le lemme se trouve ainsi démontré.

L'ensemble A de fonction $p(t)$ de l'espace $L(\omega)$ satisfaisant aux conditions (50) n'est pas faiblement fermé car la limite faible d'une suite de fonctions dont aucune n'est identiquement nulle peut bien être identiquement nulle. Mais il est facile de parer à cet inconvénient en modifiant légèrement les inégalités (50) et en remplaçant l'ensemble A par un sous-ensemble convenablement choisi. On obtient par exemple un ensemble faiblement fermé en prenant une fonction $p_0(t) \in L(\omega)$ non identiquement nulle et satisfaisant à l'inégalité

$$\int_0^{\omega} p_0(t) dt \geq 0$$

et en formant l'ensemble de toutes les fonctions $p(t) \in L(\omega)$ telles que

$$p_0(t) \leq p(t), \quad \omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 16.$$

Du théorème 3 du paragraphe précédent et du lemme on obtient immédiatement le suivant critère d'existence des solutions périodiques de l'équation non-linéaire (46).

THÉORÈME 6. *Supposons que les fonctions $P(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$, définies pour t, x, y arbitraires, soient périodiques en t de période ω , satisfassent aux conditions de Carathéodory et aux inégalités*

$$p(t) \leq P(t, x, y), \quad |P(t, x, y)| \leq P(t) \quad (0 \leq t \leq \omega; -\infty < x, y < +\infty)$$

où les fonctions sommables $p(t)$ et $P(t)$ sont supposées telles que

$$(52) \quad p(t) \not\equiv 0, \quad \int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0, \quad \omega \int_0^{\omega} P(t) dt \leq 16.$$

Supposons en plus que

$$(53) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \int_0^{\omega} \sup_{|x|+|y| \leq n} |Q(t, x, y)| dt = 0.$$

Ceci étant admis, l'équation (46) admet au moins une solution périodique de période ω .

Le théorème 6 généralise de façon essentielle un théorème antérieur de M. Volpato [13] où l'on supposait que $p(t) \geq 0$, $|Q(t, x, y)| \leq M$ (M — constante positive) et $\omega \int_0^{\omega} P(t) dt \leq 4$.

En ce qui concerne la possibilité de substituer à cette dernière inégalité la troisième des inégalités (52) le théorème 6 paraît nouveau même dans le cas linéaire pour lequel du lemme on obtient immédiatement le corollaire suivant (cf. aussi G. Sansone [12], p. 332).

COROLLAIRE. Si la fonction $p(t) \not\equiv 0$, périodique de période ω et sommable dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ satisfait aux inégalités

$$\int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0 \quad \text{et} \quad \omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 16,$$

l'équation linéaire

$$x' + p(t)x = q(t)$$

admet, quelle que soit la fonction $q(t)$ périodique de période ω et sommable dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, exactement une solution périodique de période ω .

3. On sait depuis longtemps déjà (voir p. ex. E. van Kampen, A. Wintner [7] et G. Borg [3]) que dans le critère de stabilité de Liapounoff-Borg la constante 4 est la meilleure possible. Il est facile de montrer qu'il en est de même de la constante 16 dans les inégalités (50) et (52) du lemme et du théorème 6.

En effet, soit δ un nombre positif suffisamment petit. Envisageons l'équation différentielle linéaire homogène

$$(54) \quad x'' + p_{\delta}(t)x = 0$$

avec le coefficient $p_{\delta}(t)$ périodique de période 4 défini de la manière suivante

$$p_{\delta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{dans les intervalles } \langle 0, 1-\delta \rangle, \langle 1+\delta, 3-\delta \rangle, \langle 3+\delta, 4 \rangle; \\ R^2(\delta) & \text{dans les intervalles } (1-\delta, 1+\delta), (3-\delta, 3+\delta) \end{cases}$$

où $R(\delta)$ est la plus petite racine positive de l'équation transcendante

$$(55) \quad (R^2(1-\delta)^2 + 1) \sin^2 R\delta = 1.$$

Posons pour abréger

$$C = \sqrt{(1-\delta)^2 + 1/R^2(\delta)}.$$

On vérifie facilement que l'équation (54) admet la solution périodique de période 4 déterminée par les formules

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{dans l'intervalle } \langle 0, 1-\delta \rangle, \\ C \cos R(\delta)(t-1) & \text{dans l'intervalle } \langle 1-\delta, 1+\delta \rangle, \\ 2-t & \text{dans l'intervalle } \langle 1+\delta, 3-\delta \rangle, \\ -C \cos R(\delta)(t-3) & \text{dans l'intervalle } \langle 3-\delta, 3+\delta \rangle, \\ t-4 & \text{dans l'intervalle } \langle 3+\delta, 4 \rangle. \end{cases}$$

De l'équation (55) il résulte d'abord que $R(\delta)$ tend vers l'infini lorsque δ tend vers zéro, puis que $\lim_{\delta \rightarrow 0} R(\delta)\delta = 0$ et enfin, en tenant compte de l'égalité

$$\delta^2 R(\delta)(1-\delta)^2 + \delta^2 R^2(\delta) = \left(\frac{R(\delta)\delta}{\sin R(\delta)\delta} \right)^2,$$

il vient

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} R^2(\delta) \delta = 1.$$

On a donc

$$\int_0^4 |p_\delta(t)| dt = \int_{1-\delta}^{1+\delta} R^2(\delta) dt + \int_{3-\delta}^{3+\delta} R^2(\delta) dt = 4R^2(\delta) \delta \rightarrow 4$$

c'est-à-dire

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} 4 \int_0^4 |p_\delta(t)| dt = 16$$

ce qui prouve que dans le lemme du n° précédent la constante 16 est la meilleure possible.

Pour montrer qu'il en est de même du théorème 6 il suffit d'envisager l'équation linéaire non homogène

$$(56) \quad x'' + p_\delta(t)x = q_\varepsilon(t)$$

dont le second membre $q_\varepsilon(t)$ est une fonction périodique de période 4, égale à 0 dans l'intervalle $\langle 0, 4 - \varepsilon \rangle$ et à 2 dans l'intervalle $\langle 4 - \varepsilon, 4 \rangle$ ($0 < \varepsilon < 1 - \delta$). La fonction

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{dans l'intervalle } \langle 0, 4 - \varepsilon \rangle, \\ (t - 4 + \varepsilon)^2 & \text{dans l'intervalle } \langle 4 - \varepsilon, 4 \rangle \end{cases}$$

est une solution particulière de l'équation (56). Cela étant, pour que l'équation (56) n'admette aucune solution périodique de période 4 il suffit de prendre un système fondamental $(x(t), y(t))$ de solutions de l'équation (54) composé de la solution périodique $x(t)$ définie plus haut et d'une autre solution $y(t)$, et choisir ε de telle sorte que l'on ait

$$\frac{y'(4) - y'(0)}{y(4) - y(0)} \neq \frac{v'(4)}{v(4)} = -\frac{2}{\varepsilon}.$$

Il est à noter que par des simples modifications ne touchant en rien à l'essentiel de ces constructions on pourrait remplacer les fonctions discontinues $p_\delta(t)$, $q_\varepsilon(t)$ par des fonctions continues ou bien encore par des fonctions d'une classe supérieure de régularité.

4. La suite de raisonnements qui, dans le n° 2, menait au théorème 6 comporte trois moments:

1° un lemme sur la non-existence des solutions périodiques de période ω différentes de la solution identiquement nulle pour une classe d'équations différentielles linéaires homogènes (47);

2° une formation, à partir de la classe d'équations linéaires envisagées dans 1°, d'un ensemble A de coefficients $p(t)$ périodiques de période ω faiblement fermé dans l'espace $L(\omega)$;

3° un choix convenable des hypothèses imposées au coefficient $P(t, x, y)$ de l'équation non-linéaire (46) pour que, quelle que soit la fonction $x(t)$ continûment différentiable dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$, la fonction composée $P(t, x(t), x'(t))$ appartienne à l'ensemble A .

Et nous avons vu que le premier moment se ramène à une modification d'un critère de stabilité des solutions de l'équation (47), tandis que la solution des deux autres questions s'impose d'elle-même d'une façon tout à fait naturelle. De cette façon, tout ce que nous avons fait à propos du critère de stabilité de Liapounoff-Borg peut être répété sans aucun changement pour n'importe quel autre critère du même type: on n'a qu'à prendre tel ou tel autre critère de stabilité, suivant par exemple la liste qu'en a dressée L. Cesari ([4], p. 61) en y ajoutant quelques résultats plus récents de Z. Opial [11], H. Hochstadt [6] et d'autres, en déduire le critère correspondant de l'unicité des solutions périodiques des équations linéaires homogènes (47) et passer ensuite à l'énoncé du théorème correspondant de l'existence des solutions périodiques de l'équation non-linéaire (46). Autrement dit, combien de critères de stabilité des solutions de l'équation (47), autant de théorèmes d'existence des solutions périodiques de l'équation (46).

Il serait complètement inutile exposer ici en détails les énoncés et les démonstrations de tous ces théorèmes. Il suffit d'en avoir un modèle — le théorème 6. Mais deux choses importantes sont à noter. Premièrement, dans tous ces théorèmes les hypothèses sur la fonction $Q(t, x, y)$, le second membre de l'équation (46), restent toujours les mêmes — on suppose, en particulier, que cette fonction satisfait à la condition (53) qui exprime que la fonction $|Q(t, x, y)|$ ne peut pas croître trop vite lorsque $|x| + |y|$ croît indéfiniment. Deuxièmement, dans les critères de stabilité on suppose, pour la plupart de cas, que le coefficient $p(t)$ est ou bien non-négatif, ou bien non-négatif en moyenne c'est-à-dire

$$\int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0.$$

Cette hypothèse sert à exclure aussi bien l'existence d'une solution périodique de l'équation (47) de signe constant que l'existence d'une telle solution satisfaisant aux conditions aux limites (49). La démonstration dans ces deux cas ne diffère en rien, c'est d'ailleurs celle que nous avons rappelée dans le n° 2. Par conséquent, cette hypothèse joue le même rôle dans le problème de stabilité que dans celui d'existence des solutions périodiques.

Il n'en est plus de même d'autres inégalités imposées au coefficient $p(t)$. Par exemple, l'inégalité de Liapounoff-Borg

$$\omega \int_0^{\omega} |p(t)| dt \leq 4$$

s'avère indispensable (ceci résulte par exemple de la construction exposée dans le n° 3; cf. aussi [7] et [3]) pour exclure l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation (47) satisfaisant aux conditions aux limites

$$(57) \quad x(\omega) = -x(0), \quad x'(\omega) = -x'(0) \quad (x(t) \not\equiv 0),$$

mais est loin d'être essentielle pour exclure l'existence d'une solution $x(t)$ non identiquement nulle et périodique de période ω . Cela tient, comme nous l'avons remarqué dans le n° 2, au fait que l'inégalité de Liapounoff-Borg est incompatible avec l'existence d'une solution $x(t)$ de l'équation (47) s'annulant deux fois dans un intervalle de longueur ω , et, à vrai dire, c'est de cette manière que l'on exclut l'existence d'une solution non identiquement nulle satisfaisant à la condition aux limites (57). Cependant, pour éliminer l'existence d'une solution périodique de période ω on a à exclure l'existence d'une solution de l'équation (47) qui s'annule non pas deux fois, mais au moins trois fois dans un intervalle de longueur ω . C'est justement cette circonstance qui nous a permis de remplacer dans l'inégalité de Liapounoff-Borg la constante 4 par 16 ou, en regardant la même chose d'un autre point de vue, de doubler la longueur de l'existence des solutions périodiques par rapport à la longueur de l'intervalle de stabilité. Il en est de même dans d'autres critères de stabilité.

5. Dans le cas particulier de l'équation non-linéaire

$$(58) \quad x'' + p(t)x = Q(t, x, x')$$

les trois moments dont il était question dans le n° précédent se réduisent au premier seulement. C'est pour cela qu'il est facile d'énoncer dans ce cas un théorème général de l'existence des solutions périodiques, à savoir le suivant

THÉORÈME 7. *Supposons que la fonction $Q(t, x, y)$, définie pour t, x, y arbitraires, soit périodique en t de période ω , satisfasse aux conditions de Carathéodory et à la condition (53). Supposons en plus que la fonction non identiquement nulle $p(t)$, périodique de période ω et sommable dans l'intervalle $\langle 0, \omega \rangle$ satisfasse à l'une des conditions suivantes*

$$(59) \quad \int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0, \quad \omega \int_0^{\omega} p^+(t) dt \leq 16 \quad (p^+(t) = \frac{1}{2}(p(t) + |p(t)|)),$$

$$(60) \quad \int_0^{\omega} p(t) dt \geq 0, \quad p(t) \leq p, \quad \omega \int_0^{\omega} p^+(t) dt \leq 16 \left(1 + \frac{9 \cdot 51}{p\omega^2} \right),$$

$$(61) \quad p(t) \geq 0, \quad \omega^3 \int_0^{\omega} p^2(t) dt \leq 16 \cdot 63 \cdot 0,3.$$

Dans ces hypothèses l'équation (58) admet au moins une solution périodique de période ω .

Pour la démonstration on n'a qu'à appliquer ce que l'on vient de dire dans le n° précédent aux critères de stabilité de solutions de l'équation (47) dûs respectivement à M. G. Krein [8] (condition (59)), A. M. Goldine [5] (condition (60)) et G. Borg [1] (condition (61)) (cf. aussi L. Cesari [4], p. 61).

6. Tout ce qui a été dit dans le n° 4 relativement au doublement de l'intervalle de l'existence des solutions périodiques par rapport à l'intervalle de stabilité s'applique seulement à ces critères de stabilité des solutions de l'équation (47) qui concernent la première zone de stabilité. La situation change un peu quand on passe aux zones de stabilité d'ordre supérieur. Néanmoins le principe général reste valable dans ce cas aussi: à chaque critère de stabilité de l'équation (47) correspond un critère d'existence des solutions périodiques de l'équation non-linéaire (46).

A titre d'exemple considérons le critère suivant de M. G. Krein [8] (cf. L. Cesari [4], p. 63):

Si, pour un entier positif n , le coefficient $p(t)$ périodique de période ω de l'équation (47) satisfait aux inégalités

$$p(t) \geq n^2 \pi^2 \omega^{-2}, \quad \omega \int_0^{\omega} p(t) dt < n^2 \pi^2 + 2\pi n(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)},$$

toutes les solutions de l'équation (47) sont bornées dans l'intervalle $\langle 0, +\infty \rangle$.

De ce critère, en suivant la voie indiquée dans la démonstration du théorème 6, on tire immédiatement le théorème suivant:

THÉORÈME 8. *Supposons que les fonctions $P(t, x, y)$, $Q(t, x, y)$, définies pour t, x, y arbitraires, soient périodiques en t de période ω , satisfassent aux conditions de Carathéodory et à la condition (53). Supposons en plus que pour un entier $n \geq 1$ on ait*

$$P(t, x, y) \geq n^2 \pi^2 \omega^{-2} \quad \text{et} \quad P(t, x, y) \leq P(t) \quad (0 \leq t \leq \omega; -\infty < x, y < \infty)$$

où $P(t)$ est une fonction sommable satisfaisant à l'inégalité

$$\omega \int_0^{\omega} P(t) dt < n^2 \pi^2 + 2\pi n(n+1) \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}.$$

Dans ces hypothèses l'équation (46) admet au moins une solution périodique de période ω .

Travaux cités

- [1] R. Bellman, *Stability theory of differential equations*, New York 1953.
- [2] G. Borg, *Über die Stabilität gewisser Klassen von linearen Differentialgleichungen*, Ark. Mat. Astr. Fys. 31A (1944), p. 33.
- [3] — *On a Liapounoff criterion of stability*, Amer. Journ. of Math. 71 (1949), p. 67-70.
- [4] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Berlin 1959.
- [5] А. М. Гольдин (A. M. Goldine), *Об одном критерии устойчивости Ляпунова*, Прикл. Мат. и Мех. 15 (1951), p. 379-384.
- [6] H. Hochstadt, *A stability criterion for Hill's equation*. Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), p. 601-603.
- [7] E. van Kampen, A. Wintner, *On a absolute constant in the theory of variational stability*, Amer. Journ. of Math. 59 (1937), p. 270-274.
- [8] М. Г. Крейн (M. G. Krein), *О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости*, Прикл. Мат. и Мех. 15 (1951), p. 323-348.
- [9] A. Lasota, Z. Opial, *Sur un problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n* , Bull. Acad. Polon. Sci., Série des sci. math., astr. et phys. 9 (1961), p. 667-671.
- [10] — — *L'existence et l'unicité des solutions du problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n* , Ann. Pol. Math. 15 (1964), p. 253-271.
- [11] Z. Opial, *Sur un problème de stabilité*, Ann. Polon. Math. 5 (1959), p. 153-164.
- [12] G. Sansone, *Equazioni differenziali nel campo reale*, Parte prima, Bologna 1948.
- [13] M. Volpato, *Sull'esistenza di soluzioni periodiche per equazioni differenziali ordinarie del secondo ordine*, Rend. Sem. Mat. Padova 25 (1956), p. 371-385.

Reçu par la Rédaction le 27. 4. 1963
