ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXIX (1974)

Sur un système d'équations aux différences finies

par Zygmunt Butlewski (Poznań)

Résumé. On considére le système d'équations aux différences finies

$$(*) \qquad \Delta y = hA(x)z, \quad \Delta z = hB(x)y,$$

où les coefficients $A(x)$, $B(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle J et la distance h est une constante positive. Soit $y(x)$, $z(x)$ une solution continue et oscillante du système $(*)$ pour $x \in J$. On suppose que les inégalités suivantes sont remplies:

$$(\overset{*}{*}) \qquad 0 < A_1 < A(x), \quad B(x) \leqslant -B_1 < 0 \quad (A_1, B_1 = \text{Const}), \quad x \in J.$$

Dans ces conditions on démontre que la longueur de tout intervalle entre deux zéros consécutifs de la fonction $y(x)$ (resp. $z(x)$) ne dépasse pas $2h(2+1/p)$, où l'on a $0 < p = h^2 A_1 B_1 < 2$.

On obtient aussi le résultat suivant: tout sous-intervalle de J dont la longueur dépasse $\lambda = \pi/m + 3h$ $(m = \sqrt{A_1 B_1})$, contient un zéro au moins de la fonction $y(x)$ (resp. $z(x)$).

Enfin, en supposant que l'on a

$$A(x) > 0, \quad B(x) < 0, \quad \Delta A(x) \geqslant 0, \quad \Delta B(x) \leqslant 0 \quad \text{pour } x \in J,$$

on obtient quelques inégalités pour les expressions

$$\sqrt{|B|}\,|y|, \quad \sqrt{|A|}\,|z| \quad \text{et} \quad |\Delta y(x)|, \quad |\Delta z(x)|.$$

Les propriétés analogues pour les solutions des équations différentielles sont bien connues.

Introduction. Dans cet article nous considérons le système d'équations aux différences finies

$$(\mathrm{I}) \qquad \Delta y = hA(x)z, \quad \Delta z = hB(x)y,$$

où les fonctions $A(x)$ et $B(x)$ sont continues dans l'intervalle J et h est une constante positive. Soit $y(x)$, $z(x)$ une solution continue du système (I).

Nous appelons une solution $y(x)$, $z(x)$ *oscillante* dans l'intervalle (x_0, ∞), si les deux fonctions $y(x)$ et $z(x)$ changent de signe $+$ et $-$ une infinité de fois dans l'intervalle (x_0, ∞).

Supposons remplies les inégalités

$$(\mathrm{II}) \qquad 0 < A_1 \leqslant A(x), \quad B(x) \leqslant -B_1 < 0, \quad x \in (x_0, \infty),$$

où A_1, B_1 sont des constantes positives.

Dans notre travail [2] nous avons obtenu, entre autres, les résultats suivants: 1° Si les inégalités (II) sont satisfaites, toute solution du système (I) est oscillante. Désignons par $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ $(x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \ldots)$ et $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ $(\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n < \ldots)$ les zéros consécutifs plus grands que x_0 des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ respectivement. Soient remplies les inégalités

$$\text{(III)} \qquad x_{n+1} - x_n > h, \qquad \xi_{n+1} - \xi_n > h \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si les conditions (II) et (III) sont satisfaites les zéros des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ se séparent alternativement et de plus on a $x_n < \xi_n < x_{n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ dans l'intervalle $\langle x_0, \infty)$.

2° Considérons les deux systèmes d'équations: (I) et

$$\text{(IV)} \qquad \begin{aligned} \Delta u &= ha(x)v \\ \Delta v &= hb(x)u \end{aligned} \qquad (h > 0),$$

où les coefficients $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions continues dans l'intervalle J. Supposons remplies les inégalités

$$\text{(V)} \qquad 0 < a(x) \leqslant A(x), \qquad B(x) \leqslant b(x) < 0$$

dans le sous-intervalle (α, β) de J.

Théorème T (de comparaison). *Supposons remplies les inégalités* (V). *Si de plus les conditions suivantes sont satisfaites*:

1° $\Delta A(x) \geqslant 0$, $\Delta a(x) \leqslant 0$ *dans un intervalle* J;

2° $y(x) > 0$ *pour* $x \epsilon \langle \alpha, \beta)$;

3° *il existe une solution* $u(x), v(x)$ *de* (IV) *telle que* $y(\alpha) = u(\alpha)$, $z(\alpha) \leqslant v(\alpha) \leqslant 0$;

4° n *est un entier positif tel que* $nh \leqslant \beta - \alpha < (n+1)h$. *Dans ces conditions on a* $y(\alpha + ih) \leqslant u(\alpha + ih)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Désignons par a, b et c_1, c les zéros consécutifs de la fonction $y(x)$ et $z(x)$ respectivement et, de plus, soit $x_0 < c_1 < a < c < b < \infty$.

Dans le § 1 nous avons démontré que la longueur de tous les intervalles (c_1, a), (a, c) et (c, b) ne dépasse pas $(2 + 1/p)h$, où $p = h^2 A_1 B_1 > 0$.

Ensuite (§ 2 et § 3) nous trouvons des conditions suffisantes pour que soient remplies les inégalités

$$\text{(VI)} \qquad y(c + ih) \leqslant u(c + ih) \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ n \geqslant 2),$$

où $u(x)$ est une solution de l'équation différentielle du second ordre

$$\text{(VII)} \qquad u''(x) + A_1 B_1 u(x) = 0.$$

Nous avons obtenu aussi (§ 3 et § 4) des conditions suffisantes pour que les longueurs des intervalles (a, c) et (c, b) ne surpassent pas $\frac{3}{2}h + \pi/2\sqrt{A_1 B_1}$ pour $0 < p \leqslant 2$.

Enfin (§ 5) nous avons obtenu quelques inégalités pour les différences $|\Delta y(x)|$, $|\Delta z(x)|$ et pour $|B|^{1/2}|y|$, $A^{1/2}|z|$ dans l'intervalle (a, b).

M. Biernacki a considéré [1] des problèmes analogues dans le cas de l'équation aux différences finies: $\Delta^2 y + h^2 A(x) y = 0$.

§ 1. Considerons le système d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned} \Delta y &= hA(x)z \\ \Delta z &= hB(x)y \end{aligned} \qquad (h > 0), \tag{1.1}$$

où les coefficients $A(x)$ et $B(x)$ sont des fonctions continues pour $x \epsilon J$. Nous supposons de plus que ces coefficients remplissent les inégalités suivantes:

$$0 < A_1 \leqslant A(x), \qquad B(x) \leqslant -B_1 < 0 \tag{1.2}$$

(A_1 et B_1 sont des constantes positives) pour $x \epsilon J$.

Soit $y(x), z(x)$ une solution continue et oscillante du système (1.1) dans l'intervalle J. Nous supposons que les zéros de ces fonctions se séparent alternativement. Désignons par a, b et c_1, c les zéros consécutifs de la fonction $y(x)$ et $z(x)$ respectivement, c'est-à-dire on a $z(c_1) = y(a) = z(c) = y(b) = 0$, où $c_1 < a < c < b$.

Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME I. *Si les conditions* (1.2) *sont remplies, nous avons les inégalités*

$$a - c_1 < P, \qquad c - a < P, \qquad b - c < P,$$

où $P = (2 + 1/p)h$ et $p = h^2 A_1 B_1$ *c'est-à-dire* $b - a < 2P$, $c - c_1 < 2P$. *En particulier si* $h_1 = \sqrt{2/A_1 B_1}$, *on a* $2P \doteq 5h_1$.

Démonstration.

1° Définissons l'entier positif n par les inégalités

$$nh \leqslant b - c < (n+1)h. \tag{1.3}$$

Il suffit de considérer le cas $y(x) > 0$ pour $x \epsilon (a, b)$ Or, nous avons

$$y(c + ih) > 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.4}$$

D'après (1.1) et (1.2) on obtient l'inégalité(1)

$$\Delta z(c + ih) = h(By)_{c+ih} < 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \tag{1.5}$$

Il vient donc

$$z(c + nh) < z\big(c + (n-1)h\big) < \ldots < z(c + h) < 0,$$

d'où on déduit la relation

$$|\Delta y(c + ih)| = h(A|z|)_{c+ih} \geqslant hA_1 |z(c+h)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

(1) Nous posons: $\varphi_\gamma \equiv \varphi(\gamma)$.

et par suite nous obtenons l'inégalité

$$(1.6)\qquad (n-1)hA_1|z(c+h)| \leqslant \sum_{i=1}^{n-1} |\Delta y(c+ih)| \leqslant y(c).$$

En posant dans la relation (1.5) $i = 0$ et en tenant compte de l'hypothèse $B(x) \leqslant -B_1 < 0$ nous aurons

$$(1.7)\qquad hB_1 y(c) \leqslant h(|B|y)_c = |z(c+h)|.$$

Or, d'après (1.6) et (1.7) on a l'inégalité

$$(1.8)\qquad (n-1)p \leqslant 1$$

et par conséquent

$$(1.9)\qquad n \leqslant 1 + \frac{1}{p},$$

d'où selon (1.3), on déduit l'inégalité

$$(1.10)\qquad b-c < \left(2+\frac{1}{p}\right)h.$$

En particulier, si $h_1 = \sqrt{2/A_1B_1}$ on obtient l'inégalité

$$b-c < \tfrac{5}{2}h_1.$$

2° La démonstration de la deuxième partie du théorème I est tout analogue à celle de 1°. Définissons l'entier positif r par les inégalités

$$(1.11)\qquad rh \leqslant c-a < (r+1)h.$$

Nous avons $y(a) = 0$ et $y(x) > 0$ pour $x \in (a, c\rangle$ de plus on a $z(c) = 0$. Il vient donc

$$(1.12)\qquad y(c-ih) > 0 \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, r-1;\ r \geqslant 2).$$

D'après (1.1), (1.2) et (1.12) nous obtenons les inégalités

$$\Delta z(c-ih) = h(By)_{c-ih} < 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1),$$

d'où on déduit

$$(1.13)\qquad 0 < z(c-ih) < z\big(c-(i+1)h\big) \qquad (i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

De l'équation $\Delta y = hA(x)z$ nous obtenons les relations

$$(1.14)\qquad \Delta y(c-ih) = h(Az)_{c-ih} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et par suite d'après (1.13) on a

$$(1.15)\qquad \Delta y(c-ih) \geqslant hA_1 z(c-h) > 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Nous posons dans (1.15) successivement $i = 2, 3, \ldots, r$ et faisons la somme des inégalités obtenues; il résulte donc

$$y(c-h)-y(c-rh) \geqslant (r-1)hA_1 z(c-h). \tag{1.16}$$

D'après l'hypothèse $B(x) \leqslant -B_1 < 0$ et en vertu de la relation

$$\Delta z(c-h) = z(c)-z(c-h) = h(By)_{c-h},$$

nous obtenons l'inégalité

$$z(c-h) \geqslant hB_1 y(c-h). \tag{1.17}$$

En tenant compte des inégalités (1.12) et (1.17) on peut écrire l'inégalité (1.16) sous la forme suivante:

$$y(c-h) \geqslant (r-1)h^2 A_1 B_1 y(c-h),$$

d'où on déduit l'inégalité

$$r \leqslant 1+\frac{1}{p}$$

et ensuite, d'après (1.11),

$$c-a < \left(2+\frac{1}{p}\right)h.$$

Dans le cas particulier où $h_1 = \sqrt{2/A_1 B_1}$ nous obtenons l'inégalité

$$c-a < \tfrac{5}{2}h_1.$$

3° Supposons maintenant que c_1 et c sont deux zéros consécutifs de la fonction $z(x)$, c'est-à-dire $z(c_1) = z(c) = 0$ $(c_1 < a < c < b)$. Il suffit de considérer le cas $z(x) > 0$ pour $x \in (c_1, c)$.

En posant $y(x) = -\eta(x)$, $z(x) = -\zeta(x)$ dans le système (1.1) nous obtenons le système suivant

$$\begin{aligned} \Delta\eta &= hA(x)\zeta(x) \\ \Delta\zeta &= hB(x)\eta(x) \end{aligned} \qquad (h > 0). \tag{1.18}$$

Dans ce cas nous avons $\eta(a) = y(a) = 0$ et $\eta(x) > 0$ pour $x \in (c_1, a)$, parce que l'inégalité $y(x) < 0$ est remplie pour $x \in (c_1, a)$; on a aussi $\zeta(c_1) = z(c_1) = 0$ et de plus $\zeta(x) < 0$ pour $x \in (c_1, a)$, car l'inégalité $z(x) > 0$ est satisfaite pour $x \in (c_1, a)$. En appliquant pour le système (1.18) un raisonnement analogue à celui employé dans le cas 1° on obtient l'inégalité

$$a-c_1 < \left(2+\frac{1}{p}\right)h.$$

Le théorème I est donc démontré.

§ 2. Considérons un système (1.1)

$$\begin{aligned} \Delta y &= hA(x)z \\ \Delta z &= hB(x)y \end{aligned} \qquad (h > 0)$$

et supposons que les inégalités (1.2) sont remplies. Soit $y(x), z(x)$ une solution du système (1.1). Nous supposons dans la suite que chacune des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ est continue et qu'entre deux zéros consécutifs de $y(x)$ il y a un seul zéro de $z(x)$, entre deux zéros consécutifs de $z(x)$ un seul zéro de $y(x)$.

Nous allons maintenant comparer la fonction $y(x)$ et une solution $u(x)$ de l'équation différentielle du second ordre

(2.1) $$u''(x) + m^2 u(x) = 0 \qquad (m = \sqrt{A_1 B_1}).$$

Supposons dans la suite que l'on a $p = h^2 A_1 B_1 \leqslant 2$. Soit $y(a) = y(b) = 0$ et $y(x) > 0$ pour $x \in (a, b)$. Il existe un point $x = c$ $(a < c < b)$ où $z(c) = 0$.

D'après (1.1) et (1.3) on obtient(²) $y(c) = y(c+h) > 0$. De la condition $p \leqslant 2$ on déduit qu'il existe une solution $u(x)$ de l'équation (2.1) qui satisfait aux conditions

(2.2) $$u(c) = y(c), \qquad u(c+h) = y(c+h).$$

En effet, cette solution est de la forme suivante

(2.3) $$u(x) = \frac{y(c)}{\cos\dfrac{mh}{2}} \cos\left[m\left(x - c - \frac{h}{2}\right)\right]$$

où l'on a les inégalités $0 < \frac{1}{2}mh \leqslant \sqrt{2}/2 < \pi/4$.

La distance entre deux zéros consécutifs de $u(x)$ est égale à π/m, cependant d'après notre hypothèse on a $h \leqslant \sqrt{2}/m$. Il résulte donc que la solution considérée $u(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle $(c, c+h)$. Nous allons maintenant remplacer l'équation différentielle (2.1) par un système d'équations aux différences finies. En effet, d'après la formule d'interpolation de Lagrange nous avons

$$\Delta^2 u(x) = h^2 u''(\xi), \qquad \xi \in (x, x+2h),$$

par conséquent nous pouvons écrire l'équation (2.1) sous la forme suivante

$$\Delta^2 u(x) + m^2 h^2 \frac{u(\xi)}{u(x)} u(x) = 0$$

(²) Cf. [2], p. 130.

et nous la remplaçons par le système d'équations aux différences finies

$$(2.4)\qquad \begin{aligned} \Delta u(x) &= hA_1 v(x) \\ \Delta v(x) &= hb_1(x)u(x) \end{aligned} \qquad (h>0)$$

où nous avons posé $b_1(x) \equiv -B_1 \dfrac{u(\xi)}{u(x)}$.

Soient γ et δ les zéros consécutifs de la fonction $u(x)$ et de plus soit $\gamma < c < c+h < \delta$. La fonction $b_1(x)$ est continue dans l'intervalle (γ, δ). Il est evident que $u(x) > 0$ et $u(x+h) > 0$ dans l'intervalle $(\gamma, \delta-h)$.

Nous allons maintenant démontrer le

LEMME 1. *Si* $0 < p \leqslant 2$, *l'inégalité* $-B_1 < b_1(x) < 0$ *est remplie pour* $x \in (c, \delta-h)$ *et* $\xi \in (x, x+2h)$.

Démonstration. La constante B_1 est positive et $u(x) > 0$, $u(x+h) > 0$ pour $x \in (c, \delta-h)$. Il suffit donc de démontrer que $u(\xi) > 0$ pour $x \in (c, \delta-h)$ et $\xi \in (x, x+2h)$. En effet, selon (2.4) on obtient l'équation

$$(2.5)\qquad \Delta v(x) = -hB_1 u(\xi), \qquad \xi \in (x, x+2h).$$

D'après (2.5) il suffit de démontrer que l'on a $\Delta v(x) < 0$ pour $x \in (c, \delta-h)$. De la formule (2.3) il vient donc

$$u(x+h) = \frac{y(c)}{\cos(\frac{1}{2}mh)} \cos\left[m\left(x-c+\frac{h}{2}\right)\right],$$

d'où il résulte que l'on a

$$\Delta u(x) = -2y(c)\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}mh)\sin[m(x-c)], \qquad x \in (c, \delta-h).$$

Or, selon (2.4) nous obtenons

$$(2.6)\qquad v(x) = -\frac{2y(c)}{hA_1}\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}mh)\sin[m(x-c)], \qquad x \in (c, \delta-h)$$

et ensuite

$$v(x+h) = -\frac{2y(c)}{hA_1}\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}mh)\sin[m(x+h-c)]$$

d'où on obtient

$$(2.7)\qquad \Delta v(x) = -\frac{4}{hA_1}\sin^2(\tfrac{1}{2}mh)u(x+h).$$

On voit immédiatement de la formule (2.7) que l'inégalité $\Delta v(x) < 0$ est remplie dans l'intervalle $c < x < \delta-h$, car $u(x+h) > 0$ pour $x \in (c, \delta-h)$. La fonction $b_1(x)$ est donc négative dans l'intervalle $(c, \delta-h)$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer que l'on a

$$(2.8)\qquad -B_1 < b_1(x) < 0, \qquad x \in (c, \delta-h).$$

En effet, nous avons

$$b_1(x) = \frac{\Delta v(x)}{hu(x)}, \qquad x \in (c, \delta - h)$$

et selon la relation (2.7) il vient

$$b_1(x) = -\frac{4}{h^2 A_1} \sin^2(\tfrac{1}{2}mh) \cdot \frac{u(x+h)}{u(x)}. \tag{2.9}$$

Si $p = h^2 A_1 B_1 \leqslant 2$, c'est-à-dire si $0 < \frac{1}{2}mh \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{2} < \pi/4$, on obtient l'inégalité

$$0 < \sin(\tfrac{1}{2}mh) < \tfrac{1}{2}mh$$

et par conséquent

$$\sin^2(\tfrac{1}{2}mh) < \tfrac{1}{4}h^2 A_1 B_1. \tag{2.10}$$

D'après la formule (2.6) on a $v(c) = 0$ et ensuite il résulte de (2.7) que $v(x) < 0$ dans l'intervalle $(c, \delta - h)$. En tenant compte de (2.4) nous obtenons donc

$$\Delta u(x) = hA_1 v(x) < 0, \qquad x \in (c, \delta - h),$$

c'est-à-dire

$$u(x+h) < u(x), \qquad x \in (c, \delta - h),$$

d'où on déduit que l'on a

$$0 < \frac{u(x+h)}{u(x)} < 1, \qquad x \in (c, \delta - h). \tag{2.11}$$

En tenant compte de (2.10) et (2.11) dans (2.9) nous obtenons les inégalités

$$-B_1 = -\frac{4}{h^2 A_1} \cdot \frac{1}{4} h^2 A_1 B_1 < b_1(x) < 0,$$

c'est-à-dire

$$B(x) \leqslant -B_1 < b_1(x) < 0, \qquad x \in \langle c, \delta - h).$$

Le lemme 1 est donc démontré.

§ 3. Considérons maintenant les deux systèmes d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned} \Delta y(x) &= hA(x)z(x) \\ \Delta z(x) &= hB(x)y(x) \end{aligned} \qquad (h > 0), \tag{1.1}$$

et

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= hA_1 v(x) \\ \Delta v(x) &= hb_1(x)u(x) \end{aligned} \qquad (h > 0), \tag{2.4}$$

où

$$b_1(x) \equiv -B_1 \frac{u(\xi)}{u(x)}, \quad x \in (a, b), \quad \xi \in (x, x+2h).$$

D'après les conditions initiales (2.2) on obtient la relation $\Delta y(c) = \Delta u(c)$ et par conséquent, en vertu de (1.1) et (2.4), on a $A(c)z(c) = A_1 v(c)$. Lorsque $z(c) = 0$ il vient

$$z(c) = v(c) = 0. \tag{3.1}$$

Selon le lemme 1 et l'hypothèse (1.2) nous avons

$$B(x) \leqslant -B_1 < b_1(x) < 0, \quad x \in \langle c, \delta - h). \tag{3.2}$$

On peut appliquer aux deux systèmes (1.1) et (2.4) le théorème T (de comparaison)([3]).

En effet, le système d'équations (1.1) est le même que (I) et le système (2.4) est aussi identique à (IV) si l'on pose $a(x) \equiv A_1$, $b(x) \equiv b_1(x)$. Dans ce cas $\Delta a(x) \equiv 0$. On peut écrire les hypothèses (V) sous la forme suivante

$$0 < A_1 \leqslant A(x), \quad B(x) < b_1(x) < 0.$$

Ensuite nous remplaçons dans le théorème T α par c, β par b. Nous pouvons donc énoncer le théorème de comparaison suivant pour les systèmes (1.1) et (2.4):

THÉORÈME II. *Supposons remplies les conditions suivantes*: 1° $0 < A_1 \leqslant A(x)$, $B(x) \leqslant -B_1 < 0$ *et* $\Delta A(x) \geqslant 0$ *dans l'intervalle* J, 2° $y > 0$ *pour* $c \leqslant x < b$, 3° n *est un entier positif tel que* $nh \leqslant b - c < (n+1)h$, 4° *soient encore remplies les conditions* $y(c) = u(c)$, $y(c+h) = u(c+h)$, $z(c) = 0$. *Dans ces conditions on a les inégalités* $y(c+ih) \leqslant u(c+ih)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Nous allons maintenant démontrer que l'on a

$$b - c < \frac{\pi}{2\sqrt{A_1 B_1}} + \frac{3}{2}h.$$

En effet, la distance entre les zéros consécutifs γ, δ d'une solution $u(x)$ de l'équation différentielle

$$u''(x) + m^2 u(x) = 0 \quad (m = \sqrt{A_1 B_1}), \tag{2.1}$$

égale $\delta - \gamma = \pi/m$. Nous avons considéré plus haut la solution $u(x)$ de l'équation (2.1) donnée sous la forme

$$u(x) = \frac{y(c)}{\cos(\frac{1}{2}mh)} \cos\left[m\left(x - c - \frac{h}{2}\right)\right] \tag{2.3}$$

pour $0 < p \leqslant 2$, c'est-à-dire $0 < \frac{1}{2}mh \leqslant \sqrt{2}/2 < \pi/4$.

([3]) Voir l'introduction.

D'après le théorème II on a $u(c+ih) \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ et de la formule (2.3) il résulte

$$\max_{\gamma<x<\delta} u(x) = u(c+\tfrac{1}{2}h) > 0,$$

par conséquente nous obtenons l'inégalité

$$\delta = c+\tfrac{1}{2}h+\frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}} \geqslant c+nh,$$

c'est-à-dire $nh \leqslant \dfrac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}} + \tfrac{1}{2}h$. Selon l'hypothèse 3° du théorème II nous avons $b-c < (n+1)h$. Nous obtenons donc l'inégalité

$$b-c < \frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}} + \frac{3}{2}h. \tag{3.3}$$

Dans le cas particulier où $h = \sqrt{\dfrac{2}{A_1B_1}}$ l'inégalité (3.3) se réduit à la suivante

$$b-c < \frac{3\sqrt{2}+\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_1B_1}}.$$

Dans ce § nous avons obtenu une limitation de $b-c$.

§ 4. Nous allons maintenant chercher une limite supérieure de $c-a$. Le raisonnement est tout pareil à celui employé dans les § 2 et § 3.

Soit donné un système d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned} \Delta y(x) &= hA(x)z(x), \\ \Delta z(x) &= hB(x)y(x), \end{aligned} \tag{1.1}$$

où les coefficients $A(x)$ et $B(x)$ satisfont aux conditions

$$0 < A_1 \leqslant A(x), \quad B(x) \leqslant -B_1 < 0 \quad (x \epsilon J). \tag{1.2}$$

Considérons une solution continue et oscillante $y(x)$, $z(x)$ du système (1.1) et supposons que l'on a: $y(a) = y(b) = 0$ et $y(x) > 0$ pour $x \epsilon (a, b)$. Il existe un seul point $x = c$ $(a < c < b)$ tel que $z(c) = 0$. Par conséquent, d'après (1.1), on obtient $z(x) > 0$ pour $x \epsilon \langle a, c)$ et $z(a) = z(a+h) > 0$; de plus, selon (1.11), nous avons les inégalités

$$z(a+ih) > 0 \quad \text{pour } (i = 2, 3, \ldots, r-1), \; z(a+rh) \geqslant 0.$$

En supposant que $0 < p \leqslant 2$ on peut comparer la fonction $z(x)$ et une solution $v_1(x)$ de l'équation différentielle

$$v_1''(x) + m^2 v_1(x) = 0 \quad (m = \sqrt{A_1B_1}) \tag{2.1α}$$

qui satisfait aux conditions

$$v_1(a) = z(a), \quad v_1(a+h) = z(a+h). \tag{4.1}$$

Cette solution prend la forme

$$v_1(x) = \frac{z(a)}{\cos\frac{mh}{2}} \cos\left[m\left(x-a-\frac{h}{2}\right)\right], \tag{4.2}$$

où $0 < \frac{1}{2}mh \leqslant \sqrt{2}/2 < \pi/4$. On peut remplacer l'équation (2.1α) par le système d'équations aux différences finies:

$$\begin{aligned} \Delta v_1(x) &= hB_1 w(x), \\ \Delta w(x) &= ha_1(x) v_1(x), \end{aligned} \qquad x \in \langle a, c), \tag{4.3}$$

où nous avons posé

$$a_1(x) \equiv -A_1 \frac{v_1(\xi_1)}{v_1(x)} \quad \text{pour } x \in \langle a, c),\ \xi_1 \in (x, x+2h). \tag{4.4}$$

En effet, selon la formule d'interpolation de Lagrange on a $\Delta^2 v_1(x) = h^2 v_1''(\xi_1)$, $\xi_1 \in (x, x+2h)$ et par conséquent d'après (2.1α) il vient

$$h^{-2}\Delta^2 v_1(x) + m^2 \frac{v_1(\xi_1)}{v_1(x)} v_1(x) = 0, \quad x \in \langle a, c). \tag{4.5}$$

On voit immédiatement que l'équation (4.5) et le système (4.3) sont équivalents.

En posant $\eta(x) = -y(x)$ dans le système (1.1) nous obtenons

$$\begin{aligned} \Delta z(x) &= -hB(x)\eta(x), \\ \Delta \eta(x) &= -hA(x)z(x). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Dans le cas considéré la solution $z(x), \eta(x)$ du système (4.6) dans l'intervalle $\langle a, c\rangle$ et la solution $y(x), z(x)$ du système (1.1) dans l'intervalle $\langle c, b\rangle$ possedent les mêmes propriétés. Il en est de le même de la solution $v_1(x), w(x)$ du système (4.3) dans l'intervalle $\langle a, c)$ et $u(x), v(x)$ du système (2.4) dans l'intervalle $\langle c, b)$. Par conséquent le théorème II dans le cas des systèmes (4.6) et (4.3) peut être énoncé comme il suit:

THÉORÈME III. *Supposons satisfaites les conditions suivantes*: 1° $0 < A_1 \leqslant A(x)$, $B(x) \leqslant -B_1 < 0$ *et* $\Delta B(x) \leqslant 0$ *dans l'intervalle* J, 2° $y(x) > 0$ *pour* $a < x \leqslant c$, 3° *soit* r *l'entier positif tel que* $rh \leqslant c-a < (r+1)h$, 4° *les conditions suivantes sont remplies*: $z(a) = v_1(a)$, $z(a+h) = v_1(a+h)$, $y(a) = 0$. *Dans ces hypothèses on a les inégalités* $z(a+ih) \leqslant v_1(a+ih)$ $(i = 2, 3, \ldots, r)$.

Dans ce qui suit nous allons indiquer une application du théorème III. Nous démontrerons qu'il existe une limitation de la longueur de l'intervalle (a, c), c'est-à-dire que l'on a l'inégalité

$$c-a < \frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}} + \frac{3}{2}h. \tag{4.7}$$

En effet, désignons par $\gamma_1\delta_1$ $(\gamma_1 < a < a+h < \delta_1)$ les zéros consécutifs de la solution $v_1(x)$, donnée par la formule (4.2). On sait que l'on a

$$\delta_1 - \gamma_1 = \frac{\pi}{\sqrt{A_1B_1}}.$$

De la formule (4.2) il vient donc

$$\delta_1 = a + \frac{1}{2}h + \frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}}. \tag{4.8}$$

D'après le théorème III on obtient

$$0 \leqslant z(a+rh) \leqslant v_1(a+rh)$$

et par conséquent

$$a+rh \leqslant \delta_1. \tag{4.9}$$

En substituant (4.8) dans (4.9) nous avons l'inégalité

$$rh \leqslant \frac{1}{2}h + \frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}}. \tag{4.10}$$

Selon l'hypothèse 3° du théorème III et en vertu de (4.10) nous obtenons l'inégalité

$$c-a < \frac{\pi}{2\sqrt{A_1B_1}} + \frac{3}{2}h$$

c'est-à-dire l'inégalité (4.7).

En particulier, si $h = \sqrt{\dfrac{2}{A_1B_1}}$ l'inégalité (4.7) prend la forme

$$c-a < \frac{3\sqrt{2}+\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{A_1B_1}}.$$

En tenant compte des inégalités (3.3) et (4.7) nous pouvons énoncer le

Corollaire. *Si les conditions* (1.2) *et* $\Delta A(x) \geqslant 0$, $\Delta B(x) \leqslant 0$ $(x \in I)$ *sont satisfaites, toute sous-intervalle de J dont la longueur dépasse*

$$\lambda = \frac{\pi}{\sqrt{A_1B_1}} + 3h$$

contient un zéro au moins de la fonction $y(x)$ ou $z(x)$, c'est-à-dire nous avons les inégalités

$$b-a<\lambda, \quad c-c_1<\lambda.$$

Dans le cas particulier où $h=\sqrt{\dfrac{2}{A_1B_1}}$ *on a* $\lambda=\dfrac{3\sqrt{2}+\pi}{2\sqrt{A_1B_1}}$.

§ 5. Considérons le système d'équations aux différences finies

$$\begin{aligned}\Delta y(x) &= hA(x)z(x)\\ \Delta z(x) &= hB(x)y(x)\end{aligned} \quad (h>0). \tag{1.1}$$

Supposons ensuite que l'on a

$$A(x)>0, \quad B(x)<0, \quad \Delta A(x)\geqslant 0, \quad \Delta B(x)\leqslant 0 \tag{5.1}$$

dans l'intervalle J.

Soit une solution $y(x), z(x)$ du système (1.1) continue et oscillante dans l'intervalle $\langle x_0, \infty)$. Nous désignons par a, b et c_1, c des zéros consécutifs des fonctions $y(x)$ et $z(x)$ respectivement; soit de plus

$$x_0<c_1<a<c<b<\infty. \tag{5.2}$$

Nous allons maintenant démontrer le

THÉORÈME IV. *Supposons que les inégalités* (5.1) *et* (5.2) *sont remplies. Soient les entiers r et n définis par les inégalités $rh\leqslant c-a<(r+1)h$ et $nh\leqslant b-c<(n+1)h$. Soit k l'un des nombres $1, 2, \ldots, r$. Supposons qu'il existe un entier s $(1\leqslant s\leqslant n)$ tel que l'on ait:*

$$\big|y\big(c+(s-1)h\big)\big|\geqslant |y(c-kh)|\geqslant |y(c+sh)|.$$

Dans ces conditions nous avons l'inégalité

$$A^{1/2}(c-kh)|z(c-kh)|<A^{1/2}(c+sh)|z(c+sh)|$$

et a fortiori

$$|\Delta y(c-kh)|<|\Delta y(c+sh)|.$$

Démonstration. On peut facilement vérifier que l'on a

$$\Delta(Az^2) = 2Az\,\Delta z+A(\Delta z)^2+(z+\Delta z)^2\Delta A \tag{5.3}$$

et

$$\Delta(By^2) = 2By\,\Delta y+B(\Delta y)^2+(y+\Delta y)^2\Delta B. \tag{5.4}$$

En faisant la différence de (5.3) et (5.4) nous obtenons

$$\begin{aligned}\Delta(Az^2)-\Delta(By^2) = {}& 2(Az\,\Delta z-By\,\Delta y)+A(\Delta z)^2-B(\Delta y)^2+\\ &+(z+\Delta z)^2\Delta A-(y+\Delta y)^2\Delta B.\end{aligned} \tag{5.5}$$

D'après le système (1.1) on a l'égalité

$$Az\Delta z - By\Delta y = 0$$

et, par conséquent, de la relation (5.5) résulte l'inégalité

$$\Delta(Az^2) > \Delta(By^2) + (z+\Delta z)^2 \Delta A - (y+\Delta y)^2 \Delta B. \tag{5.6}$$

En posant dans l'inégalité (5.6) successivement

$$x = c-kh, \quad x = c-(k-1)h, \ldots, x = c+(s-1)h$$

et en faisant la somme des inégalités obtenues nous avons

$$(Az^2)_{c+sh} - (Az^2)_{c-kh} > (By^2)_{c+sh} - (By^2)_{c-kh} + \\ + \sum_{i=-k}^{s-1} [(z+\Delta z)^2 \Delta A - (y+\Delta y)^2 \Delta B]_{c+ih}. \tag{5.7}$$

D'après (5.1) et en vertu de l'inégalité $y^2(c+sh) \leqslant y^2(c-kh)$ il vient:

$$(By^2)_{c+sh} - (By^2)_{c-kh} \geqslant (B_{c+sh} - B_{c-kh}) y^2_{c+sh} = y^2_{c+sh} \sum_{i=-k}^{s-1} \Delta B(c+ih). \tag{5.8}$$

En profitant de (5.8) dans l'inégalité (5.7) on obtient *a fortiori*

$$(Az^2)_{c+sh} - (Az^2)_{c-kh} > \sum_{i=-k}^{s-1} [(z+\Delta z)^2 \Delta A]_{c+ih} + \\ + \sum_{i=-k}^{s-1} \{[y^2(c+sh) - (y+\Delta y)^2] \Delta B\}_{c+ih}. \tag{5.9}$$

Les deux suites

$$\{(y+\Delta y)^2\}_{c-ih} \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

et

$$\{(y+\Delta y)^2\}_{c+jh} \quad (j = 0, 1, 2, \ldots, n-1)$$

sont non croissantes. Par conséquent nous obtenons les inégalités

$$y^2(c+sh) \leqslant (y+\Delta y)^2_{c+ih} \quad (i = -k, \ldots, -1, 0, +1, \ldots, s-1). \tag{5.10}$$

Donc en tenant compte des inégalités (5.9) et (5.10) il vient:

$$(A^{1/2}|z|)_{c-kh} < (A^{1/2}|z|)_{c+sh} \tag{5.11}$$

et ensuite

$$h(A|z|)_{c-kh} < h(A|z|)_{c+sh},$$

c'est-à-dire

$$|\Delta y(c-kh)| < |\Delta y(c+sh)|.$$

Le théorème III est donc démontré.

§ 6. Nous avons obtenu plus haut quelques propriétés de la fonction $y(x)$. Dans ce qui suit nous allons obtenir des résultats analogues pour $z(x)$.

Nous démontrérons en effet le

THÉORÈME V. *Désignons par a_1 et b_1 des zéros consécutifs de la fonction $z(x)$ $(x_0 < a_1 < b_1 < \infty)$ et soit $x = c_1$ $(a_1 < c_1 < b_1)$ le seul point dans l'intervalle (a_1, b_1) où l'on a $y(c_1) = 0$. Soient définis les entiers r_1 et n_1 par les inégalités: $r_1 h \leqslant c_1 - a_1 < (r_1+1)h$, $n_1 h \leqslant b_1 - c_1 < (n_1+1)h$. Soit ensuite k_1 l'un des nombres $1, 2, \ldots, r_1$ et supposons qu'il existe un entier s_1 $(1 \leqslant s_1 \leqslant n_1)$ tel que l'an ait:*

$$|z(c_1 + (s_1 - 1)h)| \geqslant |z(c_1 - k_1 h)| \geqslant |z(c_1 + s_1 h)|.$$

Dans ces hypothèses nous avons l'inégalité

$$|B(c_1 - k_1 h)|^{1/2} |y(c_1 - k_1 h)| < |B(c_1 + s_1 h)|^{1/2} |y(c_1 + s_1 h)|$$

et a fortiori on obtient

$$|\Delta z(c_1 - k_1 h)| < |\Delta z(c_1 + s_1 h)|.$$

Démonstration. Le raisonnement est toute pareil à celui du théorème IV. L'inégalité (5.6) peut être écrite sous la forme

$$-\Delta(By^2) > -\Delta(Az^2) + (z + \Delta z)^2 \Delta A - (y + \Delta y)^2 \Delta B. \tag{6.1}$$

Posons dans (6.1) successivement

$$x = c_1 - k_1 h, \quad c_1 - (k-1)h, \ldots, c_1 + (s_1 - 1)h$$

et faisons la somme des inégalités obtenues; on a donc

$$(By^2)_{c_1 - k_1 h} - (By^2)_{c_1 + s_1 h} > (Az^2)_{c_1 - k_1 h} - (Az^2)_{c_1 + s_1 h} + \\ + \sum_{i=-k_1}^{s_1 - 1} [(z + \Delta z)^2 \Delta A - (y + \Delta y)^2 \Delta B]_{x = c_1 + ih}$$

et par conséquent

$$(By^2)_{c_1 - k_1 h} - (By^2)_{c_1 + s_1 h} > \sum_{i=-k_1}^{s_1 - 1} \{[(z + \Delta z)^2 - z^2(c_1 + s_1 h)] \Delta A\}_{x = c_1 + ih}. \tag{6.2}$$

D'après les équations (1.1) il vient

$$z^2(c_1 + s_1 h) \leqslant (z + \Delta z)^2_{c_1 + ih} \quad (i = -k_1, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, s_1 - 1). \tag{6.3}$$

En tenant compte des inégalités (6.3) et de l'hypothèse $\Delta A \geqslant 0$, nous obtenons d'après (6.2) l'inégalité suivante:

$$|B(c_1 - k_1 h)|^{1/2} |y(c_1 - k_1 h)| < |B(c_1 + s_1 h)|^{1/2} |y(c_1 + s_1 h)|. \tag{6.4}$$

Selon (5.1) nous avons $B < 0$, $\Delta B \leqslant 0$ et, par conséquent, en vertu de (6.4) nous obtenons a fortiori l'inégalité

$$h|B(c_1 - k_1 h)|\,|y(c_1 - k_1 h)| < h|B(c_1 + s_1 h)|\,|y(c_1 + s_1 h)|. \tag{6.5}$$

Des équations (1.1) il résulte immédiatement que l'inégalité (6.5) peut être écrite sous la forme suivante:

$$|\Delta z(c_1 - k_1 h)| < |\Delta z(c_1 + s_1 h)|.$$

Le théorème V est donc démontré.

Travaux cités

[1] M. Biernacki, *Sur l'équation $h^{-2}\Delta^2 y(x) + A(x)y(x) = 0$*, Prace Mat.-Fiz. 47 (1949), p. 49–53.

[2] Z. Butlewski, *Théorème de comparaison pour un système d'équations aux différences finies*, Comm. Math. 14 (1970), p. 127–136.

Reçu par la Rédaction le 24. 6. 1973