ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVIII (1966)

Une généralisation du premier théorème de Fredholm et ses applications à la théorie des équations différentielles ordinaires

par A. LASOTA (Kraków)

Dans la théorie des équations linéaires les problèmes d'unicité sont étroitement liés aux problèmes d'existence de solutions. Par exemple le premier théorème de Fredholm permet d'établir qu'une équation linéaire admet exactement une solution si l'équation homogène associée n'a que la solution identiquement nulle. Nous allons démontrer que certaines équations non-linéaires ont une propriété analogue. De façon plus précise, dans la présente note nous nous proposons d'exposer une méthode qui — en partant de l'hypothèse que zéro est la solution unique d'une équation homogène généralisée — permet de déduire l'existence des solutions d'une équation non-linéaire. Les premiers résultats sur ce sujet ont été déjà exposés d'une manière un peu différente dans [4].

La présente note se compose de deux parties. Dans la première on démontre un théorème général d'existence et dans la seconde on en tire des conséquences concernant des problèmes aux limites pour les équations différentielles ordinaires.

1. Théorème généralisé de Fredholm.

1.1. Soit E un espace vectoriel de Banach. On désigne par $\|u\|$ et $\varrho(u, A)$ ($u \in E$, $A \subset E$) la norme de u et la distance d'élément u à l'ensemble A respectivement. Un ensemble $A \subset E$ est dit relativement compact si son fermeture $\bar{A}$ est compact.

A côté de l'espace E nous allons envisager l'ensemble $c(E)$ de toutes les parties non vides convexes de E. Une application H de E dans $c(E)$ est dite compacte si l'ensemble $\bigcup_{u \in B} H(u)$ est relativement compact quel que soit le borné $B \subset E$. Une application H de E dans $c(E)$ est dite semi-continue supérieurement si les conditions

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0, \qquad \lim_{n\to\infty} v_n = v_0, \qquad v_n \in H(u_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

entraînent $v_0 \in H(u_0)$. L'application H compacte et semi-continue supérieurement est appelée complètement continue.

Une application h de E dans lui même est dite complètement continue, si l'application $u \to \{h(u)\}$ qui à tout point $u \in E$ fait correspondre l'ensemble $\{h(u)\}$ contenant un et un seul element $h(u)$ est complètement continue.

Une application H de E dans $c(E)$ est dite homogène si $H(\lambda u) = \lambda H(u)$ quels que soient $u \in E$ et λ réel. Il est clair que pour qu'une application homogène H de E dans $c(E)$ soit compacte, il faut et il suffit que l'ensemble $\bigcup_{\|u\|=1} H(u)$ soit relativement compact.

Théorème 1.1. *Soit H une application de E dans $c(E)$ homogène et complètement continue et soit h une application complètement continue de E dans lui même telle que*

$$\lim_{\|u\|\to\infty} \frac{\varrho\big(h(u), H(u)\big)}{\|u\|} = 0 . \tag{1.1}$$

Si la condition

$$u \in H(u) \tag{1.2}$$

entraîne $u = 0$, il existe au moins une solution de l'équation

$$u = h(u) . \tag{1.3}$$

La condition (1.2) joue dans nos considérations le même rôle que l'équation homogène dans la premier théorème de Fredholm. Donc nous allons aussi utiliser dans la suite l'expression „l'équation (1.2)". Il est à noter qu'en appliquant le théorème 1.1 à l'équation

$$u = g(u) + b \qquad (b \in E,\ g\colon E \to E)$$

on obtient l'existence d'une solution au moins sans hypothèse que g est une opération additive. Il suffit d'admettre que l'application g de E dans lui même est homogène, complètement continue et que l'équation homogène associée

$$u = g(u)$$

admet seulement la solution nulle.

La relation (1.1) est vérifiée en particulier si les applications h et H satisfont à la condition

$$h(u) - h(v) \in H(u - v) \qquad (u, v \in E) . \tag{1.4}$$

De plus si l'application H est homogène et compacte de (1.4) il vient que h est complètement continue. Du théorème 1.1 il résulte alors le

Corollaire 1.1. *Soit H une application de E dans $c(E)$ homogène et complètement continue et soit h une application de E dans lui même satisfaisant à* (1.4). *Si l'équation* (1.2) *a seulement la solution nulle, il existe une et une seule solution de l'équation* (1.3).

1.2. Passons à la démonstration du théorème 1.1. Nous allons démontrer qu'il existe un nombre positif $\gamma(H)$ pour lequel la relation $u+v \in H(u)$ entraîne $\|u\| \leqslant \gamma(H)\|v\|$. En effet, dans le cas contraire pour tout entier $n>0$ il existe u_n et v_n satisfaisant aux conditions

$$u_n+v_n \in H(u_n), \qquad \|u_n\| > n\|v_n\|.$$

Posons $w_n = u_n/\|u_n\|$. On a

$$w_n + \frac{v_n}{\|u_n\|} \in H(w_n), \qquad \|w_n\| = 1, \qquad \frac{\|v_n\|}{\|u_n\|} < \frac{1}{n}. \tag{1.5}$$

L'application H étant compacte, il existe une sous-suite $\{w_{a_n}\}$ qui converge vers un point w^*. En passant à la limite dans (1.5), où u_n, v_n, w_n sont à remplacer par $u_{a_n}, v_{a_n}, w_{a_n}$ et en tenant compte que H est semi-continue supérieurement on obtient $w^* \in H(w^*)$ et $\|w^*\| = 1$ ce qui est impossible.

D'après (1.1) il existe un nombre $a>0$ tel que

$$\sup_{\|u\|=a} \varrho\big(h(u), H(u)\big) < \frac{a}{\gamma(H)}. \tag{1.6}$$

Pour achever la démonstration il suffit donc de prouver que l'application h admet dans la boule $B_a = \{u\colon \|u\| \leqslant a\}$ un point invariant au moins. L'existence d'un tel point résulte du théorème sur les antipodes ([2], p. 39) car comme nous allons démontrer l'application h satisfait sur la sphère $S_a = \{u\colon \|u\| = a\}$ à l'inégalité

$$u-h(u) \neq \lambda\big(-u-h(-u)\big)$$

quel que soit $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Supposons en effet que pour un couple u_0, λ_0 on ait

$$u_0 - h(u_0) = \lambda_0\big(-u_0 - h(-u_0)\big), \qquad u_0 \in S_a, \qquad 0 \leqslant \lambda_0 \leqslant 1. \tag{1.7}$$

Les hypothèses que H est semi-continue supérieurement et compacte entraînent que tous les ensembles $H(u)$ sont compacts. On peut donc trouver $v_0 \in H(u_0)$ et $w_0 \in H(-u_0)$ tels que

$$\varrho\big(h(u_0), H(u_0)\big) = \|v_0 - h(u_0)\|, \qquad \varrho\big(h(-u_0), H(-u_0)\big) = \|w_0 - h(-u_0)\|.$$

Écrivons la relation (1.7) dans la forme

$$u_0 + \frac{1}{1+\lambda_0}\big(v_0 - h(u_0)\big) - \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}\big(w_0 - h(-u_0)\big) = \frac{1}{1+\lambda_0}v_0 - \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}w_0. \tag{1.8}$$

En tenant compte que l'application H est homogène et que $H(u_0)$ est convexe on obtient

$$\frac{1}{1+\lambda_0}v_0 - \frac{\lambda_0}{1+\lambda_0}w_0 \in H(u_0).$$

D'après (1.8) et la définition du nombre $\gamma(H)$ il en résulte

$$\|u_0\| \leqslant \gamma(H) \left\| \frac{v_0 - h(u_0)}{1+\lambda_0} - \frac{\lambda_0(w_0 - h(-u_0))}{1+\lambda_0} \right\|$$

et par conséquent vu (1.6)

$$\|u_0\| \leqslant \gamma(H) \left(\frac{\varrho\big(h(u_0), H(u_0)\big)}{1+\lambda_0} + \frac{\lambda_0 \varrho\big(h(-u_0), H(-u_0)\big)}{1+\lambda_0} \right)$$

$$< \gamma(H) \frac{a}{\gamma(H)} = a$$

ce qui est en contradiction avec le fait que u_0 est un point appartenant à la sphère S_a.

1.3. En analysant de plus près la démonstration du théorème 1.1 il est facile de voir qu'on obtient de même le corollaire suivant qui, dans la théorie des opérations linéaires correspond au théorème établissant que les valeurs propres d'une opération complètement continue sont isolées.

COROLLAIRE 1.2. *Soit H une application de E dans $c(E)$ homogène et completèment continue et telle que l'équation* (1.2) *admet seulement la solution nulle. Il existe un nombre positif $\gamma(H)$ tel que pour toute application h complètement continue de E dans lui même satisfaisant à la condition*

$$\limsup_{\|u\| \to \infty} \frac{\varrho\big(h(u), H(u)\big)}{\|u\|} < \frac{1}{\gamma(H)}$$

l'équation (1.3) *admet une solution au moins.*

2. Applications aux équations différentielles ordinaires.

2.1. C'est la théorie des équations différentielles ordinaires qui a servi du point de départ des considérations générales données ci-dessus. La méthode consistant à comparer d'une certaine façon l'équation non-linéaire donnée à une inégalité différentielle a été appliquée d'abord dans [6] (voir aussi [7]) au problème d'interpolation. Dans ce problème on cherche une solution de l'équation d'ordre n passant par n points donnés. La même méthode est utile dans l'étude des problèmes plus généraux aussi bien pour l'équation d'ordre n que pour les systèmes d'équations [5] et dans la théorie des solutions périodiques [1], [8].

Le théorème 2.1 de la présente note généralise les résultats mentionnés mais quelques-unes de ses applications nouvelles exposées dans les théorèmes 2.2 et 2.3 sont données ici seulement à titre d'exemple.

2.2. Soit R^m l'espace euclidien à m dimensions et soit $I \subset R^1$ un intervalle compact. Par (p, q), $|p|$, $\delta(p, A)$ $(p, q \in R^m;\ A \subset R^m)$ nous désignons respectivement: le *produit scalaire* de p et de q, la *norme euclidienne* de p et la *distance du point p à l'ensemble A*. L'ensemble de toutes les parties non vides convexes et fermées de R^m est noté $\mathrm{cf}(R^m)$.

Une application F de R^m dans $\mathrm{cf}(R^m)$ est dite continue si elle est continue dans la métrique de Hausdorff, c'est-à-dire si $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p_0$ entraîne

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{dist}\big(F(p_n), F(p_0)\big) = 0$$

où

$$\operatorname{dist}(A, B) = \max\big(\sup_{q\in B}\delta(q, A),\ \sup_{q\in A}\delta(q, B)\big) \qquad (A, B\subset R^m).$$

Une application F de I dans $\mathrm{cf}(R^m)$ est dite mesurable si pour tout fermé $A\subset R^m$ l'ensemble de tous les points t pour lesquels l'intersection $A\cap F(t)$ n'est pas vide est mesurable [9]. On dit qu'une fonction $F(t, p)$ (resp. $f(t, p)$) définie dans $I\times R^m$ à valeurs dans $\mathrm{cf}(R^m)$ (resp. R^m) satisfait aux conditions de Carathéodory si pour tout $t\in I$ elle est continue par rapport à p et pour tout $p\in R^m$ mesurable par rapport à t.

L'espace des fonctions $x(t)$ à valeurs dans R^m définies et continues dans I, muni de la norme habituelle $\|x\|_C = \max\limits_{t\in I}|x(t)|$ est désigné par $C^m(I)$.

Admettons les hypothèses suivantes:

1° *$F(t, p)$ est une fonction définie dans $I\times R^m$ prenant ses valeurs dans $\mathrm{cf}(R^m)$ et satisfaisant aux conditions de Carathéodory. Pour tout $t\in I$ $F(t, p)$ est homogène par rapport à p ($F(t, \lambda p) = \lambda F(t, p)$; $p\in R^m$, $\lambda\in R^1$) et la fonction numérique*

$$\varphi(t) = \sup_{|p|=1}|F(t, p)| \qquad \big(|F(t, p)| = \sup_{q\in F(t,p)}|q|\big)$$

est sommable dans I.

2° *$f(t, p)$ est une fonction définie dans $I\times R^m$ prenant ses valeurs dans R^m, satisfaisant aux conditions de Carathéodory et telle que*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_I \sup_{|p|\leqslant n}\delta\big(f(t, p), F(t, p)\big)\,dt = 0\,. \tag{2.1}$$

3° *N est une application de $C^m(I)$ dans R^m continue et homogène ($N(\lambda x) = \lambda N(x)$; $x\in C^m(I)$, $\lambda\in R^1$).*

Nous allons comparer deux problèmes aux limites. Dans le premier on cherche une fonction absolument continue $x\in C^m(I)$ satisfaisant à l'équation différentielle

$$x'(t) = f\big(t, x(t)\big) \tag{2.2}$$

et à la condition

$$N(x) = r \qquad (r\in R^m)\,. \tag{2.3}$$

Le second consiste à chercher une fonction absolument cotinue $x \in C^m(I)$ vérifiant l'équation au contingent

$$x'(t) \in F\big(t, x(t)\big) \tag{2.4}$$

et la condition homogène

$$N(x) = 0 . \tag{2.5}$$

Une fonction absolument continue qui satisfait (2.2) (resp. (2.4)) presque partout dans I est appelée dans la suite solution de l'équation (2.2) (resp. (2.4)).

THÉORÈME 2.1. *Si les fonctions F, f et N satisfont aux conditions* 1°, 2°, 3° *et si le problème homogène* (2.4), (2.5) *n'a que la solution identiquement nulle, il existe au moins une solution du problème* (2.2), (2.3).

2.3. Avant de passer à la démonstration du théorème 2.1 nous allons démontrer le suivant

LEMME 2.1. *Si des fonctions $y_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ définies et mesurables dans I à valeurs dans R^m vérifient l'inégalité $|y_n(t)| \leqslant \psi(t)$ avec une fonction ψ sommable dans I, il existe une suite des indices a_n et un système de coefficients λ_{kn} $(n \leqslant k \leqslant a_n;\ n = 1, 2, \ldots)$ tels que*

$$\sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} = 1 , \qquad a_n \geqslant n , \qquad \lambda_{kn} \geqslant 0 \tag{2.6}$$

et que la suite

$$z_n(t) = \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} y_k(t)$$

converge vers une fonction $z_0(t)$ presque partout dans I.

Démonstration. Soit $L^{2,m}(I)$ l'espace des fonctions $x(t)$ définies dans I prenant leurs valeurs dans R^m et ayant les carrés $|x(t)|^2$ sommables dans I. Comme d'habitude la norme dans $L^{2,m}(I)$ est définie par la formule

$$\|x\|_L = \Big(\int_I |x(t)|^2 dt\Big)^{1/2}.$$

Posons $w_n(t) = y_n(t)/\sqrt{1+\psi(t)}$. On a alors

$$\|w_n\|_L^2 = \int_I \frac{|y_n(t)|^2}{1+\psi(t)} dt \leqslant \int_I \psi(t)\, dt < \infty$$

et par conséquent on peut trouver une sous suite $\{w_{\beta_n}\}$ et une fonction $w_0 \in L^{2,m}(I)$ telles que $\lim\limits_{n\to\infty} w_{\beta_n} = w_0$ au sens de la convergence faible dans l'espace $L^{2,m}(I)$. En vertu du théorème de Banach-Saks on peut aussi admettre, en remplaçant la suite $\{w_{\beta_n}\}$ par une suite partielle convenablement choisie que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n^2} w_{\beta_k}-w_0\right\|_L=0\,. \tag{2.7}$$

Comme les suites

$$\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n-1} w_{\beta_k}\right\|_L, \quad \left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k=n^2+1}^{n^2+n-1} w_{\beta_k}\right\|_L$$

tendent vers zéro, la relation (2.7) entraîne

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{n^2}\sum_{k=n}^{n^2+n-1} w_{\beta_k}-w_0\right\|_L=0\,.$$

D'après le théorème de Riesz il existe une suite d'indices $\sigma_n \geqslant n$ pour laquelle

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=\sigma_n}^{\alpha_n} w_{\beta_k}(t)=w_0(t)\,, \qquad \alpha_n=\sigma_n^2+\sigma_n-1$$

presque partout dans I. Il en vient immédiatement que la suite

$$z_n(t) \doteq \frac{1}{\sigma_n^2}\sum_{k=\sigma_n}^{\alpha_n} y_{\beta_k}(t)$$

converge presque partout dans I vers la fonction $z_0(t)=w_0(t)\sqrt{1+\psi(t)}$. Donc pour achever la démonstration il suffit d'admettre $\lambda_{kn}=1/\sigma_n^2$ s'il existe un indice i pour lequel $k=\beta_i$, $\sigma_n\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_n$ et $\lambda_{kn}=0$ dans le cas contraire.

2.4. Revenons maintenant à la démonstration du théorème 2.1 Soit E le produit cartésien des espaces $C^m(I)$ et R^m muni de la norme

$$\|(x,p)\|=\|x\|_C+|p| \qquad (x\in C^m(I),\ p\in R^m)\,. \tag{2.8}$$

Pour tout $(x,p)\in E$ désignons par $h(x,p)$ le couple $(\tilde{x},\tilde{p})$ tel que

$$\tilde{x}(t)=\int_{t_0}^{t} f\big(s,x(s)\big)\,ds+p\,, \qquad \tilde{p}=N(x)+p-r$$

et par $H(x,p)$ l'ensemble de couples $(\bar{x},\bar{p})$ donnés par les formules

$$\bar{x}(t)=\int_{t_0}^{t} y(s)\,ds+p\,, \qquad \bar{p}=N(x)+p\,, \qquad (t_0\in I) \tag{2.9}$$

quelle que soit la fonction mesurable $y(t)$ satisfaisant à la condition $y(t)\in F\big(t,x(t)\big)$ presque partout dans I.

Si (x, p) est un point invariant de l'application h, la fonction x constitue une solution du problème (2.2), (2.3). De même si $(x, p) \in H(x, p)$, la fonction x est une solution du problème (2.4), (2.5) et par l'hypothèse est identiquement nulle. De (2.9) il résulte que dans ce cas aussi $p = 0$ et par conséquent $(0, 0)$ est la solution unique de l'équation $(x, p) = H(x, p)$.

Il est facile de prouver que dans nos hypothèses h est une application complètement continue de E dans lui même. En vertu de (2.1) on peut aussi démontrer que les applications h et H satisfont à la condition

$$\lim_{\|(x,p)\|\to\infty} \frac{\varrho\big(h(x,p), H(x,p)\big)}{\|(x,p)\|} = 0$$

où $\varrho(u, Z)$ $(u \in E,\ Z \in E)$ désigne la distance d'élément u à l'ensemble Z définie à l'aide de la norme (2.8).

H applique évidemment E dans $c(E)$ et est homogène. Elle est aussi compacte. En effet, l'ensemble $\bigcup_{\|(x,p)\|=1} H(x, p)$ est contenu dans l'ensemble Z_φ de tous les couples $(\bar{\bar{x}}, \bar{\bar{p}})$ donnés par

$$\bar{\bar{x}}(t) = \int_{t_0}^{t} y(s)\,ds + p\,, \qquad |y(s)| \leqslant \varphi(s), \qquad |p| \leqslant 1\,,$$

$$|\bar{\bar{p}}| \leqslant \sup_{\|x\|_C=1} |N(x)| + 1\,.$$

Comme la fonction φ est sommable dans I, les fonctions $\bar{\bar{x}}$ sont bornées dans leur ensemble et équicontinues. De plus en vertu du fait que N est continue et homogène $\sup_{\|x\|_C=1} |N(x)|$ est fini. Il en vient que l'ensemble Z_φ est relativement compact dans E.

Donc, pour achever la démonstration du théorème 2.1 il suffit de faire recours au théorème 1.1 et vérifier que l'application H est semicontinue supérieurement. Soient en effet (x_n, p_n), (w_n, q_n) $(n = 0, 1, \ldots)$ des suites satisfaisant aux conditions

$$\lim_{n\to\infty} \|(x_n - x_0, p_n - p_0)\| = 0\,, \qquad \lim_{n\to\infty} \|(w_n - w_0, q_n - q_0)\| = 0\,,$$

$$(w_n, q_n) \in H(x_n, p_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,.$$

Nous allons démontrer que $(w_0, q_0) \in H(x_0, p_0)$. On a

$$w_n(t) = \int_{t_0}^{t} y_n(s)\,ds + p_n\,, \qquad y_n(s) \in F\big(s, x_n(s)\big) \tag{2.10}$$

et

$$q_n = N(x_n) + p_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)\,. \tag{2.11}$$

Posons $\eta = \sup_n \|x_n\|_C$. En tenant compte que $F(t, p)$ est homogène par rapport à p de la seconde des conditions (2.10) on obtient $|y_n(t)| \leqslant \eta\varphi(t)$. En vertu du lemme 2.1 il existe donc une fonction $z_0(t)$ et une suite $\{z_n(t)\}$ de la forme

$$z_n(t) = \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} y_n(t), \qquad \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} = 1$$

tendant vers $z_0(t)$ presque partout dans I.

Désignons par $F_\varepsilon(t, p)$ $(\varepsilon > 0)$ l'ensemble de tous les points $q \in R^m$ pour lesquels $\delta\big(q, F(t, p)\big) \leqslant \varepsilon$. L'ensemble $F_\varepsilon(t, p)$ est évidemment convexe et fermé. Comme $F(t, p)$ est continue par rapport à p, pour tout $t \in I$ il existe un indice $n(t, \varepsilon)$ à partir duquel $F\big(t, x_n(t)\big) \subset F_\varepsilon\big(t, x_0(t)\big)$. On a alors $y_n(t) \in F_\varepsilon\big(t, x_0(t)\big)$ et, par conséquent, aussi $z_n(t) \in F_\varepsilon\big(t, x_0(t)\big)$ pourvu que $n \geqslant n(t, \varepsilon)$. En passant à la limite d'abord pour n tendant vers l'infini et ensuite pour ε tendant vers zéro on obtient

$$z_0(t) \in F\big(t, x_0(t)\big) . \tag{2.12}$$

D'autre part de la première des conditions (2.10) on tire

$$\sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} w_k(t) = \int_{t_0}^{t} z_n(s)\, ds + \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} p_k \qquad (n = 1, 2, \ldots) . \tag{2.13}$$

De l'inégalité

$$\Big\| w_0 - \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} w_k \Big\|_C = \Big\| \sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} (w_0 - w_k) \Big\|_C \leqslant \sup_{k \geqslant n} \|w_k - w_0\|_C$$

il vient que la suite

$$\sum_{k=n}^{a_n} \lambda_{kn} w_k(t)$$

converge vers $w_0(t)$ dans I. La relation (2.13) entraîne alors

$$w_0(t) = \int_{t_0}^{t} z_0(s)\, ds + p_0 . \tag{2.14}$$

Enfin en passant à la limite dans (2.11) on obtient immédiatement

$$q_0 = N(x_0) + p_0 . \tag{2.15}$$

Les relations (2.12), (2.14) et (2.15) désignent par définition que $(w_0, q_0) \in H(x_0, p_0)$. L'application H est donc semi-continue supérieurement et le théorème 2.1 se trouve ainsi démontré.

2.5. En vertu du théorème 2.1 il est facile d'établir des conditions assurant non seulement l'existence mais aussi l'unicité de solutions du problème (2.2), (2.3). Considérons notamment les hypothèses 4°, 5° suivantes:

4° *$f(t,p)$ est une fonction définie dans $I\times R^m$ prenant ses valeurs dans R^m et satisfaisant aux conditions*

$$f(t,q)-f(t,p)\in F(t,q-p), \qquad \int_I |f(t,0)|\,dt<\infty .$$

Pour tout $p\in R^m$ la fonction $f(t,p)$ est mesurable par rapport à t.

5° *N est une application linéaire (additive, homogène) et continue de $C^m(I)$ dans R^m.*

Il est clair que des fonctions f, F, N satisfaisant aux conditions 1°, 4°, 5° vérifient aussi 1°, 2°, 3°. De plus dans les hypothèses 4°, 5° l'unicité de la solution nulle du problème (2.4), (2.5) entraîne l'unicité de solutions du problème (2.2), (2.3). On a alors le

Corollaire 2.1. *Si les fonctions f, F, et N satisfont aux conditions* 1°, 4°, 5° *et si le problème homogène* (2.4), (2.5) *n'a que la solution identiquement nulle, il existe exactement une solution du problème* (2.2), (2.3).

2.6. Comme un exemple nous allons considérer le système (2.2) avec la condition

$$x(a)+\lambda x(\beta)=r \qquad (\beta>a). \tag{2.16}$$

Le problème (2.2), (2.16) concerne en particulier (pour $\lambda=-1$, $r=0$) la question d'existence des solutions périodiques de période $\beta-a$. Mais nous allons d'abord étudier le cas plus simple ou $|\lambda|\neq 1$.

Lemme 2.2. *Supposons qu'une fonction absolument continue $x\in C^m([a,\beta])$ satisfasse à la condition* (2.16) *pour $r=0$ et à l'inégalité*

$$|x'(t)|\leqslant \mu_0(t)|x(t)| \tag{2.17}$$

où

$$\int_a^\beta \mu_0(t)\,dt<\big|\ln|\lambda|\big| . \tag{2.18}$$

Dans ces hypothèses x est identiquement nulle.

Démonstration. Posons $z(t)=|x(t)|$. On a alors

$$|z'(t)|=\frac{\big|(x'(t),x(t))\big|}{|x(t)|}\leqslant |x'(t)|$$

d'où en vertu de (2.17) on obtient

$$|z'(t)|\leqslant \mu_0(t)z(t)$$

et par conséquent

$$z(t) \leqslant z(t_0)e^{\left|\int_{t_0}^{t} \mu_0(s)ds\right|} \tag{2.19}$$

quels que soient $t, t_0 \in [a, \beta]$. Donc la fonction $z(t)$ ou bien est identiquement nulle ou bien est différente de zéro dans tout intervalle $[a, \beta]$. Cependant le second cas est impossible. En effet, d'après (2.16) (pour $r = 0$) et (2.19) on ait

$$\left|\ln|\lambda|\right| = \left|\ln\frac{z(\beta)}{z(a)}\right| \leqslant \int_a^\beta \mu_0(s)ds$$

ce qui est en contradiction avec (2.18).

THÉORÈME 2.2. *Si la fonction $f(t, p)$ définie dans $[a, \beta] \times R^m$ à valeurs dans R^m satisfait aux conditions de Carathéodory et à l'inégalité*

$$|f(t, p)| \leqslant \mu_0(t)|p| + \mu_1(t) \tag{2.20}$$

où μ_1 est sommable dans $[a, \beta]$ et μ_0 vérifie (2.18), *il existe au moins une solution du problème* (2.2), (2.16).

Si la fonction $f(t, p)$ satisfait à la condition de Lipschitz

$$|f(t, p) - f(t, q)| \leqslant \mu_0(t)|p - q| \tag{2.21}$$

cette solution est unique.

Démonstration. Posons

$$F_0(t, p) = \{q\colon\ q \in R^m,\ |q| \leqslant \mu_0(t)|p|\}.$$

Il est clair que F_0 est une application de $[a, \beta] \times R^m$ dans $\mathrm{cf}(R^m)$ homogène par rapport à p satisfaisant aux condition de Carathéodory. De plus en vertu du lemme 2.2 il résulte que le problème

$$x'(t) \in F_0(t, x(t)), \qquad x(a) + \lambda x(\beta) = 0$$

admet seulement la solution nulle. D'après (2.20) (resp. (2.21)) on tire aussi

$$\delta\big(f(t, p), F_0(t, p)\big) \leqslant \mu_1(t) \qquad (\text{resp. } f(t, q) - f(t, p) \in F_0(t, q - p)).$$

Donc pour achever la démonstration il suffit de se référer au théorème 2.1 (resp. corollaire 2.1).

L'évaluation (2.18) est la meilleure possible de ce type. Plus précisement le théorème 2.2 ne reste pas valable si le signe de l'inégalité forte dans (2.18) est remplacé par celui de l'inégalite faible. En effet, on peut vérifier par un calcul simple que toute solution de l'équation

$$x'(t) = -\mu_0(t)x(t) \tag{2.22}$$

où

$$\int_a^\beta \mu_0(t)dt = \ln(-\lambda), \qquad \lambda < -1$$

satisfait à la condition homogène $x(\alpha)+\lambda x(\beta)=0$, et par conséquent pour $r\neq 0$ le problème non homogène (2.22), (2.16) n'admet pas de solutions.

2.6. Passons maintenant à l'étude du problème (2.2), (2.16) dans le cas où $|\lambda|=1$. La méthode que nous allons utiliser est un peu analogue à la méthode des fonctions dirigeant de Krasnosielski-Pieroff [3].

Soit $\omega(p)$ une forme quadratique et soit $v(p)$ le gradient de $\omega(p)$

$$v(p)=\operatorname{grad}\omega(p)\,. \tag{2.23}$$

On a alors le suivant

Lemme 2.3. *Supposons qu'une fonction absolument continue $x\in C^m([\alpha,\beta])$ satisfasse à la condition* (2.16) *pour* $|\lambda|=1$, $r=0$ *et aux inégalités*

$$\big(v(x(t)),x'(t)\big)\geqslant\sigma(t)|x(t)|^2,\quad \int_\alpha^\beta\sigma(t)dt>0\,,\quad \sigma(t)\geqslant 0\,, \tag{2.24}$$

$$|x'(t)|\leqslant\mu(t)|x(t)| \tag{2.25}$$

où μ est sommable dans $[\alpha,\beta]$ et v est définie par (2.23). *Dans ces hypothèses x est identiquement nulle.*

Démonstration. De (2.25) il résulte que la fonction $x(t)$ ou bien est différente de zéro dans tout l'intervalle $[\alpha,\beta]$, ou bien est identiquement nulle. Supposons que la première possibilité ait lieu. On a alors, vu (2.24),

$$\int_\alpha^\beta\big(v(x(t)),x'(t)\big)dt\geqslant\int_\alpha^\beta\sigma(t)|x(t)|^2dt\geqslant\min_{[\alpha,\beta]}|x(t)|^2\int_\alpha^\beta\sigma(t)dt>0\,.$$

D'autre part d'après (2.23) et (2.16) (pour $|\lambda|=1$, $r=0$) on obtient

$$\int_\alpha^\beta\big(v(x(t)),x'(t)\big)dt=\omega\big(x(\beta)\big)-\omega\big(x(\alpha)\big)=0$$

ce qui est impossible.

Théorème 2.3. *Si la fonction $f(t,p)$ à valeurs dans R^m vérifie dans l'ensemble $[\alpha,\beta]\times R^m$ les conditions de Carathéodory et les inégalités*

$$\big(f(t,p),v(p)\big)\geqslant\sigma(t)|p|^2,\quad \int_\alpha^\beta\sigma(t)dt>0,\quad \sigma(t)\geqslant 0\,, \tag{2.26}$$

$$|f(t,p)|\leqslant\mu(t)(1+|p|) \tag{2.27}$$

où μ est sommable dans $[\alpha,\beta]$ et $v(p)$ est définie par (2.23), *il existe au moins une solution du système* (2.2) *satisfaisant aux conditions* (2.16) *avec* $|\lambda|=1$.

Démonstration. Soit F_1 l'application de $[\alpha, \beta]\times R^m$ dans $\mathrm{cf}(R^m)$ définie par

$$F_1(t, p) = \{q\colon\ q \in R^m,\ (q, v(p)) \geqslant \tfrac{1}{2}\sigma(t)|p|^2,\ |q| \leqslant 2\mu(t)|p|\}.$$

Il est facile de vérifier que F_1 est homogène par rapport à p et satisfait aux conditions de Carathéodory. D'après le lemme 2.2 il résulte que le problème homogène

$$x'(t) \in F_1(t, x(t)), \qquad x(\alpha)+\lambda x(\beta) = 0 \qquad (|\lambda| = 1)$$

admet seulement la solution nulle.

Posons

$$g(t, p) = \frac{|p|f(t, p)}{1+|p|}, \qquad |p| \geqslant 1.$$

En vertu de (2.26) et (2.27) on a

$$g(t, p) \in F_1(t, p), \qquad |f(t, p)-g(t, p)| \leqslant \mu(t)$$

d'où

$$\delta(f(t, p), F_1(t, p)) \leqslant |f(t, p)-g(t, p)| \leqslant \mu(t).$$

Notre théorème est donc une conclusion immédiate du théorème général 2.1.

Travaux cités

[1] I. Barbalat, A. Halanay, *Solutions périodiques des systèmes d'équations différentielles non-linéaires*, Rev. Math. Pures Appl. 3 (1958), p. 395-411.

[2] A. Granas, *The theory of compact vector fields and some of its applications to topology of functional spaces* (I), Rozprawy Matematyczne 30 (1962).

[3] М. А. Красносельский и А. И. Перов, *Об одном принципе существования, ограниченных, периодических и почти-периодических решений у системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, ДАН СССР 123 (1958), p. 235-238.

[4] A. Lasota, *Sur une généralisation du premier théorème de Fredholm*, Bull. Acad. Polon., Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 11 (1963), p. 89-94.

[5] — *Sur les problèmes linéaires aux limites pour système d'équations différentielles ordinaires*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 10 (1962), p. 565-570.

[6] A. Lasota et Z. Opial, *Sur un problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 9 (1961), p. 667-671.

[7] — — *L'existence et l'unicité des solutions du problème d'interpolation pour l'équation différentielle ordinaire d'ordre n*, Ann. Polon. Math. 15 (1964), p. 253-271.

[8] — — *Sur les solutions périodiques des équations différentielles ordinaires*, Ann. Polon. Math. 16 (1964), p. 69-94.

[9] A. Pliś, *Remark on measurable set-valued functions*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. sci. math., astr. et phys., 9 (1961), p. 857-859.

Reçu par la Rédaction le 28. 1. 1965