ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte vom Typus J mit messbarer Transformationsregel

Von A. ZAJTZ (Kraków)

1. Einleitung. In der vorliegenden Arbeit werden alle linearen homogenen geometrischen Objekte vom Typus J (vgl. [1], S. 47) mit beliebiger Anzahl der Komponenten und mit messbarer Transformationsregel klassifiziert.

Das sind die Objekte, deren Komponenten $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ sich nach der Regel

$$\Omega' = F(J)\,\Omega \tag{1}$$

transformieren, wobei J die Jacobische Determinante der Koordinatentransformation bedeutet, F eine quadratische Metrix n-ter Ordnung ist und Ω, Ω' Matrizen mit n Reihen und einer Spalte

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{bmatrix}, \quad \Omega' = \begin{bmatrix} \omega_1' \\ \vdots \\ \omega_n' \end{bmatrix}$$

darstellen. Wir werden voraussetzen, dass die Funktion $F(J)$ mit Matrixwerten messbar ist.

Die Bestimmung aller Objekte (1) spielt eine besondere Rolle in der Klassifikation beliebiger linearer homogener geometrischer Objekte. Es genügt zu erwähnen, dass jedes obengenannte Objekt, dessen Komponentenzahl kleiner als die Dimension des Raumes ist, ein Objekt vom Typus J darstellt [7].

Bisherige Resultate umfassen die Fälle $n = 1, 2, 3$. Insbesondere wurde bewiesen, dass jedes lineare Objekt (1) mit einer Komponente entweder dem Skalar

$$\omega' = \omega, \quad \omega \in (-\infty, \infty)$$

oder dem Biskalar

$$\omega' = (\operatorname{sgn} J)\,\omega$$

oder der Weylschen Dichte vom Gewicht -1

$$\omega' = |J|\,\omega$$

oder der gewöhnlichen Dichte vom Gewicht -1

$$\omega' = J\omega$$

(die mit der s.g. G-Dichte vom Gewicht -1 zusammenfällt) äquivalent ist, [7] (1).

In ihrer Mehrheit werden die Objekte (1) den Vereinigungen derjenigen einkomponentigen Objekte äquivalent.

Volle Klassifikation der Objekte (1) mit zwei und drei Komponenten wurde in den Arbeiten [5] und [6] von M. Kucharzewski und M. Kuczma durchgeführt.

Im Paragraphen 2 geben wir eine allgemeine Methode der Untersuchung der Äquivalenz der linearen homogenen J-Objekte an. Die Formeln (4) können zugleich zur Konstruktion der Skalarkomitanten dieser Objekte dienen.

2. Hilfssätze. Einer der Grundbegriffe dieser Arbeit ist der Begriff des Vereinigungsobjektes (vgl. [1], S. 13). In der Darstellungstheorie entspricht ihm der Begriff des direkten Produktes von Darstellungen. Sind nämlich die Objekte $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ mit den Wertebereichen (Fasern, vgl. [4]) $X_1, \ldots, X_k$ gegeben, so hat das Vereinigungsobjekt

$$\Omega = (\Omega_1, \ldots, \Omega_k) \tag{2}$$

die Menge $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k$ als Faser und es transformieren sich seine Bestandobjekte Ω_i nach eigenen Transformationsregeln.

HILFSSATZ 1. *Ist eines der Objekte Ω_i (z.B. Ω_k) von den übrigen funktional-abhängig, d. h. $\Omega_k = \varphi(\Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1})$, so ist das Objekt* (2) *dem Vereinigungsobjekt* $(\Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1})$ *äquivalent* (*in diesem Sinne kann Ω_k aus* (2) *eliminiert werden*).

Die verwandte Äquivalenz wird durch die umkehrbare Abbildung

$$(\Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1}) \to \big(\Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1}, \varphi(\Omega_1, \ldots, \Omega_{k-1})\big)$$

erzeugt.

HAUPTHILFSSATZ. *Ist ein Objekt Ω mit der Transformationsregel* (1) *und eine aus ihm gebildete nichttriviale göwhnliche Dichte vom Gewicht* -1

$$\theta' = J\theta, \qquad \theta = \varphi(\Omega) \neq 0 \tag{3}$$

gegeben, so gelten folgende Behauptungen

I. *Das Funktionensystem*

$$\Sigma = F^{-1}(\theta)\,\Omega|_{\theta=\varphi(\Omega)}, \tag{4}$$

---

(1) Die zitierte Literatur ist nicht vollständig. Betreffs der hier nicht erklärten Definitionen verweisen wir den Leser auf [1] und [4].

wo Σ eine einspaltige Matrix der Funktionen $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ bedeutet, stellt ein System von Skalarkomitanten von Ω dar.

II. *Das Objekt Ω ist im Definitionsbereich der Funktion $\varphi(\Omega)$ (bezeichnet durch D_θ) dem aus einer gewöhnlichen Dichte vom Gewicht -1 und n Skalaren bestehenden Vereinigungsobjekt*

$$(\theta, \Sigma) = (\theta, \sigma_1, \ldots, \sigma_n) \tag{5}$$

mit folgender Untermenge von R^{n+1}

$$\{(\theta, \Sigma);\ \theta \neq 0, F(\theta)\Sigma \in D_\theta\} \tag{6}$$

als Faser, äquivalent.

III. *Ist $D_\theta = R^n \setminus \{0\}$, so ist Ω im ganzen Raum R^n der Vereinigung* (5) *mit der Hyperfläche* (6) ([2]) *und mit dem Nullpunkt* $(0 \ldots 0)$ *als Faser äquivalent.*

Im Fall $F(J) = F(|J|)$ gelten obige Behauptungen auch wenn θ eine nicht verschwindende Weylsche Dichte (kurz W-Dichte) vom Gewicht -1 ist.

Beweis. Gemäss der Gruppenbedingung der Transformationsregel (1) genügt die Matrixfunktion $F(J)$ der Funktionalgleichung

$$F(J_1 J_2) = F(J_1) F(J_2) \tag{7}$$

für alle reellen $J_1, J_2 \neq 0$. Daraus und aus (1), (3) und (4) folgt

$$\begin{aligned} \Sigma' &= F^{-1}(\theta')\Omega' = F^{-1}(J\theta)F(J)\Omega \\ &= \big(F(J)F(\theta)\big)^{-1}F(J)\Omega = F^{-1}(\theta)\Omega = \Sigma \end{aligned}$$

d.h. die Behauptung I.

Zum Beweis der Behauptung II genügt es zu bemerken, dass die Abbildung

$$\theta = \varphi(\Omega), \qquad \Sigma = F^{-1}(\theta)\Omega|_{\theta=\varphi(\Omega)} \tag{8}$$

umkehrbar ist. Die Umkehrabbildung

$$\Omega = F(\theta)\Sigma \tag{9}$$

bildet eine Hyperfläche (6) auf die Menge D_θ ab.

Um den Punkt III zu erhalten, ergänzen wir die Abbildung (8) durch die Zuordnung der Nullpunkte der Komponentenräume R^n und R^{n+1}.

Den letzten Teil des obigen Hilfssatzes prüft man leicht analogerweise nach.

Bemerkung 1. Sind die Funktionen $F(J)$ und $\varphi(\Omega)$ stetig, so sind auch die Funktionen (8) und (9) stetig und folglich sind die Objekte Ω und (5) stark äquivalent (vgl. [4], S. 41), d.h. es gibt ein Homeomorphism zwischen ihren Fasern.

([2]) Derer Gleichungen sind $\Sigma = F^{-1}(\theta)\Omega$, $\theta \neq 0$, $\Omega \in D_\theta$.

3. Kanonische Form der allgemeinen Lösung der Gleichung (7). Ist $F(J)$ eine Lösung der Matrizenfunktionalgleichung (7), so gilt dies auch für die Funktion $CF(J)C^{-1}$, wo C eine beliebige nichtsinguläre Matrix bedeutet. Überdies sind die Objekte mit den Transformationsformeln (1) und

$$\Omega' = CF(J)C^{-1}\Omega$$

stark äquivalent (siehe z.B. [5] S. 32). Deshalb genügt es bis auf Äquivalenz nur die möglich einfache (kanonische) Form der Lösung $F(J)$ zu betrachten.

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$K = \begin{bmatrix} a & & & \\ 1 & a & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & a \end{bmatrix}$$

und

$$L = \begin{bmatrix} A & & & \\ E & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & E & A \end{bmatrix}$$

mit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

wo a und b — reelle Zahlen sind. Die Matrizen K und L sind also die reellen Jordanschen Kästchen.

Wie in der Arbeit [8] von M. Kuczma und A. Zajtz gezeigt wurde ist die kanonische Form der allgemeinen Lösung der Gleichung (7) eine verallgemeinerte Diagonalmatrix mit den Blöcken $F_p(J)$, d.h.

$$F(J) = \{F_1(J), \ldots, F_v(J)\}$$

wobei jedes $F_p(J)$ eine der folgenden Matrizen

$$(10) \qquad |J|^K, \ (\operatorname{sgn} J)|J|^K, \ |J|^L, \ (\operatorname{sgn} J)|J|^L$$

darstellt.

Die Exponentialmatrizen $|J|^K$ and $|J|^L$ aus (10) sind von der Gestalt

$$
(11) \qquad |J|^K = |J|^a \begin{bmatrix}
1 & & & & \\
\ln|J| & 1 & & & \\
\frac{1}{2}\ln^2|J| & \ln|J| & 1 & & \\
\cdots & \cdots & & \ddots & \\
\cdots & \cdots & & & \ddots \\
\frac{1}{(n-1)!}\ln^{n-1}|J| & \cdots & & \ln|J| & 1
\end{bmatrix}
$$

und

$$
(12) \qquad |J|^L = \begin{bmatrix}
c & s & & & & & & \\
-s & c & & & & & & \\
lc & ls & c & s & & & & \\
-ls & lc & -s & c & & & & \\
\frac{l^2}{2!}c & \frac{l^2}{2!}s & lc & ls & c & s & & \\
-\frac{l^2}{2!}s & \frac{l^2}{2!}c & -ls & lc & -s & c & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
\frac{l^{n-1}}{(n-1)!}c & \frac{l^{n-1}}{(n-1)!}s & & & & & & \\
-\frac{l^{n-1}}{(n-1)!}s & \frac{l^{n-1}}{(n-1)!}c & \cdots & & & & c & s \\
 & & & & & & -s & c
\end{bmatrix},
$$

wo

$$
c = |J|^a\cos(b\ln|J|), \qquad s = |J|^a\sin(b\ln|J|), \qquad l = b\ln|J|.
$$

Laut der Zerlegung von $F(J)$ zerlegt sich das, dem $F(J)$ entsprechende Objekt Ω in die Objekte Ω_p mit den Transformationsregeln

$$
(13) \qquad \Omega'_p = F_p(J)\,\Omega_p,
$$

Ω kann dann als das Vereinigungsobjekt $(\Omega_1, \Omega_2, \ldots)$ betrachtet werden und infolgedessen kann man das Klassifikationsproblem für Ω auf die Klassifikation der Faktorobjekte Ω_p zurückführen. In dem folgenden klassifizieren wir die Objekte Ω_p in Abhängidkeit von der Gestalt der Matrix $F_p(J)$ in (13).

4. Fall $F(J) = |J|^K$ (bzw. $F(J) = \operatorname{sgn} J|J|^K$). In diesem Fall transformieren sich die Komponenten des Objektes Ω folgendermassen

$$\begin{aligned}
&\omega_1' = |J|^a \omega_1, \\
&\omega_2' = |J|^a (\omega_2 + \omega_1 \ln |J|), \\
(14) \qquad &\omega_3' = |J|^a \left(\omega_3 + \omega_2 \ln |J| + \frac{1}{2!}\, \omega_1 \ln^2 |J|\right), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&\omega_n' = |J|^a \left(\omega_n + \omega_{n-1} \ln |J| + \dots + \frac{1}{(n-1)!}\, \omega_1 \ln^{n-1} |J|\right),
\end{aligned}$$

bzw. multiplizieren sich die rechten Seiten dieser Gleichungen durch $\operatorname{sgn} J$.

Führen wir folgende Bezeichnungen für gewisse Untermengen des Komponentenraumes R^n ein

$$\begin{aligned}
&W_1\colon\ \omega_1 \neq 0, \\
(15) \qquad &W_2\colon\ \omega_1 = 0,\ \omega_2 \neq 0, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&W_n\colon\ \omega_1 = \dots = \omega_{n-1} = 0,\ \omega_n \neq 0,
\end{aligned}$$

d.h. W_1 ist die Menge aller Punkte $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ für die $\omega_1 \neq 0$, u.s.w.

Nun wollen wir zwei wesentlich voreinander verschiedene Unterfälle: $a \neq 0$ und $a = 0$ unterscheiden.

1. $a \neq 0$. In der Menge W_k transformiert sich, nach (14), die Komponente ω_k d.h. die erste von Null verschiedene Komponente, als eine W-Dichte vom Gewicht $-a$. Folglich stellt das Objekt

$$(16) \qquad \theta_k = |\omega_k|^{1/a} \operatorname{sgn} \omega_k$$

eine W-Dichte vom Gewicht -1 dar. Um die Behauptung II zu benutzen, setzen wir

$$\Sigma = F^{-1}(\theta_k)\, \Omega$$

und nach (16) $\varphi(\Omega) = \theta_k(\Omega)$. Die Matrix $F^{-1}(\theta)$ ist diesmal gleich der Potenz $|\theta|^{-k}$ und hat folgende Form

$$|\theta|^{-k} = |\theta|^{-a} \begin{bmatrix}
1 & & & & \\
-\ln|\theta| & 1 & & & \\
\frac{1}{2!}\ln^2|\theta| & -\ln|\theta| & 1 & & \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \\
(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}\ln^{n-1}|\theta| & \dots & & -\ln|\theta| & 1
\end{bmatrix}$$

Die Abbildung (8) führt die Menge W_k in folgende Untermenge S_k von R^{n+1} (Raum der Veränderlichen $\theta_1 \sigma_1, \dots, \sigma_n$) über:

(17) $$S_k\colon\ \theta \neq 0,\ \sigma_1 = \dots = \sigma_{k-1} = 0,\ \sigma_k = \operatorname{sgn}\theta.$$

S_k ist zugleich die Untermenge (6) aus der Behauptung II. Gemäss dieser Behauptung ist Ω im Gebiet W_k dem Vereinigungsobjekt (5) mit dem Gebiet (17) als Faser, äquivalent. Da die diese Äquivalenz erzeugenden Abbildungen

$$\theta = |\omega_k|^{1/a} \operatorname{sgn}\omega_k, \qquad \Sigma = |\theta|^{-k}\Omega$$

und die zu ihr umgekehrten

$$\Omega = |\theta|^k \Sigma$$

stetig sind, so sind diese Objekte stark äquivalent.

Insbesondere ist das Objekt Ω im Gebiet W_1, d.h. ausserhalb der Hyperebene $\omega_1 = 0$, der Vereinigung (5) im Gebiet S_1: $\sigma_1 = \operatorname{sgn}\theta \neq 0$ äquivalent. In S_1 ist also die Komponente σ_1 von θ funktional-abhängig und laut des Hilfssatzes 1 kann sie von dieser Vereinigung eliminiert werden. Folglich ist Ω ausserhalb der Hyperebene $\omega = 0$ dem Vereinigungsobjekt

(18) $$(\theta, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$$

einer nicht-verschwindenden W-Dichte vom Gewicht -1 und $(n-1)$ Skalaren äquivalent.

Das Äquivalenzproblem für Ω in der Hyperebene $\omega_1 = 0$ betrachtet man auf den in ihr enthaltenen Gebiete $S_2, S_3, \dots$ u.s.w. Unter analoger Benutzung des Hilfssatzes 1 erhält man in diesen Fällen die starke Äquivalenz des Ω zum Vereinigungsobjekt von einer oben erwähnten Dichte und von den entsprechenden $n-2, n-3, \dots, 0$ Skalaren. Nach Zuordnung dem Nullpunkte von Ω des Nullpunktes $\theta = \sigma_1 = \dots = \sigma_n = 0$ von (5) haben wir das Äquivalenzproblem im ganzen Komponentenraum R^n gelöst. Obige Resultate erlauben uns den folgenden Satz auszusprechen.

SATZ 1. *Im Fall $F(J) = |J|^K$ und $a \neq 0$ ist das Objekt* (1) *dem Vereingungsobjekt von einer W-Dichte θ vom Gewicht -1 und $(n-1)$ Skalaren äquivalent, mit der Bedingung, dass falls $\theta = 0$, alle Skalare verschwinden* [3].

Bemerkung. Das oben erwähnte Vereinigungsobjekt von der Gestalt (18) ist der Vereinigung von n W-Dichten vom Gewicht -1 äquivalent. Die Äquivalenz der Dichtenfolge $\theta_1 = \theta, \theta_2, \dots, \theta_n$ zu dem (18) kann mit Hilfe der Abbildung $\sigma_i = \theta_i/\theta_1$ $(i = 2, \dots, n)$ falls $\theta_1 \neq 0$ und der zusätzlichen Zuordung $(0, \dots, 0) \leftrightarrow \theta_1 = \dots = \theta_n = 0$ realisiert werden.

---

[3] Das bedeutet, dass dieses Objekt ausser des Nullpunktes keine einpunktigen transitiven Fasern besitzt.

2. Fall $a = 0$. Aus (14) folgt, dass ω_1 diesmal ein Skalar ist und falls $\omega_1 \neq 0$ stellt das Objekt

$$\theta = \exp(\omega_2/\omega_1) \tag{20}$$

eine nichttriviale Dichte vom Gewicht -1 dar. Die entsprechende Abbildung (8) führt jetzt das Gebiet W_1 in die Hyperebene $\sigma_2 = 0$ mit Bedingung $\theta \neq 0$ (die Untermenge (6)) über. Ω ist damit auf W_1 der Vereinigung einer Dichte vom Gewicht -1 und $(n-1)$ Skalaren $\sigma_1, \sigma_3, \ldots, \sigma_n$, wo $\sigma_1 \neq 0$, äquivalent.

In den Gebieten $W_2, \ldots, W_{n-1}$ erhält man analoge Behauptungen; nur die Anzahl der von Null verschiedenen Skalare ist ensprechend kleiner. In W_n kann man keine nichttriviale Dichte bilden, in diesem Gebiet stellt Ω ein Skalar $(= \omega_n)$ dar. Im vorhergehenden Fall enthält Ω nur eine einpunktige transitive Faser und nämlich den Nullpunkt. Jetzt aber besitzt es die ganze Gerade W_n derartigen Fasern. Dies bedeutet, dass die den Fällen $a \neq 0$ und $a = 0$ entsprechenden Objekte nichtäquivalent sind. Es gilt also den folgenden.

SATZ 2. *Ist in den Formeln* (14) $a = 0$, *so ist das Objekt* Ω *dem Vereinigungsobjekt von einer W-Dichte vom Gewicht* -1 *und* $(n-1)$ *Skalaren äquivalent, mit der Bedingung, dass falls die Dichte gleich Null ist, dann genau ein Skalar von Null verschieden ist. Den Fällen* $a = 0$ *und* $a \neq 0$ *entsprechenden nichtäquivalente Objekte.*

Im Fall $F(J) = \operatorname{sgn} J |J|^K$ ist unser Gedankengang ganz analog wie der obige. Die Formeln (16) falls $a \neq 0$ und (20) falls $a = 0$ definieren diesmal entsprechend eine G-Dichte und eine W-Dichte vom Gewicht -1. In die Formeln (4), (8) und (9) setzen wir $|\theta|$ ein. Infolgedessen sind die Grössen $\Sigma = |\theta|^{-K}\Omega$ die Biskalare und das Objekt (5) besteht aus einer G-Dichte bzw. einer W-Dichte und Biskalaren. Die Bedingungen (6) für die Faser dieser Vereinigung sind dieselbe wie im Fall $F(J) = |J|^K$. Auf diese Weise bekommen wir den folgenden

SATZ 3. *Im Fall* $F(J) = \operatorname{sgn} J |J|^K$ *ist* Ω *der Vereinigung einer G--Dichte vom Gewicht* -1 *falls* $a \neq 0$ *und einer W-Dichte vom Gewicht* -1 *falls* $a = 0$ *und* $n-1$ *Biskalare äquivalent, mit denselben wie in den Sätzen* 1, 2 *Bedingungen auf die Wertebreiche dieser Vereinigung.*

Bemerkung. Ist die Komponentenzahl $n = 1$, d.h. besitzt das Objekt (14) nur eine Komponente ω_1, so ist es einfach einer der in der Einleitung erwähnten Grössen äquivalent. Obige Formulierungen entsprechen eigentlich dem Fall $n \geqslant 2$. Im folgenden wird die Ordnung der Matrix $F(J)$ eine gerade Zahl, ihr entspricht die Komponentenzahl des Objektes, die wir mit $2n$ bezeichnen werden.

5. Fall $F(J) = |J|^L$ (bzw. $= (\operatorname{sgn} J)|J|^L$). Die explizite Form der Transformationsregel (1) ist diesmal die folgende

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\omega_1' &= \omega_1 c + \omega_2 s,\\
\omega_2' &= -\omega_1 s + \omega_2 c,\\
\omega_3' &= \omega_3 c + \omega_4 s + \omega_1 cl + \omega_2 sl,\\
\omega_4' &= -\omega_3 s + \omega_4 c - \omega_1 sl + \omega_2 cl,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\omega_{2n-1}' &= \omega_{2n-1} c + \omega_{2n} s + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left[\omega_1 cl^{n-1} + \omega_2 sl^{n-1}\right],\\
\omega_{2n}' &= -\omega_{2n-1} s + \omega_{2n} c + \ldots + \frac{1}{(n-1)!}\left[-\omega_1 sl^{n-1} + \omega_2 cl^{n-1}\right],
\end{aligned}
$$

wo $c = |J|^a \cos(b \ln |J|)$, $s = |J|^a \sin(b \ln |J|)$, $l = b \ln |J|$ (bzw. multiplizieren sich die rechten Seiten dieser Formeln durch $\operatorname{sgn} J$).

In diesem Fall sind die Mengen (15) den Transformationen (21) gegenüber nicht invariant. Zur Untersuchung des Äquivalenzproblems führen wir jetzt in die Betrachtung folgende Untermengen vom Komponentenraum R^{2n} ein:

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&Z_1\colon\ \omega_1^2 + \omega_2^2 > 0,\\
&Z_2\colon\ \omega_1 = \omega_2 = 0;\quad \omega_3^2 + \omega_4^2 > 0,\\
&Z_n\colon\ \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_{2n-2} = 0,\quad \omega_{2n-1}^2 + \omega_{2n}^2 > 0.
\end{aligned}
$$

Diese Untermengen sind hinsichtlich der Transformationen (21) invariant.

1. Fall $a \neq 0$. Das Objekt

$$
23)\qquad \theta = (\omega_1^2 + \omega_2^2)^{1/2a}
$$

stellt im Gebiet Z_1 eine nichverschwindende W-Dichte vom Gewicht -1, dar. Um die explizite Form der Matrix $F^{-1}(\theta)$ zu bekommen, setzen wir in der Matrix (12) θ statt J ein und ändern das Zeichen bei jedem $\sin(b \ln \theta)$ auf das entgegengesetzte. Die durch die Formel (4) bestimmten Skalaren (d.h. $\Sigma = F(|\theta|)^{-1}\Omega$) erfüllen nur die folgende Beziehung

$$
(24)\qquad \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1
$$

trotzdem sind sie unabhängig, wenn Ω die ganze Menge Z_1 durchläuft.

Die Faser (6) ist damit durch die Gleichung (24) mit zusätzlicher Bedingung $\theta > 0$ bestimmt. Im Gebiet Z_2 wird die entsprechende Faser (6) durch folgende analoge Formeln bestimmt

$$
\theta > 0,\quad \sigma_1 = \sigma_2 = 0,\quad \sigma_3^2 + \sigma_n^2 = 1,
$$

u.s.w.

Im Fall $F(J) = \operatorname{sgn} J |J|^L$ und $a \neq 0$ bestimmt die Formel (23) auch eine W-Dichte vom Gewicht -1 und die Fasern (6) haben dieselbe

Form wie die obigen. Diesmal aber sind die Grössen Σ die Biskalare. Wir können folgenden Satz aussprechen

SATZ 4. *Im Fall* $F(J) = |J|^L$ (*bzw.* $F(J) = \operatorname{sgn} J\,|J|^L$) *und* $a \neq 0$ *ist das Objekt* Ω *dem Vereinigungsobjekt von einer W-Dichte vom Gewicht* -1 *und* $2n-1$ *Skalaren äquivalent,* (*bzw. Biskalaren*) *mit der Bedingung, dass falls die Dichte verschwindet, auch alle Skalare* (*Biskalare*) *verschwinden und mit der Bedingung* $\sigma_{2k-1}^2 + \sigma_{2k}^2 = 1$ *für* $2 \leqslant k \leqslant n$, *wenn* $\sigma_1 = \ldots = \sigma_{2k-2} = 0$.

2. Fall $a = 0$. Zuerst geben wir eine theoretische Vorbereitung, indem wir den Begriff des „Kreisobjektes" einführen, der in dieser Form (und unter dieser Benennung) nicht auftratt.

Bezeichnen wir mit (Mod c) die Äquivalenzrelation: a ist kongruent mit b dann und nur dann, wenn ab^{-1} eine Potenz c^k (k — eine ganze Zahl, a, b reell und $\neq 0$, $c \neq 1$) darstellt.

DEFINITION. Das geometrische Objekt erster Klasse mit der Transformationsregel

$$\theta' = |J|\,\theta \ (\mathrm{Mod}\, c) \tag{25}$$

nennen wir ein *Kreisobjekt mit Periode c*, und das mit der Transformationsregel

$$\theta' = |J|\,\theta \exp \frac{1-\operatorname{sgn} J}{2} \ln c \ (\mathrm{Mod}\, c^2) \tag{26}$$

ein *Bikreisobjekt mit Periode c* ([4]).

Die Wertebereiche (Fasern) dieser Objekte sind die Intervalle, deren Endpunkte identifiziert sind, d.h. beide sind dem Kreis homeomorph. Dem Objekt (25) entspricht das Intervall $[1, c)$ und dem Objekt (26) $[1, c^2)$.

Das Objekt (26) kann man als Produkt des Objektes (25) und des folgenden

$$\tau' = \exp\left(\frac{1-\operatorname{sgn} J}{2}\right) \tau \ (\mathrm{Mod}\, c^2), \tag{27}$$

das wir den verallgemeinerten Biskalar nennen, erhalten. Nach (27) τ nimmt zwei Werte an, nämlich τ und $c\tau$. Für $c = -1$ bekommen wir einen Biskalar.

Behauptung 1. Je zwei Kreisobjekte mit verschiedenen Perioden c ($c > 1$) sind nicht äquivalent. Dasselbe betrifft die Bikreisobjekte. Im

---

([4]) Das sind keine linearen geometrischen Objekte, weil ihre Transformationsformeln in der Form $\theta' = f(J)\theta$ nicht aufgeschrieben werden können. Solche periodischen Objekte kann man als die Pseudoobjekte betrachten, derer Fasern die Äquivalenzklassen R(Mod c) enthalten.

Gegenteil, sind alle verallgemeinerten Biskalare für beliebige $c \neq 0$ untereinander äquivalent, insbesondere sind sie dem Biskalar äquivalent.

Der erste Teil der Behauptung folgt daraus, dass die stationären Untergruppen dieser Objekte für verschiedene c verschieden sind (vgl. [3]); sie sind nämlich die folgenden

$$H = \{J;\ |J| = c^k\} \qquad \text{für (25)},$$
$$H = \{J;\ J = (-c)^k\} \qquad \text{für (26)}.$$

Um den zweiten Teil zu beweisen, bemerken wir nur, dass die Abbildung

$$\tau \to \sigma, \qquad c_1\tau \to c_2\sigma$$

eine Äquivalenz zwischen den verallgemeinerten Biskalaren mit den beliebigen Konstanten c_1 und c_2 erzeugt.

B e h a u p t u n g 2. Das Kreisobjekt mit Periode c ist dem linearen homogenen Objekt mit zwei Komponenten und mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \omega_1\cos(b\ln|J|)+\omega_2\sin(b\ln|J|), \\ \omega_2' &= -\omega_1\sin(b\ln|J|)+\omega_2\cos(b\ln|J|), \end{aligned} \tag{28}$$

d.h.

$$\Omega' = |J|^{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}\Omega,$$

äquivalent.

Entsprechend, ist das Bikreisobjekt mit Periode c dem Objekt mit der Transformationsregel

$$\begin{aligned} \omega_1' &= \operatorname{sgn} J\,[\omega_1\cos(b\ln|J|)+\omega_2\sin(b\ln|J|)], \\ \omega_2' &= \operatorname{sgn} J\,[-\omega_1\sin(b\ln|J|)+\omega_2\cos(b\ln|J|)], \end{aligned} \tag{29}$$

d.h.

$$\Omega' = \operatorname{sgn} J\,|J|^{\begin{bmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{bmatrix}}\Omega,$$

äquivalent.

In der Tat; die Äquivalenzabbildung zwischen den Objekten (25) und (28) ist die folgende

$$\omega_1 = \cos\frac{2\pi\ln\theta}{\ln c}, \qquad \omega_2 = \sin\frac{2\pi\ln\theta}{\ln c}. \tag{30}$$

Diese Funktionen sind umkehrbar; θ ist daher eindeutig im Intervall $[1, c)$ durch die Komponenten (ω_1, ω_2) bestimmt.

Dieselbe Formeln (30) bestimmen, falls θ das Bikreisobjekt (26) bedeutet, die Äquivalenz des θ mit dem Objekte (29), w.z.b.w.

Wir kehren jetzt zur Klassifikation des Objektes Ω mit der Transformationsregel (21) im betrachteten Fall $a = 0$ zurück.

Im Gebiet Z_1 definieren wir die Funktion

$$\theta = \exp(\varphi/b), \tag{31}$$

wo φ (eindeutig) im Intervall $[0, 2\pi)$ durch die Formeln

$$\cos\varphi = \frac{\omega_1}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\omega_2}{\sqrt{\omega_1^2+\omega_2^2}} \tag{32}$$

bestimmt ist. Der Winkel φ transformiert sich nach (21) wie folgt

$$\varphi' = \varphi + b\ln|J| \pmod{2\pi}. \tag{33}$$

Daher stellt θ ein Kreisobjekt mit Periode $e^{2\pi/b}$, dar es gilt nämlich nach (31) und (33)

$$\theta' = |J|\,\theta \ (\mathrm{Mod}\, e^{2\pi/b}), \quad \theta \in [1, e^{2\pi/b}). \tag{34}$$

Aus der Gestalt (12) der Matrix $|J|^L$ folgt, dass folgende Identität stattfindet

$$|J|^L = |\tilde{J}|^L, \quad \text{wo } |\tilde{J}| = |J| \ (\mathrm{Mod}\, e^{2\pi/b}), \tag{35}$$

d.h. diesmal gilt $F(J) = G(J')$. Demnach stellen die Grössen (4) die Skalare dar: wir haben nämlich

$$\Sigma' = |\theta'|^{-L}\Omega' = (\widetilde{|J|\,|\theta|})^{-L}|J|^L\Omega = (|J|\,|\theta|)^{-L}|J|^L\Omega = |\theta|^{-L}\Omega = \Sigma$$

Die Faser (6) ist jetzt durch die Bedingung $\sigma_1 = 0$ bestimmt. In den nächsten Gebieten Z_2, Z_3 ist die Lage ganz analog, entsprechende Fasern (6) sind die Ebenen

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \sigma_1 = \ldots = \sigma_5 = 0,$$

u.s.w.

Im Fall $F(J) = \mathrm{sgn}J\,|J|^L$ bestimmt die Funktion (31) mit den Formeln (32) ein Bikreisobjekt θ mit Periode $e^{\pi/b}$; θ transformiert sich nämlich wie folgt

$$\theta' = |J|\,\theta\exp\frac{\pi(1-\mathrm{sgn}J)}{2b} \ (\mathrm{Mod}\, e^{2\pi/b}), \quad \theta \in [1, e^{2\pi/b}).$$

Entsprechende Grössen Σ sind diesmal die Biskalare und die Fasern (6) sind dieselbe wie im vorigen Fall. Schliesslich gilt der folgende

Satz 5. *Im Fall* $F(J) = |J|^L$ (*bzw.* $F(J) = \mathrm{sgn}J\,|J|^L$) *und* $a = 0$ *ist das Objekt* (21) *dem Vereinigungsobjekt von einem Kreisobjekt mit Periode* $e^{2\pi/b}$ *und* $2n-1$ *Skalaren* (*bzw. von einem Bikreisobjekt mit derselben Periode und* $2n-1$ *Biskalaren*) *äquivalent, mit der Bedingung, dass falls das Kreis-*

objekt verschwindet, so auch alle Skalare verschwinden. Je zwei Objekte (21) *mit verschiedenen Konstanten $b > 0$ sind nichtäquivalent.*

Die bisherigen in den Paragraphen 3, 4, 5 enthaltenen Resultate erlauben uns den folgenden allgemeinen Satz zu formulieren.

SATZ 6. *Jedes lineare homogene geometrische J-Objekt mit n Komponenten und mit messbarer Transformationsregel ist der Voreinigung von n einkomponentigen Objekten äquivalent, unter denen nur die folgenden Typen auftreten:*

die Skalare	*die G-Dichten,*
die Biskalare	*die Kreisobjekte,*
die W-Dichten	*die Bikreisobjekte.*

Die Bedingungen für die Wertebereiche dieser Vereinigungen hängen von der kanonischen Form der Matrizen $F(J)$ ab, und sind in den Sätzen 1–5 ausführlich bestimmt.

Wir bemerken, dass die zwei letzten Typen von den oben erwähnten Objekten im Grunde die einparametrigen Scharen nichtäquivalenter Objekte darstellen.

Statt der Kreisobjekte bzw. Bikreisobjekte, derer Transformationsformeln nicht stetig sind und die keine linearen Objekte darstellen, kann man die sich stetigerweise transformierenden Objekte (28) bzw. (29) mit zwei Komponenten, zur obiger Klassifikation annehmen.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und S. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Monografie Matematyczne 39, Warszawa 1960.

[2] S. Gołąb und M. Kucharzewski, *Über den Begriff der Pseudogrössen*, Tensor N. S. 8 (1958), S. 79-89.

[3] J. Haantjes and G. Laman, *On the definition of geometric objects II*, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. ser. A 56 — Indagationes Math. 15 (1953), S. 216-222.

[4] M. Kucharzewski and M. Kuczma, *Basic concepts of the theory of geometric objects*, Rozprawy Matematyczne 43, Warszawa 1964.

[5] — — *Determination of geometric objects of the type* (2, 2, 1) *with linear homogeneous transformation formula*, Ann. Polon. Math. 14 (1963), S. 29-48.

[6] — — *Klassifikation der linearen homogenen geometrischen Objekte vom Typus J mit drei Komponenten*, Rozprawy Matematyczne 48, Warszawa 1965.

[7] M. Kucharzewski und A. Zajtz, *Über die linearen geometrischen Objekte des Typus* $(m, n, 1)$, *wo* $m \leqslant n$ *ist*, Ann. Polon. Math. 18 (1966), S. 205-225.

[8] M. Kuczma and A. Zajtz, *On the form of real solution of the matrix functional equation* $\Phi(x)\Phi(y) = \Phi(x, y)$ *for non-singular matrices* Φ, Publicationes Math. 13 (1966), S. 1-4.

Reçu par la Rédaction le 9. 9. 1970