ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XX (1968)

Über Differentialkomitanten erster Ordung II

Differentialkomitanten von zwei kovarianten Vektorfeldern

von S. Gołąb (Kraków)

In dieser Note werden wir beispielsweise eine Anwendung der analytischen Methode geben und die skalaren und vektoriellen Differentialkomitanten von zwei kovarianten Vektorfeldern bestimmen.

Wir werden den Fall $n = 2$ behandeln und wir bemerken hier, daß im Falle $n \geqslant 3$ die Situation ganz anders aussieht. Die Behandlung des allgemeinen Falles ($n \geqslant 3$) behalten wir zu einer anderen Veröffentlichung vor.

Satz 1 ([1]). *Alle Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei gegebenen linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern u_j, v_j in X_2, die von der Regularitätsklasse $C^{(1)}$ sind und die selbst ein kovariantes Vektorfeld darstellen, sind in der folgenden Formel enthalten*

$$k_j = \alpha(\varrho_1, \varrho_2)u_j + \beta(\varrho_1, \varrho_2)v_j \,, \tag{1}$$

wo α, β beliebige Funktionen von zwei Veränderlichen sind und ϱ_j folgendermaßen definiert sind

$$\varrho_1 = \frac{\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}, \qquad \varrho_2 = \frac{\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2}{u_1 v_2 - u_2 v_1}\,. \tag{2}$$

Beweis. Da k_j, d.h. die gesuchte Komitante eine Differentialkomitante erster Ordnung sein soll, so haben wir

$$k_j = f_j(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i)\,, \qquad j = 1, 2\,, \tag{3}$$

($\partial_k u_i = \partial u_i / \partial \xi_k$, $k, i = 1, 2$).

Die Funktionen f_j sollen von dem betrachteten Koordinatensystem unabhängig sein. Andererseits transformieren sich die u_i, v_i, k_i nach derselben Transformationsregel

$$\bar{u}_i = A_i^k u_k\,, \qquad \bar{v}_i = A_i^k v_k\,, \qquad \bar{k}_i = A_i^k k_k\,, \tag{4}$$

([1]) Dieser Satz stammt vom Herrn S. Topa. Ein Beweis mit Hilfe der originellen Methode des Verfassers wird in demselben Band an anderer Stelle gebracht.

wo mit A_i^k kurz die ersten partiellen Ableitungen der Koordinatentransformation bezeichnet wurden

$$A_i^k = \frac{\partial \xi_k}{\partial \bar{\xi}_i}.$$

Da die Transformationsweise der partiellen Ableitungen $\partial_k u_i, \partial_k v_i$ die Existenz von zweiten partiellen Ableitungen der Koordinatentransformation

$$A_{ij}^k = \frac{\partial^2 \xi_k}{\partial \bar{\xi}_i \partial \bar{\xi}_j}$$

benötigt, so beschränken wir uns im folgenden auf die Pseudogruppe der Transformationen von der Regularitätsklasse $C^{(2)}$.

Die Transformationsweise der Ableitungen $\partial_k u_i$ lautet folgendermaßen

$$\overline{\partial_k u_i} = A_k^l A_i^j \partial_l u_j + A_{ki}^l u_l, \tag{5}$$

aus welcher geht hervor, daß $\partial_k u_i$ kein geometrisches Objekt darstellt.

Aus der Voraussetzung, daß k_j ein kovariantes Vektorfeld darstellt, folgt, daß folgende Funktionalgleichungssystem bestehen muß

$$A_j^l f_l(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i) = f_j(\bar{u}_i, \bar{v}_i, \overline{\partial_k u_i}, \overline{\partial_k v_i}), \quad j = 1, 2,$$

wo auf der rechten Seite die Formeln (4) und (5) eingetragen werden müssen. Dies ergibt

$$\begin{aligned} &A_j^l f_l(u_i, v_i, \partial_k u_i, \partial_k v_i) \\ &= f_j[A_i^l u_l, A_i^l v_l, A_k^l A_i^m \partial_l u_m + A_{ki}^l u_l, A_k^l A_i^m \partial_l v_m + A_{ki}^l v_l] \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \tag{6}$$

(6) stellt ein Funktionalgleichungssystem für zwei gesuchte Funktionen f_1, f_2 von

$$2 + 2 + 4 + 4 = 12$$

unabhängigen Veränderlichen dar. Dieses System soll für beliebige Werte A_i^k, die der Bedingung

$$\det(A_i^k) \neq 0 \tag{7}$$

genügen, und für beliebige Werte A_{ij}^k, die den Relationen

$$A_{ij}^k = A_{ji}^k \tag{8}$$

genügen, erfüllt werden. Wir haben also mit einem System der Funktionalgleichungen von der Stufe 10 (nach der bekannten Terminologie [1] zu tun. In der Tat es gibt vier Parameter A_i^k und sechs unabhängige Parameter A_{ij}^k.

Da wir im folgenden die analytische Methode anwenden wollen, setzen wir voraus, daß die Funktionen f_j mit ersten stetigen Ableitungen ausgestattet sind. Um die Schreibweise zu vereinfachen, ändern wir die Bezeichnungen wie folgt

$$
(9)\qquad
\begin{cases}
f_1 = f\,, \quad f_2 = g\,, \\
u_1 = x_1\,, \quad u_2 = x_2\,, \quad v_1 = x_3\,, \quad v_2 = x_4\,, \\
\partial_1 u_1 = x_5\,, \quad \partial_2 u_1 = x_6\,, \quad \partial_1 u_2 = x_7\,, \quad \partial_2 u_2 = x_8\,, \\
\partial_1 v_1 = x_9\,, \quad \partial_2 v_1 = x_{10}\,, \quad \partial_1 v_2 = x_{11}\,, \quad \partial_2 v_2 = x_{12}\,, \\
A_1^1 = p_1\,, \quad A_2^1 = p_2\,, \quad A_1^2 = p_3\,, \quad A_2^2 = p_4\,, \\
A_{11}^1 = q_1\,, \quad A_{12}^1 = A_{21}^1 = q_2\,, \quad A_{22}^1 = q_3\,, \\
A_{11}^2 = q_4\,, \quad A_{12}^2 = A_{21}^2 = q_5\,, \quad A_{22}^2 = q_6\,.
\end{cases}
$$

Die Methode das System (6) zu lösen wird darauf beruhen, dieses System durch Differenzieren in bezug auf die Parameter p_i, q_j auf ein System von Differentialgleichungen zurückzuführen. Um aber ein System von Differentialgleichungen in gewöhnlichem Sinne des Wortes zu erhalten (und nicht etwa ein System von Differential-Funktionalgleichungen) müssen wir nach der durchgeführten Differentiation die speziellen Werte

$$
(10)\qquad A_i^k = \delta_i^k\,, \quad A_{ij}^k = 0
$$

einsetzen je nachdem wir in bezug auf die Parameter p_i bzw. q_j differenzieren (δ_i^k bezeichnen wie üblich die Kroneckerschen Symbole).

Wir gehen von der ersten Gleichung (6) aus, die in neuen Bezeichnungen lautet wie folgt

$$
(11)\qquad p_1 f + p_3 g = f[X_1, X_2, \ldots, X_{12}]\,,
$$

wo

$$
(12)\qquad
\begin{cases}
X_1 = p_1 x_1 + p_3 x_2\,, \quad X_2 = p_2 x_1 + p_4 x_2\,, \\
X_3 = p_1 x_3 + p_3 x_4\,, \quad X_4 = p_2 x_3 + p_4 x_4\,, \\
X_5 = p_1^2 x_5 + p_1 p_3 x_6 + p_1 p_3 x_7 + p_3^2 x_8 + q_1 x_1 + q_4 x_2\,, \\
X_6 = p_1 p_2 x_5 + p_1 p_4 x_6 + p_2 p_3 x_7 + p_3 p_4 x_8 + q_2 x_1 + q_5 x_2\,, \\
X_7 = p_1 p_2 x_5 + p_2 p_3 x_6 + p_1 p_4 x_7 + p_3 p_4 x_8 + q_2 x_1 + q_5 x_2\,, \\
X_8 = p_2^2 x_5 + p_2 p_4 x_6 + p_2 p_4 x_7 + p_4^2 x_8 + q_3 x_1 + q_6 x_2\,.
\end{cases}
$$

Die $X_9, X_{10}, X_{11}, X_{12}$ erhält man aus den X_5, X_6, X_7, X_8 indem man entsprechend die

$$x_1, x_2 \quad \text{durch} \quad x_3, x_4$$

und

$$x_5, x_6, x_7, x_8 \quad \text{durch} \quad x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}$$

ersetzt.

Setzen wir nun im ersten Schritt

$$A_i^k = \delta_i^k$$

(d.h. $p_1 = p_4 = 1$, $p_2 = p_3 = 0$) ein, so erhalten wir einfach

$$\begin{aligned}(13)\qquad & f(x_1, \ldots, x_{12}) = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 + q_1 x_1 + q_4 x_2, \\ & x_6 + q_2 x_1 + q_5 x_2, \; x_7 + q_2 x_1 + q_5 x_2, \; x_8 + q_3 x_1 + q_6 x_2, x_9 + q_1 x_3 + q_4 x_4, \ldots) .\end{aligned}$$

Differentiation nach q_j (und nachträgliches Einsetzen $q_j = 0$) ergibt das folgende System vo linearen homogenen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung (mit f_j bezeichnen wir Ableitung $\partial f/\partial x_j$)

$$(14)\qquad \begin{cases} 0 = x_1 f_5 + x_3 f_9 , \\ 0 = x_1 f_6 + x_1 f_7 + x_3 f_{10} + x_3 f_4 , \\ 0 = x_1 f_8 + x_3 f_{12} , \\ 0 = x_2 f_5 + x_4 f_9 , \\ 0 = x_2 f_6 + x_2 f_7 + x_4 f_{10} + x_4 f_{11} , \\ 0 = x_2 f_8 + x_4 f_{12} . \end{cases}$$

Dieses System läßt sich einfach auf algebraischem Wege lösen. In der Tat da

$$(15)\qquad \Delta = x_1 x_4 - x_2 x_3 \neq 0$$

(lineare Unabhängigkeit der Vektoren u_i, v_i) erfüllt ist, so erhalten wir aus der ersten und vierten Gleichung

$$(16)\qquad f_5 = f_9 = 0 .$$

In ähnlicher Weise die dritte mit der sechsten ergibt

$$(17)\qquad f_8 = f_{12} = 0$$

und ähnlich die zweite mit der fünften

$$(18)\qquad \begin{cases} f_6 + f_7 = 0 , \\ f_{10} + f_{11} = 0 . \end{cases}$$

Die Relationen (16), (17) und (18) führen zum Schluß, daß f folgende Form haben muß

$$(19)\qquad f = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4, \; x_6 - x_7, \; x_{10} - x_{11}) .$$

Im zweiten Schritt setzen wir in die erste Gleichung (6) die Werte $q_j = 0$ ein und differenzieren beiderseits in bezug auf die Parameter p_2 und p_4. Die erste Differentiation ergibt

$$(20)\qquad 0 = x_1 f_2 + x_3 f_4 ,$$

die zweite dagegen

$$0 = x_2 f_2 + x_4 f_4 + x_6 f_6 + x_7 f_7 + x_{10} f_{10} + x_{11} f_{11} \,. \tag{21}$$

Die Berücksichtigung der Gleichung (20) ergibt einfach

$$f = \psi(x_1, x_3, x_1 x_4 - x_2 x_3, x_6 - x_7, x_{10} - x_{11}) \,. \tag{22}$$

Setzen wir nun der Reihe nach die Gestalt (22) der Funktion f in die Gleichung (21) ein, so bekommen wir nach einer leichten Rechnung

$$f = \omega\left(x_1, x_3, \frac{x_6 - x_7}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \frac{x_{10} - x_{11}}{x_1 x_4 - x_2 x_3}\right). \tag{23}$$

In ganz analoger Weise, wenn wir dasselbe Verfahren auf die zweite der Gleichungen (6) anwenden, erhalten wir für die Funktion g die Gestalt

$$g = \tilde{\omega}\left(x_2, x_4, \frac{x_6 - x_7}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \frac{x_{10} - x_{11}}{x_1 x_4 - x_2 x_3}\right). \tag{24}$$

Nun haben wir Differentiation der ersten Gleichung in bezug auf p_1 bzw. p_3 und der zweiten Gleichung in bezug auf p_2 bzw. p_4 noch nicht ausgenützt.

Differenziert man die Gleichung (11) in bezug auf p_1 (und setzt man $p_1 = 1$ nachträglich ein), so erhält man die lineare, aber nichthomogene Gleichung

$$f = x_1 f_1 + x_3 f_3 + (x_6 - x_7) f_6 + (x_{10} - x_{11}) f_{10} \,. \tag{25}$$

Auch diese Gleichung läßt sich ziemlich einfach integrieren. Wird (23) in der letzten Gleichung berücksichtigt, so erhalten wir

$$\omega = x_1 \omega_1 + x_2 \omega_2$$

und die Integration des entsprechenden Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{d\omega}{\omega} = \frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{z_2} = \frac{dz_3}{0} = \frac{dz_4}{0}$$

ergibt

$$\omega = x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \frac{x_6 - x_7}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \frac{x_{10} - x_{11}}{x_1 x_4 - x_2 x_3}\right). \tag{26}$$

In ähnlicher Weise erhält man

$$\tilde{\omega} = x_2 G\left(\frac{x_4}{x_2}, \frac{x_6 - x_7}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \frac{x_{10} - x_{11}}{x_1 x_4 - x_2 x_3}\right). \tag{27}$$

Im Falle wenn $x_1 = 0$, muß wegen (15) $x_3 \neq 0$ sein und dann erhalten wir statt (26) die Formel

$$\omega = x_3 F\left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_6 - x_7}{\Delta}, \frac{x_{10} - x_{11}}{\Delta}\right) = x_3 \tilde{F}\left(\frac{x_6 - x_7}{\Delta}, \frac{x_{10} - x_{11}}{\Delta}\right). \tag{28}$$

Ebenso gilt die Formel (27) im Falle $x_2 \neq 0$, während für den Fall $x_2 = 0$ gilt die Formel

$$\tilde{\omega} = x_4 \tilde{G}\left(\frac{x_6 - x_7}{\Delta}, \frac{x_{10} - x_{11}}{\Delta}\right). \tag{29}$$

Bemerken wir nun, daß auf Grund der Transformationsformeln (4), (5) die Ausdrücke $x_6 - x_7$, $x_{10} - x_{11}$, $x_1 x_4 - x_2 x_3$ sich wie Dichten transformieren:

$$\bar{x}_1 \bar{x}_4 - \bar{x}_2 \bar{x}_3 = \begin{vmatrix} A_1^k u_k & A_2^k u_k \\ A_1^k v_k & A_2^k v_k \end{vmatrix} = (p_1 p_4 - p_2 p_3) \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$
$$= (p_1 p_4 - p_2 p_3)(x_1 x_4 - x_2 x_3);$$

$$\bar{x}_6 - \bar{x}_7 = \overline{\partial_2 u_1} - \overline{\partial_1 u_2} = (p_1 p_4 - p_2 p_3)(\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2) = (p_1 p_4 - p_2 p_3)(x_6 - x_7)$$

und in analoger Weise

$$\bar{x}_{10} - \bar{x}_{11} = (p_1 p_4 - p_2 p_3)(x_{10} - x_{11}),$$

so daß die Quotienten

$$\varrho_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{x_6 - x_7}{x_1 x_4 - x_2 x_3}, \qquad \varrho_2 \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{x_{10} - x_{11}}{x_1 x_4 - x_2 x_3} \tag{30}$$

Skalare sind.

Auf Grund der Transformationsformel (6) bekommen wir aus (26) und (27)

$$\left\{\begin{aligned} & p_1 x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right) + p_3 x_2 G\left(\frac{x_4}{x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right) \\ & \qquad = (p_1 x_1 + p_3 x_2) F\left(\frac{p_1 x_3 + p_3 x_4}{p_1 x_1 + p_3 x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right), \\ & p_2 x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right) + p_4 x_2 G\left(\frac{x_4}{x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right) \\ & \qquad = (p_2 x_1 + p_4 x_2) G\left(\frac{p_2 x_3 + p_4 x_4}{p_2 x_1 + p_4 x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right). \end{aligned}\right. \tag{31}$$

Setzen wir in die erste Gleichung

$$p_3 = \frac{x_3 - x_1 \xi}{\Delta}, \qquad p_1 = \frac{x_2 \xi - x_4}{\Delta}$$

ein, was erlaubt ist wegen (15) und $x_2 \neq 0$, so erhalten wir

$$\frac{x_1 x_2 \xi - x_1 x_4}{\Delta} F_0 + \frac{x_2 x_3 - x_1 x_2 \xi}{\Delta} G_0 = F(\xi, \varrho_1, \varrho_2), \tag{32}$$

wo kurz

$$F_0 = F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right), \qquad G_0 = G\left(\frac{x_4}{x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right)$$

gesetzt wurde. Aus der Relation (32) folgt, daß bei festen x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11$) die Funktion $F(\xi, \varrho_1, \varrho_2)$ ein Polynom (höchstens) ersten Grades in bezug auf ξ ist

$$F(\xi, \varrho_1, \varrho_2) = \beta\xi + a \tag{33}$$

$(\beta = x_1 x_2(F_0 - G_0)/\Delta\ ,\ a = (x_2 x_3 G_0 - x_1 x_4 F_0)/\Delta)$.

Ein analoges Verfahren zeigt ebenfalls

$$G(\xi, \varrho_1, \varrho_2) = \beta\xi + a \tag{34}$$

mit *denselben* a, β. A priori könnten a und β von allen x_i ($i = 1, 2, 3, 4, 6, 7, 10, 11$) abhängen. Aus der Form der linken Seite von (33) und (34) folgt aber, daß a, β nur von ϱ_1, ϱ_2 abhängig sein können (die allerdings von x_i abhängen)

$$a = a(\varrho_1, \varrho_2)\ , \qquad \beta = \beta(\varrho_1, \varrho_2)\ .$$

Da

$$f = x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right),$$

$$g = x_2 G\left(\frac{x_4}{x_2}, \varrho_1, \varrho_2\right)$$

ist, so ergibt sich auf Grund der Formeln (33) und (34)

$$\begin{aligned} f &= a(\varrho_1, \varrho_2)x_1 + \beta(\varrho_1, \varrho_2)x_3\ , \\ g &= a(\varrho_1, \varrho_2)x_2 + \beta(\varrho_1, \varrho_2)x_4\ . \end{aligned} \tag{35}$$

Diese Formeln stimmen aber auf Grund der angenommenen Bezeichnungen mit (1) überein.

Es bleibt uns den Ausnahmefall $x_2 = 0$ zu behandeln. In diesem Fall haben wir

$$g = x_4 G(\varrho_1, \varrho_2)$$

und die Gleichungen für F und G nehmen jetzt folgende Form an

$$p_1 x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right) + p_3 x_4 G(\varrho_1, \varrho_2) = p_1 x_1 F\left(\frac{p_1 x_3 + p_3 x_4}{p_1 x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right),$$

$$p_2 x_1 F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right) + p_4 x_4 G(\varrho_1, \varrho_2) = (p_2 x_3 + p_4 x_4) G(\varrho_1, \varrho_2)\ .$$

Setzen wir in der ersten Gleichung

$$p_1 = \frac{1}{x_1}\ , \qquad p_3 = \left(\xi - \frac{x_3}{x_1}\right)\frac{1}{x_1}$$

ein, und bezeichnen kurz mit

$$F_0 = F\left(\frac{x_3}{x_1}, \varrho_1, \varrho_2\right), \qquad G_0 = G(\varrho_1, \varrho_2)\ ,$$

so erhalten wir

$$F_0+\left(\xi-\frac{x_3}{x_1}\right)G_0 = F(\xi,\varrho_1,\varrho_2)\,,$$

woraus zu ersehen ist, daß $F(\xi,\varrho_1,\varrho_2)$ bei festen x_i eine Funktion ersten Grades ist

$$F(\xi,\varrho_1,\varrho_2) = \beta\xi+a\,,$$

wo a und β wiederum, wie früher, Funktionen von ϱ_1,ϱ_2 sind. Wird dies noch einmal in die erste Gleichung eingetragen, so ergibt sich

$$p_1x_3\beta+p_1x_1a+p_3x_4G_0 = p_1x_3\beta+p_3x_4\beta+p_1x_1a\,,$$

woraus

$$G_0=\beta \tag{36}$$

folgt. Die zweite Gleichung ergibt dann

$$p_2\beta x_3+p_1ax_1+p_4x_4G_0 = p_2x_3G_0+p_4x_4G_0\,,$$

was, zusammen mit (36), zu

$$p_2ax_1=0$$

führt. Da $x_1\neq 0$ ist und p_2 ein beliebiger Parameter ist, so folgt daraus

$$a=0$$

und folglich F von der Form

$$F=\beta(\varrho_1,\varrho_2)\frac{x_3}{x_1}$$

ist. Dies ergibt

$$f=\beta(\varrho_1,\varrho_2)x_3\,,\qquad g=\beta(\varrho_1,\varrho_2)x_4\,. \tag{37}$$

Dies ist aber ein Spezialfall von (35) und somit ist der eine Teil des Satzes bewiesen worden.

Umgekehrt, wenn zwei beliebige Funktionen a und β von zwei Veränderlichen gegeben sind und wenn

$$k_j=a(\varrho_1,\varrho_2)u_j+\beta(\varrho_1,\varrho_2)v_j$$

gesetzt wird, wo ϱ_i durch (30) definiert sind, so erhalten wir für k_j ein Feld von kovarianten Vektoren, das eine Differentialkomitante erster Ordnung der Felder u_j und v_j darstellt. Somit ist der unsere Satz vollständig bewiesen worden.

Aus dem obigen Satz folgt fast unmittelbar der folgende

Satz 2. *Die einzigen unabhängigen skalaren Differentialkomitanten erster Ordnung von zwei linear unabhängigen kovarianten Vektorfeldern u_j und v_j in X_2 sind die Skalarfelder ϱ_1 und ϱ_2, die durch* (2) *definiert sind.*

Beweis. Würde es noch eine dritte von ϱ_1 und ϱ_2 unabhängige Komitante ϱ_3 geben, so würde

$$a(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)u_j + \beta(\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3)v_j$$

eine Vektorkomitante von u_j und v_j sein, was aber aus dem Satz 1 nicht hervorgeht. Es gibt also nur zwei unabhängige Komitanten ϱ_1, ϱ_2. Das Quotient

$$\frac{\partial_2 u_1 - \partial_1 u_2}{\partial_2 v_1 - \partial_1 v_2}$$

ist natürlich auch eine skalare Komitante, sie ist aber-wie man leicht sieht-abhängig von ϱ_1 und ϱ_2.

Literaturverzeichnis

[1] S. Gołąb, *Über Differentialkomitanten erster Ordnung I*, Coll. Math. 16 (1967), S. 173-184.

Reçu par la Rédaction le 13. 12. 1966