ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Sur les solutions des équations différentielles au sens de E. E. Wiktorowski

par A. Turowicz (Tyniec)

§ 1. Le but de la présente note est indiqué au commencement du § 2.

Dans la note [2] E. E. Wiktorowski considère un système d'équations différentielles ordinaires

$$y_i' = f_i(x, y_1, \ldots, y_n), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

et propose une définition de la solution généralisée du système (1). Les hypothèses suivantes y ont été admises: (cf. [2], p. 223-224):

(a) f_i sont mesurables dans un domaine G à $(n+1)$ dimensions. $G(x')$ désigne l'intersection de G et du plan $x = x'$.

(b) $M_1(x) = \max\{\operatorname{vrai}\max\limits_{y \in G(x)} |f_i(x, y)|\}$ est sommable; $M(x) = M_1(x)+\gamma$ où $\gamma > 0$.

Soit $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in G$. Le domaine P est défini par les relations

$$x \in X, \quad \text{où} \quad X = \langle x_0, x_0+a\rangle,\ a > 0$$

$$|y_i - y_{i0}| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} M(t)\,dt, \qquad i = 1, \ldots, n$$

et satisfait à la condition $P \subset G$.

Dans ces hypothèses, la suite finie des fonctions $u_1(x), \ldots, u_n(x)$ est dite solution généralisée du système (1) si pour $i, j = 1, \ldots, n$ les conditions suivantes sont satisfaites:

1° $u_i(x)$ sont absolument continues sur X;

2° $u_i(x_0) = y_{i0}$, $\big(x, u_1(x), \ldots, u_n(x)\big) \in P$ pour chaque $x \in X$;

3° pour tout $\varepsilon > 0$ et tout ensemble N tel que $N \subset G$ et $\operatorname{mes} N = 0$, il existe un système de n^2 fonctions $\psi_{ij}(x)$ telles que

A) $\big(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x)\big) \in G$,

B) $f_i\big(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x)\big)$ sont sommables sur X,

C) $|u_i(x) - \psi_{ij}(x)| < \varepsilon$ sur X,

D) $\left|u_i(x) - y_{i0} - \int\limits_{x_0}^{x} f_i\big(t, \psi_{1i}(t), \ldots, \psi_{ni}(t)\big)\,dt\right| < \varepsilon$ sur X,

E) $\big(x, \psi_{1i}(x), \ldots, \psi_{ni}(x)\big) \notin N$ pour presque tout $x \in X$.

§ 2. Le but de la présente note est d'attirer l'attention sur le fait que la propriété d'une suite de fonctions $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x)$ d'être une solution généralisée au sens de E. E. Wiktorowski n'est pas invariante relativement aux rotations dans l'espace $(x_1, \ldots, x_n)$ pour $n \geqslant 2$. Autrement dit si:

$$u_i(x) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k(x), \qquad i = 1, \ldots, n \tag{2}$$

où $A = (a_{ik})$ est une matrice réelle, orthogonale et

$$z_j' = g_j(x, z_1, \ldots, z_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i\Big(x, \sum_{k=1}^{n} a_{1k} z_k, \ldots, \sum_{k=1}^{n} a_{nk} z_k\Big) \tag{3}$$

est le système des équations différentielles qu'on obtient du système (1) par la transformation (2):

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} z_k, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{4}$$

la suite finie $z_1, \ldots, z_n$ n'est pas toujours une solution généralisée de (3) au sens de E. E. Wiktorowski.

Pour démontrer ce fait, nous posons $n = 2$ prenons pour système (1) celui des équations suivantes:

$$y_1' = 4 + 2\,\mathrm{sgn}\, y_2, \qquad y_2' = 2 - 4\,\mathrm{sgn}\, y_2\,. \tag{5}$$

(Ce système a été étudié d'un autre point de vue par A. F. Filippow cf. [1].) G sera maintenant tout l'espace (x, y_1, y_2), et nous poserons $x_0 = y_{10} = y_{20} = 0$. On a donc $X = \langle 0, a\rangle$, $a > 0$, et P est défini par les inégalités $x \in X$, $|y_i| \leqslant 7x$, $i = 1, \ldots, n$.

On démontrera que les fonctions

$$u_1(x) = 2x, \qquad u_2(x) = 0 \tag{6}$$

forment une solution généralisée de (5).

En effet, pour $\varepsilon > 0$ on choisit les fonctions $\psi_{11}(x), \psi_{21}(x), \psi_{12}(x)$ satisfaisant aux conditions:

$$|2x - \psi_{11}(x)| < \varepsilon, \qquad |2x - \psi_{12}(x)| < \varepsilon, \qquad -\varepsilon < \psi_{21}(x) < 0\,. \tag{7}$$

Pour définir la fonction $\psi_{22}(x)$ on décompose l'intervalle X en la somme des intervalles $X_1, \ldots, X_{2p}$ où $X_j = \langle a_{j-1}, a_j\rangle$, $0 = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{2p} = a$; la fonction ψ_{22} est soumise aux conditions:

$$\begin{cases} 0 < \psi_{22}(x) < \varepsilon & \text{pour} \quad x \in X_{2j-1}, \; j = 1, \ldots, p, \\ -\varepsilon < \psi_{22}(x) < 0 & \text{pour} \quad x \in X_{2j}, \; j = 1, \ldots, p \end{cases} \tag{8}$$

les nombres $a_1, \ldots, a_{2p-1}$ étant déterminés de telle manière qu'on ait

$$(9) \qquad \left|\int_0^x \big(2-4\operatorname{sgn}\psi_{22}(t)\big)\,dt\right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in X\,.$$

Les inégalités (7), (8), (9) entraînent les inégalités 3°C) et 3°D). Pour démontrer qu'on peut choisir les fonctions $\psi_{ij}(x)$ en sorte que la condition 3°E) soit aussi satisfaite, désignons par H l'ensemble défini par les inégalités: $x \in X$, $|2x-y_1| < \varepsilon$, $-\varepsilon < y_2 < 0$, et par K l'ensemble $K = \bigcup_{i=1}^{2p} K_i$, où l'ensemble K_i est défini par les inégalités:

$$K_{2i-1}: \quad x \in X_{2i-1}\,,\ |2x-y_1| < \varepsilon,\ 0 < y_2 < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, p\,;$$
$$K_{2i}: \quad x \in X_{2i}\,,\ |2x-y_1| < \varepsilon,\ -\varepsilon < y_2 < 0\,,\ i = 1, \ldots, p\,.$$

Soient $H(x')$ et $K(x')$ les sections des ensembles H et K par le plan $x = x'$. D'après les conditions (7) et (8) le point $\big(x, \psi_{11}(x), \psi_{21}(x)\big)$ doit être choisi dans $H(x)$, et le point $\big(x, \psi_{12}(x), \psi_{22}(x)\big)$ dans $K(x)$. Pour un ensemble donné $N \subset G$, mes $N = 0$, on a mes $(H \cap N) = 0$, mes $(K \cap N) = 0$. Par conséquent les ensembles $H(x) \cap N$ et $K(x) \cap N$ sont de mesure nulle (plane) presque partout dans X. Mais, comme les mesures planes des ensembles $H(x)$ et $K(x)$ sont positives, il est possible de choisir les fonctions $\psi_{ij}(x)$ de telle manière que la condition 3°E) soit satisfaite. Le choix peut être arbitraire, aucune régularité des fonctions $\psi_{ij}(x)$ n'étant requise dans la définition de E. E. Wiktorowski, excepté la sommabilité des $f_i(x, \psi_{1i}, \ldots, \psi_{ni})$ qui est évidente en vertu des conditions (7) et (8).

Maintenant les équations (5) et les solutions (6) seront soumises à la rotation:

$$(10) \qquad \begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 - z_2)\,, \qquad u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_1(x) - v_2(x)\big)\,, \\ y_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(z_1 + z_2)\,, \qquad u_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(v_1(x) + v_2(x)\big)\,. \end{aligned}$$

On aura

$$(11) \qquad z_1' = 3\sqrt{2} - \sqrt{2}\operatorname{sgn}(z_1+z_2)\,, \qquad z_2' = -\sqrt{2} - 3\sqrt{2}\operatorname{sgn}(z_1-z_2)\,,$$

$$(12) \qquad v_1(x) = x\sqrt{2}\,, \qquad v_2(x) = -x\sqrt{2}\,.$$

Pour que les fonctions (12) soient une solution généralisée de (11), il faudrait que pour tout $\varepsilon > 0$ existent des fonctions $\psi_{ij}(x)$ telles que les conditions 3° fussent satisfaites. On tire de 3°D):

$$\left|V_1(x) - \int_0^x \Big(3\sqrt{2} - \sqrt{2}\operatorname{sgn}\big(\psi_{11}(t) + \psi_{21}(t)\big)\Big)\,dt\right| < \varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x \in X\,,$$

c'est-à-dire:

$$\left|2x\sqrt{2}+\sqrt{2}\int\limits_0^x \operatorname{sgn}\big(\psi_{11}(t)+\psi_{21}(t)\big)\,dt\right|<\varepsilon \qquad \text{pour} \qquad x\in X\,.$$

Mais

$$\left|2x\sqrt{2}+\sqrt{2}\int\limits_0^x \operatorname{sgn}\big(\psi_{11}(t)+\psi_{21}(t)\big)\,dt\right|$$

$$\geqslant |2x\sqrt{2}|-\left|\sqrt{2}\int\limits_0^x \operatorname{sgn}\big(\psi_{11}(t)+\psi_{21}(t)\big)\,dt\right|$$

pour $x\in X$ et en particulier pour $x=a$ on obtient $2a\sqrt{2}-a\sqrt{2}=a\sqrt{2}<\varepsilon$, ce qui est absurde.

Travaux cités

[1] А. Ф. Филиппов (A. F. Filippow), *Дифференциальние уравнения с разрывной правой частью*, Matem. Sborn. 51 (93) (1960), p. 99-128.

[2] Е. Е. Викторовский (E. E. Wiktorowski), *Об одном обобщении понятия интегральных кривых для разрывного поля направлений*, Matem. Sborn. 34 (76) (1954), p. 213-248.

INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES, SECTION DE CRACOVIE

Reçu par la Rédaction le 7. 3. 1964