ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XV (1964)

Une variante de la méthode de M. Leja pour l'approximation de la représentation conforme

par W. KLEINER (Kraków)

1. Préliminaires. Soit D un domaine plan contenant le point à l'infini, dont la frontière C est une courbe simple de courbure bornée et de longueur $|C| < 2$. Nous emploierons la représentation paramétrique naturelle de C: $z = z(s)$, $|z'(s)| = 1$, $z(s+|C|) = z(s)$. Pour une *mesure* (signée) [1] μ sur C le *potentiel* est défini par

$$U^{\mu}(z) = \int \log|z-\zeta|^{-1} d\mu(\zeta) , \tag{1}$$

l'énergie mutuelle de μ_1 et μ_2 par

$$(\mu_1, \mu_2) = \int U^{\mu_1} d\mu_2 , \tag{2}$$

et $\|\mu\|^2 = (\mu, \mu)$ est appelé *énergie de* μ; elle est positive sauf pour $\mu \equiv 0$. *L'ensemble des mesures d'énergie finie est un espace préhilbertien pour le produit scalaire* (2).

2. La mesure d'équilibre. Parmi les mesures μ sur C pour lesquels $\mu(C) = 1$ il existe [3] une mesure η d'énergie minime; elle est appelée *mesure d'équilibre sur* C.

Le diamètre transfini [2], [10]

$$d = d(C) = \exp -\|\eta\|^2 . \tag{3}$$

La fonction $w = f(z)$, $f(\infty) = \infty$, $f'(\infty) = 1$, qui donne la représentation conforme de D sur le cercle $|w| > d$ est liée à η par les relations

$$\left|\frac{df}{dz}\right| = 2\pi\eta' = 2\pi\frac{d\eta}{ds} \text{ sur } C , \quad \log\frac{1}{f(z)} = \int \log\frac{1}{z-\zeta} d\eta(\zeta) \tag{4}$$

les branches des logarithmes étant convenablement choisies.

Par le principe de variation de Lindelöf [7] on a pour tout $z_0 \in C$, $|f'(z_0)| \leqslant |g'(z_0)| = \varkappa d$, où $\varkappa$ est la borne supérieure de la courbure de C et g donne la représentation conforme de l'extérieur du cercle de rayon $1/\varkappa$ tangent intérieurement à C au point z_0 sur $|w| > d$, de manière que $g(\infty) = \infty$.

3. Mesures discrètes. Soit $\varepsilon(z)$ la mesure portant la masse unité au point z, c'est-à-dire $\int h(\zeta)\,d\varepsilon(z) = h(z)$ pour toute h continue. Toute mesure de la forme

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} m_i \varepsilon(z_i) \qquad (z_i \in C) \tag{5}$$

est appelée *mesure discrète* sur C. Nous convenons une fois pour toutes que $m_i \geqslant 0$, $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i = 1$. Posons par définition

$$\|\tau\|_0^2 \overset{\text{df}}{=} \iint\limits_{z \neq \zeta} \log|z-\zeta|^{-1} d\tau\, d\tau = \sum_{i \neq k} m_i m_k \log|z-\zeta|^{-1}\,, \tag{6}$$

$$\|\tau\|_n^2 = \int U_n^\tau(z)\, d\tau\,, \qquad U_n^\tau(z) = \int \log_n |z-\zeta|^{-1} d\tau\,, \tag{7}$$

$$\log_n t = \min\{\log t, \log n/\vartheta\}$$

où $\vartheta > 0$ est un nombre fixe quelconque, que nous allons préciser au nº 5.

4. La méthode de M. Leja. Pour un n quelconque fixons dans (5) $m_i = 1/n$ $(i = 1, \ldots, n)$ et cherchons les points $z_i = \eta_{in}$ tels que $\|\tau\|_0^2$ soit la plus petite possible. Soit $\eta_n = \sum n^{-1} \varepsilon(\eta_{in})$ la mesure obtenue. M. Leja a démontré [8], [9] que

$$f_n(z) \overset{\text{df}}{=} [(z-\eta_{1n})\ldots(z-\eta_{nn})]^{1/n} = \exp - \int \log(z-\zeta)^{-1} d\eta_n \to f(z) \qquad (z \in D)\,. \tag{8}$$

Nous avons donné une estimation de cette convergence dans [4].

La détermination numérique des points extrémaux η_{in} est un problème d'analyse élémentaire, qui semble bien résoluble à l'aide d'un calculateur électronique. On peut néanmoins tenter de réduire le temps exigé pour le calcul et de simplifier le programme.

Nous proposons ici une variante de cette méthode, où l'on opère pareillement avec des mesures discrètes portées par n points, mais où ces points sont fixés et les masses sont à choisir de manière que (16) soit minimalisée. C'est alors une forme quadratique à coefficients donnés dont on cherche le minimum. Le programme pour un calculateur est extrêmement simple et une machine à paramètres techniques très modestes peut fournir la solution en peu de temps.

5. Partageons C en n arcs C_{in} de longueurs peu différentes et soit z_{in} le centre de C_{in} par rapport à la longueur de l'arc sur C. Plus précisément, nous supposons que

$$\vartheta/n \leqslant |z_{in} - z_{kn}| \;\; (i \neq k) \quad \text{et} \quad |C_{in}| \leqslant \theta/n \;\; (i, k = 1, \ldots, n)\,, \tag{9}$$

où les nombres positifs ϑ, θ ne dépendent pas de n (la différence $\theta-\vartheta$ a une influence, bien que faible, sur les erreurs des approximations ci-dessous).

Soit K_n la classe des mesures discrètes sur z_{in} de „densité bornée":

$$K_n = \Big\{\tau\colon\ \tau = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\varepsilon(z_{in}),\ 0 \leqslant m_i \leqslant \varkappa d\cdot\theta/n,\ \sum_{i=1}^{n} m_i = 1\Big\}. \tag{10}$$

Nous entendons dorénavant, dans (7), par ϑ le même nombre que dans (9).

Il existe une $\tau_n \in K_n$ minimale pour $\|\ \|_n^2$, c'est-à-dire $\|\tau_n\|_n^2 \leqslant \|\tau\|_n^2$ $(\tau \in K_n)$.

THÉORÈME.

$$\tau_n \to \eta \qquad (n\to\infty), \tag{11}$$

$$\big|\|\tau_n\|_n^2 - \|\eta\|^2\big| \leqslant c_1 n^{-1}\log n \qquad (n \geqslant N), \tag{12}$$

$$[\tau_n - \eta] \leqslant c_2 n^{-1/2}\log n \qquad (n \geqslant N') \tag{13}$$

où pour une mesure σ quelconque portée par C

$$[\sigma] \overset{\mathrm{df}}{=} \sup|\sigma(L)|,$$

la borne supérieure étant prise pour tous les arcs de Jordan $L\subset C$ [5]; *par suite, pour les branches convenables des logarithmes*

$$|\log\varphi_n(z)/f(z)| \leqslant c_3 V(z)\, n^{-1/2}\log n \qquad (n \geqslant N'), \tag{14}$$

où

$$\log 1/\varphi_n(z) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{i=1}^{n} m_{in}\log(z-z_{in})^{-1}, \qquad m_{in} = \tau_n(z_{in}), \tag{15}$$

$$V(z) = \operatorname*{Var}_{\zeta\in C}\log(z-\zeta)^{-1}.$$

Les nombres N, N', $c_1>0$, $c_2>0$, $c_3>0$ dépendent de C seulement.

Nous obtenons alors les approximations $\varphi_n(z)$ de la représentation conforme, dont la convergence est du même degré que celle des fonctions f_n de M. Leja (8) (voir [14]). Pour calculer φ_n il faut trouver les nombres $m_{in} \in \langle 0, \varkappa d\theta/n\rangle$ qui donnent la valeur minime à la forme

$$\|\tau_n\|_n^2 = \sum_{i\neq k} m_{in} m_{kn} \log_n |z_{in} - z_{kn}|^{-1} \tag{16}$$

dont les coefficients sont choisis par nous-mêmes, sous la condition peu restrictive (9). L'estimation (13) et (14) résultant de (12), une erreur, par exemple, de $n^{-1}\log n/\vartheta$ dans $\|\tau_n\|_n^2$ est bien admissible — ce qui fait ressortir les exigences modérées de notre méthode quant à l'exactitude des calculs. La machine peut alors chercher les valeurs pour m_{in} parmi les nombres $0, 1/n^2, 2/n^2, \ldots, \varkappa d\theta/n$.

6. Démonstration du théorème. Soit $C_{in}^* \subset C$ un arc de centre z_{in} et de longueur $|C_{in}|/n$, et a une mesure auxiliaire sur $\bigcup_i C_{in}^*$ définie par $a = \sum_i m_{in}\eta_{in}^*$, η_{in}^* désignant la mesure d'équilibre sur C_{in}^* (n° 2). Comme η est minimale (n° 2),

$$\|\eta\|^2 \leqslant \|a\|^2 = \sum_{i,k} m_{in} m_{kn} (\eta_{in}^*, \eta_{kn}^*) . \tag{17}$$

Cherchons à estimer cette somme.

Le diamètre transfini $d(C_{in}^*) \geqslant \frac{1}{4}$(diamètre de C_{in}^*) $\geqslant c_4 n^{-2}$ (par example [9]) donc par (3) on a $(\eta_{in}^*, \eta_{in}^*) = \log 1/d(C_{in}^*) \leqslant \log 1/c_4 n^{-2}$. Nous disons que, pour $i \neq k$ et n suffisamment grand,

$$\left|(\eta_{in}^*, \eta_{kn}^*) - \log|z_{in}-z_{kn}|^{-1}\right| \leqslant \int\limits_{C_{in}}\int\limits_{C_{kn}} \left|\log|z-\zeta|^{-1} - \log|z_{in}-z_{kn}|^{-1}\right| d\eta_{in}^* d\eta_{kn}^* \leqslant c/n .$$

En effet, par le théorème de la moyenne de Lagrange, $|\log a^{-1} - \log b^{-1}| = |a-b|\cdot 1/r$ pour un certain $r > \min\{a, b\}$. Posons $b = |z_{in}-z_{kn}|$, $a = |z-\zeta|$ ($z \in C_{in}^*$, $\zeta \in C_{kn}^*$, $i \neq k$), alors par (9) $r > \vartheta n^{-1} - 2\theta n^{-2}$ et $|a-b| \leqslant 2\theta n^{-2}$, d'où notre inégalité. Donc par (10)

$$\begin{aligned} \|a\|^2 &\leqslant \sum_i m_{in}^2 \log n^2/c_4 + \sum_{i\neq k} m_{in} m_{kn} (\log|z_{in}-z_{kn}|^{-1} + c_5/n) \\ &\leqslant (\varkappa d\theta)^2 n^{-1} \log n^2/c_4 + \|\tau_n\|_0^2 + c_5/n . \end{aligned} \tag{18}$$

Introduisons une mesure de comparaison β, obtenue par la „condensation" de η sur $\{z_{in}\}$: $\beta \in K_n$, $\beta(\{z_{in}\}) = \eta(C_{in})$. Dans [6] nous avons démontré un lemme, dont la teneur s'exprime dans les présentes circonstances par l'inégalité

$$\|\beta\|_0^2 \leqslant \|\eta\|^2 + cn^{-1}\log n . \tag{19}$$

(On doit poser dans [6] $\varphi = 0$, $\sigma = \eta$ et par suite $\omega_n = 0$.) Mais

$$\|\beta\|_0^2 + \sum_i \eta(C_{in})^2 \log n/\vartheta = \|\beta\|_n^2$$

et $\sum \eta(C_{in}^*)^2 \leqslant (\varkappa d\theta)^2/n$, donc, par la définition de τ_n,

(20) $$\|\tau_n\|_n^2 \leqslant \|\beta\|_n^2 \leqslant \|\eta\|^2 + c_7 n^{-1}\log n\,.$$

Les inégalités (17)-(20) nous donnent (12) (voir (6), (7)).

Mais $U^\eta = \|\eta\|^2$ sur C, donc pour $\sigma = a - \eta$:

(21) $$\|\sigma\|^2 = \|a\|^2 - 2(\eta, a) + \|\eta\|^2 = \|a\|^2 - \|\eta\|^2 \leqslant cn^{-1}\log n$$

(aussi par (17)-(20)). Pour les densités a', η' on a $|a' - \eta'| \leqslant cn$ (car η' est bornée). Or, nous avons démontré des théorèmes concernant l'estimation de $[\sigma]$ par $\|\sigma\|$ à condition que la densité soit bornée. Notamment, l'inégalité (31) de [5] nous donne, en vertu de (21),

$$\frac{c_8\dfrac{\log n}{n}}{[\sigma]^2} \geqslant \frac{\|\sigma\|^2}{[\sigma]^2} \geqslant \frac{c}{\log\dfrac{c_9 n}{M[\sigma]}} \qquad (c > 0)\,.$$

Par des calculs élémentaires nous en déduisons

$$[\sigma] = [a - \eta] \leqslant c_{10} n^{-1/2}\log n\,,$$

et comme $[a - \tau_n] \leqslant \varkappa d\theta/n$, nous obtenons l'inégalité (13) qui entraîne (14) par la voie indiquée par le théorème VII de [5] (cf. théorème II dans [4]). Notre théorème est ainsi démontré.

Remarque 1. Une erreur des z_{in} qui ne dépasse pas c_{11}/n^2 cause un changement de $\|\tau_n\|_n^2$ de c_{12}/n au plus. Dans les calculs numériques on peut donc calculer les coordonnées des z_{in} à c_{11}/n^2 près. La valeur de c_{11} peut être choisie arbitrairement quant à la convergence de la méthode, mais l'estimation (12) augmente approximativement de $c_{11}/n\vartheta$, et celles de (13) et (14) subissent des changements correspondants.

Remarque 2. Le lecteur a sans doute observé que toutes nos considérations peuvent être menées à bonne fin avec la forme $\|\ \|_0^2$ au lieu de $\|\ \|_n^2$. Nous avons introduit cette seconde forme à cause des généralisations dont notre méthode semble capable et qui seraient impossibles avec la première.

Travaux cités

[1] N. Bourbaki, *Intégration* (Él. de math., L. VI chap. III) Ac. Sci. Ind. 1175, Paris 1952.

[2] M. Fekete, *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten*, Math. Zeitsch. 17 (1932), pp. 228-249.

[3] O. Frostman, *Potentiel d'équilibre*, Lund 1935.

[4] W. Kleiner, *Sur l'approximation de la représentation conforme par la methode des points extrémaux de M. Leja*, Ann. Pol. Math. 14 (1963), pp. 131-140.

[5] — *Une condition de Dini-Lipschitz dans la théorie du potentiel*, Ann. Pol. Math. 14 (1963), pp. 117-130.

[6] — *Sur la condensation des masses*, Ann. Pol. Math. 15 (1964), pp. 85-90.

[7] М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функции комплексного переменного*, Москва-Ленинград 1951.

[8] F. Leja, *Sur une suite de polynômes et la représentation conforme d'un domaine plan quelconque sur le cercle*, Ann. Soc. Pol. Math. 14 (1935), pp. 116-134.

[9] — *Teoria funkcji analitycznych*, Warszawa 1957, str. 558.

[10] G. Pólya, G. Szegö, *Über den transfiniten Durchmesser (Kapazitätskonstante) von ebenen und räumlichen Punktmengen*, Journ. f. Math. 165 (1931), pp. 4-49.

UNIVERSITÉ JAGELLONNE
INSTITUT MATHÉMATIQUE DE L'ACADÉMIE POLONAISE DES SCIENCES

Reçu par la Rédaction le 20. 9. 1962