ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIV (1964)

Über eine Differentialungleichung mit Verzögerung

von J. Błaż und K. Zima (Katowice)

Das Ziel der präsentierten Note ist die Übertragung einiger bestimmten, von T. Ważewski zuerst aufgestellte Sätze betreffend gewöhnlicher Differentialungleichungen, auf den Fall der Differentialungleichungen mit retardierten Argumenten.

Die Ergebnisse der Autoren verallgemeinen auch gewisse, in der Arbeit [5] bewiesenen Sätze.

In dem ersten Teil dieser Note beweisen wir einen Existenzsatz und einen Satz über die Fortsetzbarkeit der Integralkurven der Differentialgleichungen mit Verzögerung.

Der zweite Teil betrifft ein Existenzproblem des Maximalintegrals der Systeme von Differentialgleichungen mit Verzögerung; auserdem enthält er einige Sätze über Differential- und Integralungleichungen für diese Systeme und ihre Anwendung.

1. Es sei $Q : \{t_0 \leqslant t \leqslant t_0+a;\ a \leqslant y \leqslant b\}$ ein Rechteck in der Ebene der veränderlichen t, y und Δ — ein abgeschlossenes Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$.

Wir betrachten die Differentialgleichung in Gestalt

$$(1)\qquad \begin{aligned} & y'(t) = \int_0^\infty F[t, y(t-s)]\,dr(t, s) + f(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \in \Delta\,, \\ & y(t) = \varphi(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,, \end{aligned}$$

und nehmen folgende Voraussetzungen an:

Voraussetzungen (H).

1° Die Funktion $F(t, y)$ ist definiert und stetig im Rechteck Q.

2° Der Kern $r(t, s)$ für $s \geqslant 0$ und $t \in \Delta$ bestimmt; dabei das Integral

$$v(t) = \int_0^\infty |dr(t, s)|$$

für jedes $t \in \Delta$ konvergiert.

3° $\lim\limits_{|t-u|\to 0} \int_0^\infty |d[r(t, s) - r(u, s)]| = 0,\quad t,\ u \in \Delta.$

4° Die Funktion $f(t)$ ist definiert und stetig in Intervall Δ.

5^0 Die Anfangsfunktion $\varphi(t)$ ist definiert, gleichmäßig stetig und im Intervall $(-\infty, t_0\rangle$ beschränkt; dabei erfüllt sie folgende Ungleichungen:

6^0 $\inf\limits_{t\leqslant t_0} \varphi(t) = k > a$ und $\sup\limits_{t\leqslant t_0} \varphi(t) = K < b$.

Es lässt sich nun folgendes beweisen:

Satz I. *Sind die Voraussetzungen* (H) *erfüllt, so gibt es für die Anfangsfunktion $\varphi(t)$ mindestens eine für $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$ existierende Integralkurve $y = y(t)$ der Differentialgleichung* (1).

Beweis. Aus den Voraussetzungen (H) geht hervor, daß $v(t)$ eine stetige im Intervall Δ Funktion ist, und es existieren solche Zahlen $F > 0$, $v > 0$ und $f > 0$, daß im Rechteck Q folgende Ungleichungen gelten

$$|F(t,y)| < F, \qquad |v(t)| < v \qquad \text{und} \qquad |f(t)| < f. \tag{2}$$

Damus geht hervor

$$\left|\int\limits_0^\infty F[t, y(t-s)]\,dr(t,s) + f(t)\right| \leqslant Fv + f = L = \text{const}. \tag{3}$$

Durch den Punkt $P_0(t_0, \varphi(t_0))$ führen wir zwei rechte Halbgerade mit Steigungskoeffizienten $m_1 = L$ und $m_2 = -L$. T bezeichnet ein maximales Dreieck im Rechteck Q enthalten, dessen zwei Arme die angeführten Halbgeraden sind und dessen Grundlinie paralell zur y-Achse ist; die Höhe dieses Dreiecks bezeichnen wir durch h.

Die Folge der sukzessiven Aproximation bestimmen wir, ähnlich wie in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen, mit Hilfe der gebrochenen Eulerischen Linie, mit diesem jedoch Unterschied, daß ein Teil der schon konstruirten Linie als Teilanfangskurve zur Konstruktion des nachstehenden Gliedes dieser Linie angenommen wird.

Es ist offenbar, daß diese Eulerische Linie im Dreieck T ganz enthalten ist, unabhängig von der Länge des maximalen Gliedes dieser Linie. Auserdem bildet, auf Grund der Ungleichung (3), die Funktionenfolge $\{y_\nu(t)\}$ eine Familie der gleichgradig stetigen Funktionen.

Es existiert also eine Teilfolge $\{y_\mu(t)\}$ dieser Familie, welche für $t_0 \leqslant t \leqslant t_0+h$ gegen eine Funktion $\hat{y}(t)$ gleichmäßig konvergiert

$$y_\mu(t) \Rightarrow \hat{y}(t), \qquad \mu = \mu(\nu). \tag{4}$$

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß die Funktion $\hat{y}(t)$ im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ der Integralgleichung

$$\tag{1'} \begin{aligned} y(t) &= \int\limits_{t_0}^{t}\left\{\int\limits_0^\infty F[\tau, y(\tau-s)]\,dr(\tau,s) + f(\tau)\right\}d\tau + \varphi(t_0), \qquad t \geqslant t_0, \\ y(t) &= \varphi(t), \qquad t \leqslant t_r, \end{aligned}$$

genügt.

Für $t \in \langle t_0, t_0+h \rangle$ haben wir

$$\Big| y_\mu(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty F[\tau, \hat{y}(\tau - s)] dr(\tau, s) + f(\tau) \Big\} d\tau \Big|$$

$$\leqslant \Big| y_\mu(t) - \varphi(t_0) - \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty F[\tau, y_\mu(\tau - s)] dr(\tau, s) + f(\tau) \Big\} d\tau \Big| +$$

$$+ \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty |F[\tau, \hat{y}(\tau - s)] - F[\tau, y_\mu(\tau - s)]| \, |dr(\tau, s)| \Big\} d\tau \, .$$

Das erste Glied der rechten Seite in der letzten Ungleichung ist in Anbetracht von gleichmäßigen in Q Stetigkeit der Funktion

$$G(t, y) = \int_0^\infty F(t, y) dr(t, s) + f(t)$$

unendlich klein.

Aus (4), Voraussetzungen 5°, 1° und von der Stetigkeit der Funktion $v(t)$ geht hervor, daß auch das zweite Glied der abgeschätzten Ungleichung beliebig klein ist, wodurch der Satz I vollkommen bewiesen werde.

Wir formulieren jetzt folgenden Satz:

SATZ II. *Sind die Voraussetzungen* (H) *erfüllt, so kann jede Integralkurve* $y(t)$ *der Differentialgleichung* (1) *mit der Anfangsfunktion* $\varphi(t)$ *bis an die Grundlinie des Dreiecks* T *fortgesetzt werden.*

Der Beweis dieses Satzes verläuft ähnlich dem Beweis des analogischen Satzes in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Bemerkung 1. Aus den bewiesenen Sätzen folgt, daß jede Integralkurve der Gleichung (1) mit der Anfangsfunktion $\varphi(t)$ an den Rand vom Rechteck Q fortsetzbar ist.

Bemerkung 2. Der Satz II ist auch gültig, wenn man statt der Anfangsfunktion $\varphi(t)$ ein genügend schmales Anfangsgebinde annimmt.

Bemerkung 3. Man kann ohne grundsätzliche Veränderungen die bewiesenen Sätze auf folgende Systeme der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &y_i'(t) = \int_0^\infty F_i[t, y_1(t-s), \dots, y_n(t-s)] dr_i(t, s) + f_i(t) \, , \qquad t \in \Delta \, , \\ (5) \quad & \\ &y_i(t) = \varphi_i(t) \, , \qquad t \leqslant t_0 \, , \qquad i = 1, 2, \dots, n \, , \end{aligned}$$

verallgemeinern.

2. Nehmen wir an, daß die Funktionen $\psi_1(t), \dots, \psi_n(t)$ Integralkurven der Differentialgleichungen (5) darstellen, die im Intervall $\langle t_0, a)$ bestimmt sind, mit dem Anfangsfunktionen $\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)$.

Gleichzeitig nehmen wir an, daß $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ eine stetige im Intervall $(-\infty, a)$ bestimmte Kurve ist und die Ungleichungen

$$(6) \qquad z_i(t) < \varphi_i(t), \quad \text{für} \quad t \in (-\infty, t_0\rangle,$$

und

$$(7) \qquad \underline{D}_- z_i(t) < \int_0^\infty F_i[t, z_1(t-s), \ldots, z_n(t-s)]\,dr_i(t,s) + f_i(t), \quad t \in \langle t_0, a),$$

erfüllt sind.

Nehmen wir noch an

Annahme (H*)

1* Die Funktionen $F_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ im Gebiet der Existenz erfüllen folgende Bedingung:

Wenn $\bar{y}_1 \leqslant \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{y}_{i-1} \leqslant \bar{\bar{y}}_{i-1}, \quad \bar{y}_i = \bar{\bar{y}}_i, \quad \bar{y}_{i-1} \leqslant \bar{\bar{y}}_{i-1}, \ldots, \bar{y}_n \leqslant \bar{\bar{y}}_n$, so $F_i(t, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) \leqslant F_i(t, \bar{\bar{y}}_1, \ldots, \bar{\bar{y}}_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n$.

2* Die Kerne $r_i(t,s)$ sind nichtfallende Funktionen relativ s, für jedes $t \in \langle t_0, a)$.

Man kann nun felgenden Satz beweisen:

Satz III. *Sind die Annahmen* (H*) *und die Ungleichungen* (6), (7) *erfüllt so ist im Intervall* $\langle t_0, a)$:

$$z_i(t) < \psi_i(t), \quad \text{für} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Der Beweis dieses Satzes verläuft ganz ähnlich dem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialungleichungen angeführten, und im Falle der differenzierbarer Kurve $z_i(t)$, der in der Note [5] angegeben ist.

Der Satz II mit der Bemerkung 2 lässt uns die Maximal- und Minimalintegralkurven des Systems (5) mit den Anfangsfunktionen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ in Erwägung ziehen.

Bezeichnet $(\overline{\mathrm{H}})$ die Annahmen für das System (5), analogisch der Voraussetzung (H), so lässt sich folgender Existenzsatz beweisen:

Satz IV. *Sind die Voraussetzungen* $(\overline{\mathrm{H}})$ *und* (H*) *erfüllt, so gibt es für die Anfangsfunktionen* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ *ein im Intervall* $\langle t_0, t_0+h\rangle$ *existierendes Maximalintegral des Systems* (5).

Beweis. Bezeichnen wir durch $y_1^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)$ eine Lösung des Systems

$$(8) \qquad \begin{aligned} y_i^\nu(t) &= \varphi_i^\nu(t) = \varphi_i(t) + \frac{1}{\nu}, \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0, \\ y_i'^\nu(t) &= \int_0^\infty F_i[t, y_1(t-s), \ldots, y_n(t-s)]\,dr_i(t,s) + f_i(t) + \frac{1}{\nu}, \\ &\qquad \text{für } t \in \langle t_0, t_0+h\rangle, \ i = 1, 2, \ldots, n; \ \nu = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

Das System (8) erfüllt für genügend großes ν die Voraussetzungen $(\overline{\mathrm{H}})$. Hieraus folgt für $\nu > N$ die Existenz der Lösung des Systems (8), die im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ bestimmt ist (s. Bemerkung 3).

Es sei $y_1(t), \ldots, y_n(t)$ eine beliebige Integralkurve des Systems (5), bestimmt im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ mit der Anfangsfunktionen $\varphi_1(t), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(t)$. Es ist offensichtlich, daß

$$y_i(t) < \varphi_i^{\nu+1}(t)\,, \qquad \text{für} \qquad t \leqslant t_0\,,$$

$$y_i'(t) < \int\limits_0^\infty F_i[t, y_1(t-s), \ldots, y_n(t-s)]\,dr_i(t,s) + f_i(t) + \frac{1}{\nu+1}\,, \qquad t \in \langle t_0, t_0+h\rangle$$

und

$$y_i^{\nu+1}(t) < y_i^{\nu}(t)\,, \qquad \text{für} \qquad t \leqslant t_0\,,$$

$$y_i'^{\nu+1}(t) < \int\limits_0^\infty F_i[t, y_1^{\nu+1}(t-s), \ldots, y_n^{\nu+1}(t-s)]\,dr_i(t,s) + f_i(t) + \frac{1}{\nu}\,, \qquad t \in \langle t_0, t_0+h\rangle\,.$$

Daraus ergeben sich bei Berücksichtigung des Satzes III im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ folgende Ungleichungen:

$$y_i(t) < y_i^{\nu+1}(t) < y_i^{\nu}(t)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n;\ t \in \langle t_0, t_0+h\rangle\,.$$

Hieraus folgt die Existenz von

$$\lim_{\nu\to\infty} y_i^{\nu}(t) = g_i(t)\,, \qquad t \in \langle t_0, t_0+h\rangle\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

wobei

$$(9) \qquad y_i(t) \leqslant g_i(t)\,, \qquad t \in \langle t_0, t_0+h\rangle\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Man kann leicht verifizieren, daß die Folge $\{y_i^{\nu}(t)\}$ gleichmäßig im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ konvergiert und die Grenzfunktionen $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ dem System (5) genügen.

Die Ungleichungen (9) ergeben, daß $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ im Intervall $\langle t_0, t_0+h\rangle$ eine Maximalintegrale des Systems (5) ist.

Die Bemerkung 1 betrifft auch das Maximalintegral des Systems (5).

Der Hauptsatz von Differentialungleichungen

Satz V. *Sind die Voraussetzungen* (H*) *erfüllt, und*

a) *sind* $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ *stetige Funktionen im Intervall* $(-\infty, a)$,

b) *ist* $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ *eine Maximalintegralkurve des Systems* (5) *im Intervall* $\langle t_0, \beta)$ *bestimmt, mit der Anfangsfunktionen* $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$,

c) *sind die Ungleichungen*

$$(10) \qquad z_i(t) \leqslant \varphi_i(t)\,, \qquad \textit{für} \qquad t \leqslant t_0\,,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

und

$$(11) \qquad \underline{D}_- z_i(t) \leqslant \int_0^\infty F_i[t, z_1(t-s), \ldots, z_n(t-s)]\, dr_i(t, s) + f_i(t)$$
$$\text{für } t \in \langle t_0, a), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

erfüllt, so its:

$$(12) \qquad z_i(t) \leqslant g_i(t), \quad \text{für} \quad t \in \langle t_0, a) \cap \langle t_0, \beta) = \langle t_0, B), \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

Beweis. Aus der Ungleichung (11) für jedes natürliche ν folgt

$$\underline{D}_- z_i(t) < \int_0^\infty F_i[t, z_1(t-s), \ldots, z_n(t-s)]\, dr_i(t, s) + f_i(t) + \frac{1}{\nu} .$$

Daher ergeben sich, bei Berücksichtigung des Satzes III folgende Ungleichungen:

$$13) \qquad z_i(t) < y_i^\nu(t), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \; \nu = 1, 2, \ldots, \; t \in \langle t_0, t_0 + h\rangle ,$$

wobei $y_1^\nu(t), \ldots, y_n^\nu(t)$ eine Integralkurve des Systems (8) bezeichnet.

Aus der Ungleichung (13) geht hervor, daß die Ungleichungen (12) wenigstens lokal erfüllt werden.

Man bezeichnet durch t^* die obere Schranke dieser Werte von t ($t \in \langle t_0, B)$), für welche bei allen $i = 1, 2, \ldots, n$ die Ungleichungen (12) gelten. Es ist offenbar, daß $z_i(t^*) \leqslant g_i(t^*)$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Führen wir aus dem Punkt $P^*(t^*, g_1(t^*), \ldots, g_n(t^*))$ eine Maximalintegrale des Systems (5), so kann man, auf Grund der Bemerkung 1, die vorigen Betrachtungen für die rechte Umgebung von t^* wiederholen. Hieraus folgt $z_i(t) \leqslant g_i(t)$, für $t > t^*$, was der Definition t^* widerspricht.

Aus dem Satz V führen wir jetzt eine Folgerung an, welche die Integralungleichungen mit Verzögerung betrifft.

Setzen wir voraus, daß die Funktionen $F_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ nicht fallend relativ $y_1, \ldots, y_n$ sind, und nehmen wir die Bedingung 2* (H*) an. Diese Folgerung werden wir in Form eines Satzes formulieren.

Satz VI. *Sind folgende Bedingungen erfüllt:*

a) *ist $z_1(t), \ldots, z_n(t)$ eine stetige Kurve im Intervall $(-\infty, a)$,*

b) *bezeichnet $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ eine im Intervall $\langle t_0, \beta)$ existierende Maximalintegrale des Systems* (5) *mit den Anfangsfunktionen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$, und gilt*

$$(14) \qquad \begin{aligned} & z_i(t) \leqslant \varphi_i(t), \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0, \\ & z_i(t) \leqslant \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty F_i[\tau, z_1(\tau - s), \ldots, z_n(\tau - s)]\, dr_i(\tau, s) + f_i(\tau) \Big\} d\tau , \\ & \qquad \text{für } t \in \langle t_0, a), \; i = 1, 2, \ldots, n , \end{aligned}$$

so ist

$$(15) \qquad z_i(t) \leqslant g_i(t), \quad \text{für} \quad t \in \langle t_0, B), \; i = 1, 2, \ldots, n .$$

Beweis. Bezeichnen wir (s. [3])

$$(16)\quad \begin{aligned} &h_i(t) = \varphi_i(t)\,, \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,,\\ &h_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{\int_0^\infty F_i[\tau, z_1(\tau-s), \dots, z_n(\tau-s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau)\Big\}d\tau\,,\\ &\qquad\qquad \text{für } t \in \langle t_0, B)\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,. \end{aligned}$$

Aus (14) und (16) geht hervor

$$(17)\qquad z_i(t) \leqslant h_i(t)\,, \quad \text{für} \quad t < B\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,.$$

Die Ausführung der Differentation der Gleichung (16) unter Beachtung der Bedingung (17) ergeben

$$\begin{aligned} &h_i(t) = \varphi_i(t)\,, \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,,\\ &h_i'(t) \leqslant \int_0^\infty F_i[t, h_1(t-s), \dots, h_n(t-s)]\,dr_i(t, s) + f_i(t)\,, \quad t \in \langle t_0, B)\,. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich bei Berücksichtigung des Satzes V und der Ungleichung (17) die Behauptung des beweisenen Satzes.

Einen analogischen Satz im Fall der gewöhnlichen Integralungleichungen hat Z. Opial [2] bewiesen.

Anwendung des Satzes VI (Näherungsweise Lösung des Systems (5)). Statt des Systems (5) nehmen wir das äquivalente System der Integralgleichungen

$$(5')\quad \begin{aligned} &y_i(t) = \varphi_i(t)\,, \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,,\\ &y_i(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{\int_0^\infty F_i[\tau, y_1(\tau-s), \dots, y_n(\tau-s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau)\Big\}d\tau\,,\\ &\qquad\qquad \text{für } t \in \langle t_0, a)\,,\ i = 1, 2, \dots, n\,. \end{aligned}$$

Setzen wir voraus, daß die Funktionen $w_1(t), \dots, w_n(t)$ und $u_1(t), \dots, u_n(t)$ im Intervall $(-\infty, a)$ definiert und stetig sind, und folgende Bedingungen erfüllen:

$$(14^0)\qquad w_i(t) \equiv u_i(t) \equiv \varphi_i(t)\,, \quad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,,$$

$$(14')\quad w_i(t) > \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{\int_0^\infty F_i[\tau, w_1(\tau-s), \dots, w_n(\tau-s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau)\Big\}d\tau \quad \text{für } t \in (t_0, a)\,,$$

$$(14'')\quad u_i(t) < \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{\int_0^\infty F_i[\tau, u_1(\tau-s), \dots, u_n(\tau-s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau)\Big\}d\tau\,, \quad \text{für } t \in (t_0, a).$$

Es seien $g_1(t), \dots, g_n(t)$ und $d_1(t), \dots, d_n(t)$ entsprechend Maximal- und Minimalintegrale des Systems (5) im Intervall $\langle t_0, a)$. Wir definieren die sogenannte Obere- und Unterefunktionenfolge $\{w_i^\nu(t)\}$ und $\{u_i^\nu(t)\}$ in folgender Weise:

$$
\begin{aligned}
& w_i^0(t) \equiv w_i(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \in (-\infty, a)\,, \\
(18) \quad & w_i^\nu(t) = \varphi_i(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots, \\
& w_i^\nu(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty F_i[\tau, w_1^{\nu-1}(\tau - s), \ldots, w_n^{\nu-1}(\tau - s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau) \Big\} d\tau\,, \\
& \qquad \text{für } t \in \langle t_0, a)\,,\ \nu = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& u_i^0(t) \equiv u_i(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \in (-\infty, a)\,, \\
(19) \quad & u_i^\nu(t) = \varphi_i(t)\,, \qquad \text{für} \quad t \leqslant t_0\,, \\
& u_i^\nu(t) = \varphi_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \Big\{ \int_0^\infty F_i[\tau, u_1^{\nu-1}(\tau - s), \ldots, u_n^{\nu-1}(\tau - s)]\,dr_i(\tau, s) + f_i(\tau) \Big\} d\tau \ (^1)\,, \\
& \qquad \text{für } t \in \langle t_0, a)\,.
\end{aligned}
$$

Die Folgen $\{w_i^\nu(t)\}$ und $\{u_i^\nu(t)\}$ erfüllen die Ungleichungen

$$
(20) \qquad u_i^\nu(t) < u_i^{\nu+1}(t) < d_i(t) \leqslant g_i(t) < w_i^{\nu+1}(t) < w_i^\nu(t)\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots
$$

Dies geht aus (14'), (14''), (18), (19) und aus dem Satz VI im Fall der starken Integralungleichungen hervor.

Bezeichnen wir: $\lim_{\nu\to\infty} w_i^\nu(t) = W_i$ und $\lim_{\nu\to\infty} u_i^\nu(t) = U_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Man kann leicht verifizieren, daß die Funktionen $W_i(t)$ und $U_i(t)$ im Intervall $(-\infty, a)$ stetig sind. Daraus, und aus (20) geht hervor, daß die Folgen $\{w_i^\nu(t)\}$ und $\{u_i^\nu(t)\}$ im Intervall $(-\infty, a)$ gleichmäßig konvergieren.

Die Funktionen $W_i(t)$ und $U_i(t)$ genügen dem System (5). Aus den Ungleichungen (20) folgt, daß die Funktionen $W_i(t)$ eine Maximalintegrale und $U_i(t)$ eine Minimalintegrale des Systems (5) sind ($W_i(t) \equiv g_i(t)$ und $U_i(t) \equiv d_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$). Es ist selbstverständlich, daß im Fall der Eindeutigkeit des Systems (5) die Identität $U_i(t) \equiv W_i(t)$ erfüllt ist.

Wenn, insbesonders, die Funktionen $F_i(t, y_1, \ldots, y_n)$ die Lipschitz-Bedingung erfüllen, so ist das System (5), in Anbetracht von [1], eindeutig. Es ist leicht mit Hilfe der Induktion zu beweisen, daß dann

$$
|w_i^\nu(t) - u_i^\nu(t)| \leqslant \frac{\delta (nLv_i)^\nu (t - t_0)^\nu}{\nu!}\,,
$$

(1) Die Voraussetzungen $(\overline{\mathrm{H}})$ garantieren die Existenz und die Stetigkeit der Funktionen $w_i^\nu(t)$ und $u_i^\nu(t)$ im Interwall $(-\infty, a)$.

wo L die Lipschitzconstante bezeichnet, $\delta = \max_i \{ \sup_{t\in\langle t_0,a)} |w_i(t) - u_i(t)| \}$, und $v_i = \sup_{t\in\langle t_0,a)} \int_0^\infty |dr_i(t, s)|$.

Die soeben ausgeführte Anwendung verallgemeinert einen gewissen Satz von G. M. Żdanow [6].

Literaturverzeichnis

[1] J. Błaż, *Sur l'existence et l'unicité de la solution d'une équation differentielle à argument retardé*, va paraitre dans les Ann. Polon. Math.

[2] Z. Opial, *Sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), pp. 200-209.

[3] T. Ważewski, *Remarque sur un système d'inégalités intégrales*, Ann. Polon. Math. 3 (1957), pp. 210-212.

[4] — *Systémes des équations et des inégalités différentielles ordinaires aux deuxièmes membres monotones et leurs applications*, Ann. Soc. Pol. Math. 23 (1950), pp. 112-166.

[5] K. Zima, *Sur une inégalité différentielle à l'argument retardé*, Ann. Polon. Math. 13 (1963), pp. 303-308.

[6] Г. М. Жданов, *О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом*, Усп. Мат. Наук 15 (1961), pp. 143-148.

Reçu par la Rédaction le 10. 11. 1961