ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVII (1966)

Sur une méthode de résolution approchée de certaines équations différentielles

par K. ZIMA (Katowice)

1. Équation différentielle à retard et équation auxiliaire. Soit $\delta(t)$ une fonction non négative et continue dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et posons $p = \min\limits_{\langle 0,a\rangle} \{t-\delta(t)\}$.

Nous allons considérer l'équation différentielle de la forme

$$(1)\qquad \begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, x(t-\delta(t))\big) \quad && \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ x(t) &= \varphi(t) && \text{pour} \quad t \in \langle p, 0\rangle. \end{aligned}$$

Sur l'équation (1) nous ferons les hypothèses suivantes:

1° La fonction $f(t, x)$ est définie et continue pour $t \in \langle 0, a\rangle$ et tout x. Par rapport à la variable x elle est une fonction non décroissante.

2° La fonction $f(t, x)$ satisfait par rapport à la variable x à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire

$$|f(t, \bar{x})-f(t, \bar{\bar{x}})| \leqslant L|\bar{x}-\bar{\bar{x}}| .$$

3° La fonction initiale $\varphi(t)$ satisfait dans l'intervalle $\langle p, 0\rangle$ à la condition de Lipschitz, c'est-à-dire

$$|\varphi(\bar{t})-\varphi(\bar{\bar{t}})| \leqslant K|\bar{t}-\bar{\bar{t}}| .$$

En vertu des théorèmes correspondants de la théorie des équations différentielles, l'équation (1) admet dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ une solution et une seule.

Avec l'équation (1) nous allons considérer une équation différentielle auxiliaire, dans laquelle la fonction inconnue contient un paramètre.

Soit $\Delta = \max\limits_{\langle 0,a\rangle} \{t-\delta(t)\}$ et $p_0 = p-\Delta$. Le cas où $\Delta \leqslant 0$ ne présente pour l'équation (1) aucun intérêt, car cette équation aurait alors la forme d'une équation triviale, soit

$$(1^*)\qquad \begin{aligned} x'(t) &= f\big(t, \varphi(t-\delta(t))\big) \quad && \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ x(t) &= \varphi(t) && \text{pour} \quad t \in \langle p, 0\rangle. \end{aligned}$$

Admettons donc que $\Delta > 0$. Alors $p_0 < p$. Soit ensuite $\overset{*}{\varphi}(t)$ un prolongement quelconque de la fonction $\varphi(t)$ sur l'intervalle $\langle p_0, 0\rangle$, avec conservation de la classe de Lipschitz. A côté de l'équation (1) nous allons considérer l'équation à paramètre:

$$(2)\qquad \begin{aligned} &y'(t) = f\big(t, y\big(t-\delta(t)-\delta\big)\big) && \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle\,,\ \delta \in (0, \Delta\rangle\,, \\ &y(t) = \psi(t) && \text{pour} \quad t \in \langle p_0, 0\rangle\,. \end{aligned}$$

Les fonctions $f(t, y)$ et $\delta(t)$ qui interviennent dans l'équation (2) sont identiques aux fonctions correspondantes de l'équation (1), tandis que la fonction $\psi(t)$ est pour l'instant une fonction quelconque continue dans l'intervalle $\langle p_0, 0\rangle$.

Dans ce travail, je me propose de construire deux fonctions $u(t;\eta)$ et $v(t;\eta)$, continues dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ et telles que $v(t;\eta) \leqslant x(t) \leqslant u(t;\eta)$ pour $t \in \langle 0, a\rangle$, où $x(t)$ désigne la solution de l'équation (1) dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. Les fonctions $u(t;\eta)$ et $v(t;\eta)$ s'experiment par les intégrales correspondantes de l'équation (2). La limitation effective de l'expression $\sup\limits_{\langle 0,a\rangle} \{u(t;\eta) - v(t;\eta)\}$ en fonction du paramètre η permet d'extraire de la famille d'équations (2) une équation telle que les fonctions $u(t;\eta)$ et $v(t;\eta)$, construites à l'aide de l'intégrale de cette équation soient la solution approchée de l'équation (1) avec une approximation donnée d'avance.

Pour établir la limitation que nous avons en vue dans ce travail, nous nous appuierons sur deux lemmes. Dans le premier, nous démontrons que les intégrales de l'équation (2) sont bornées dans leur ensemble, le second se rapporte à une propriété élémentaire dont jouissent les fonctions satisfaisant à la condition de Lipschitz.

2. Deux lemmes. Désignons par $\Psi(\overset{*}{\varphi}, \overset{*}{\eta}\}$ l'ensemble des fonctions $\psi(t)$ continues dans l'intervalle $\langle p_0, 0\rangle$ et satisfaisant à la condition

$$(3)\qquad \overset{*}{\varphi}(t) - \overset{*}{\eta} \leqslant \psi(t) \leqslant \overset{*}{\varphi}(t) + \overset{*}{\eta}\,,$$

où $\overset{*}{\eta}$ est un nombre positif fixé quelconque.

Désignons ensuite par $Y\{\Psi, \Delta\}$ l'ensemble des intégrales $y(t) = y(t;\psi,\delta)$ de l'équation (2), lorsque les fonctions initiales correspondantes $\psi(t)$ appartiennent à l'ensemble $\Psi\{\overset{*}{\varphi}, \overset{*}{\eta}\}$ et le paramètre δ parcourt les valeurs de l'intervalle $(0, \Delta\rangle$. Sur l'ensemble $Y\{\Psi, \Delta\}$ nous établirons le lemme suivant:

LEMME 1. *Si la fonction $f(t, y)$ de l'équation (2) satisfait aux hypothèses 1°-2°, les fonctions $y(t)$ de l'ensemble $Y\{\Psi, \Delta\}$ sont bornées dans leur ensemble dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$.*

Démonstration. Parmi les fonctions de l'ensemble $Y\{\Psi, \Delta\}$ on peut en déterminer effectivement une, à savoir celle — désignée par $\overset{*}{y}(t)$ — qui est intégrale de l'équation (2) lorsque $\delta = \Delta$ et $\psi(t) = \overset{*}{\varphi}(t)$.

En effect, on a

$$\text{(4)}\qquad \begin{aligned} &\overset{*}{y}'(t) = f\Big(t, \overset{*}{y}\big(t-\delta(t)-\Delta\big)\Big) &&\text{pour}\quad t\in\langle 0, a\rangle\,,\\ &\overset{*}{y}(t) = \overset{*}{\varphi}(t) &&\text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,.\end{aligned}$$

Puisque l'on a l'inégalité $t-\delta(t)-\Delta \leqslant 0$ et que $\overset{*}{y}(s) = \overset{*}{\varphi}(s)$ pour $s \leqslant 0$, la formule (4) peut s'écrire

$$\text{(5)}\qquad \begin{aligned} &\overset{*}{y}'(t) = f\Big(t, \overset{*}{\varphi}\big(t-\delta(t)-\Delta\big)\Big) &&\text{pour}\quad t\in\langle 0, a\rangle\,,\\ &\overset{*}{y}(t) = \overset{*}{\varphi}(t) &&\text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,,\end{aligned}$$

ou encore

$$\text{(6)}\qquad \overset{*}{y}(t) = \begin{cases} \overset{*}{\varphi}(t) & \text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,,\\ \overset{*}{\varphi}(0) + \int\limits_0^t f\Big(s, \overset{*}{\varphi}\big(s-\delta(s)-\Delta\big)\Big)ds & \text{pour}\quad t\in\langle 0, a\rangle\,.\end{cases}$$

Nous considérons $\overset{*}{y}(t)$ comme une fonction connue et admettons la notation

$$\text{(7)}\qquad \max_{\langle p_0, a\rangle} |\overset{*}{y}(t)| = \alpha\,.$$

Le lemme 1 sera démontré lorsque nous aurons prouvé que pour toute fonction $y(t)$ appartenant à l'ensemble $Y\{\Psi, \Delta\}$ l'expression $\sup\limits_{\langle 0,a\rangle} |y(t)-\overset{*}{y}(t)|$ est limitée par le même nombre.

Admettons donc que la fonction $y(t)$ satisfait à l'équation

$$\text{(8)}\qquad \begin{aligned} &y(t) = \psi(t) &&\text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,,\\ &y'(t) = f\Big(t, y\big(t-\delta(t)-\delta\big)\Big) &&\text{pour}\quad t\in\langle 0, a\rangle\,.\end{aligned}$$

Les relations (3), (4), (8) et la condition de Lipschitz entraînent l'inégalité

$$\text{(9)}\qquad \begin{aligned} &|y(t)-\overset{*}{y}(t)| < \overset{*}{\eta} &&\text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,,\\ &|y'(t)-\overset{*}{y}'(t)| \leqslant L\Big|y\big(t-\delta(t)-\delta\big)-\overset{*}{y}\big(t-\delta(t)-\Delta\big)\Big| &&\text{pour}\quad t\in\langle 0, a\rangle\,,\end{aligned}$$

ou, après quelques transformations,

$$\text{(10)}\qquad \begin{aligned} &|y(t)-\overset{*}{y}(t)| \leqslant \overset{*}{\eta} \quad \text{pour}\quad t\in\langle p_0, 0\rangle\,,\\ &|y'(t)-\overset{*}{y}'(t)| \leqslant L\Big|y\big(t-\delta(t)-\delta\big)-\overset{*}{y}\big(t-\delta(t)-\delta\big)\Big| +\\ &\qquad + L\Big\{\Big|\overset{*}{y}\big(t-\delta(t)-\delta\big)\Big| + \Big|\overset{*}{y}\big(t-\delta(t)-\Delta\big)\Big|\Big\}\,, \quad t\in\langle 0, a\rangle\,.\end{aligned}$$

En posant $2La+L\overset{*}{\eta}=\lambda$, $\sup\limits_{\langle 0,t\rangle}|y(s)-\overset{*}{y}(s)|=u(t)$ et en tenant compte de l'inégalité $\underline{D}_-\{\sup\limits_{\langle 0,t\rangle}|x(s)|\}\leqslant\sup\limits_{\langle 0,t\rangle}|x'(s)|$ ([2]), on déduit de l'inégalité (10)

$$\underline{D}_-u(t)\leqslant Lu(t)+\lambda\,,\qquad u(0)\leqslant\overset{*}{\eta}\,. \tag{11}$$

L'inégalité (11) fournit pour la fonction $u(t)$ la limitation suivante:

$$u(t)\leqslant\lambda(e^{Lt}-1)/L+\overset{*}{\eta}e^{Lt}\overset{\text{def}}{=\!=}\mu(t)\,. \tag{12}$$

De cette inégalité (12) résulte la conclusion du lemme 1.

Remarque 1. Il résulte du lemme 1 que si la fonction initiale $\varphi(t)$ de l'équation (2) appartient à l'ensemble $\Psi\{\overset{*}{\varphi},\overset{*}{\eta}\}$ on peut — sans nuire à l'équation (2) — rétrécir la fonction $f(t,y)$ à l'ensemble $D\{0\leqslant t\leqslant a,\ \mu_1(t)\leqslant y\leqslant\mu_2(t)\}$, où $\mu_1(t)=\min\limits_t\{\min\limits_{\langle p_0,0\rangle}[\overset{*}{\varphi}(t)-\overset{*}{\eta}],\mu(t)\}$, $\mu_2(t)=\max\limits_t\{\max\limits_{\langle p_0,0\rangle}[\overset{*}{\varphi}(t)+\overset{*}{\eta}],\mu(t)\}$.

La fonction $f(t,y)$ étant continue, il existe un nombre $M>0$ tel que $|f(t,y)|\leqslant M$ lorsque le point (t,y) appartient à l'ensemble D.

Les fonctions de l'ensemble $Y\{\Psi,\Delta\}$ satisfont donc dans l'intervalle $\langle 0,a\rangle$ à la condition de Lipschitz avec la constante M. Si l'on pose $L^*=\max(K,M)$, la condition de Lipschitz avec la constante L^* sera vérifiée par les fonctions de l'ensemble $Y\{\Psi,\Delta\}$ et la fonction initiale $\overset{*}{\varphi}(t)$. On obtient finalement l'importante conclusion que voici:

En fixant le nombre $\overset{*}{\eta}$ on peut déterminer un nombre L^* qui soit la constante de Lipschitz pour toutes les fonctions de l'ensemble $Y\{\Psi,\Delta\}$ et pour la fonction initiale $\overset{*}{\varphi}(t)$.

LEMME 2. *Supposons que la fonction $\overset{*}{z}(t)$, définie dans l'intervalle $\langle a-H,b\rangle$, $H>0$, vérifie dans cet intervalle la condition de Lipschitz avec la constante L, c'est-à-dire*

$$|\overset{*}{z}(\bar{t})-\overset{*}{z}(\bar{\bar{t}})|\leqslant L|\bar{t}-\bar{\bar{t}}|\,,\qquad pour\qquad \bar{t},\bar{\bar{t}}\in\langle a-H,b\rangle\,. \tag{13}$$

Supposons encore que la fonction $z(t)$, définie dans l'intervalle $\langle a,b\rangle$ vérifie l'inégalité

$$\overset{*}{z}(t)>z(t)+\varepsilon\quad(z(t)<z(t)-\varepsilon)\,,\qquad où\qquad \varepsilon>0\,,\ \varepsilon/L\leqslant H\,. \tag{14}$$

Sous ces conditions, on a, pour tout nombre h° fixe de l'intervalle $\langle 0,\varepsilon/L)$, l'inégalité

$$z(t+h^\circ)<\overset{*}{z}(t)\quad(z(t+h^\circ)>\overset{*}{z}(t))\qquad pour\qquad t\in\langle a-h^\circ,b-h^\circ\rangle\,. \tag{15}$$

Démonstration. Fixons maintenant un $h^\circ\in\langle 0,\varepsilon/L)$ et $t\in\langle a-h^\circ,b-h^\circ\rangle$. Alors $t+h^\circ\in\langle a,b\rangle$ et t, $t+h^\circ\in\langle a-H,b\rangle$.

D'après (13) et (14) nous avons

$$\overset{*}{z}(t+h^\circ)\leqslant\overset{*}{z}(t)+Lh^\circ \tag{16}$$

et

$$(17) \qquad \overset{*}{z}(t+h^\circ) > z(t+h^\circ)+\varepsilon .$$

Des inégalités (16), (17) il résulte que l'on a

$$(18) \qquad \overset{*}{z}(t)+Lh^\circ > z(t+h^\circ)+\varepsilon \geqslant z(t+h^\circ)+Lh^\circ .$$

Alors

$$\overset{*}{z}(t) > z(t+h^\circ) .$$

Le lemme 2 se trouve ainsi démontré.

3. Théorèmes sur la limitation. Nous établirons maintenant, en nous appuyant sur les lemmes 1 et 2, le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Soit* $y(t)$ *une solution de l'équation* (1) *dans l'intervalle* $\langle 0, a\rangle$ *et supposons donné un nombre* $\mathring{\eta}$, $0<\mathring{\eta}\leqslant\overset{*}{\eta}$. *Si le nombre* h° *satisfait à l'inégalité* $0<h^\circ<\mathring{\eta}/L^*$ (pour L^* cf. conséquence du lemme 1), *l'intégrale* $\bar{y}(t)$ *de l'équation*

$$(19) \qquad \begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t-\delta(t)-h^\circ)\big) \qquad &&\textit{pour} \quad t\in\langle 0, a\rangle ,\\ y(t) &= \overset{*}{\varphi}(t)+\mathring{\eta} &&\textit{pour} \quad t\in\langle p_0, 0\rangle \end{aligned}$$

satisfait à l'inégalité

$$(20) \qquad \bar{y}(t)\geqslant y(t)+\mathring{\eta} \qquad \textit{pour} \quad t\in\langle 0, a\rangle .$$

Démonstration. L'inégalité (20) a lieu pour $t=0$. Supposons, pour la démonstration par l'absurde, que pour un $t^\circ\in(0, a\rangle$ on ait l'inégalité $0<\bar{y}(t^\circ)-y(t^\circ)<\mathring{\eta}$. Il existé évidemment un nombre $\tilde{\eta}>0$ tel que $\tilde{\eta}<\mathring{\eta}$, $0<h^\circ<\tilde{\eta}/L$ et, en même temps, $0<\bar{y}(t^\circ)-y(t^\circ)<\tilde{\eta}$. Puisque $\bar{y}(0)-y(0)=\mathring{\eta}>\tilde{\eta}$, et $\bar{y}(t^\circ)-y(t^\circ)<\tilde{\eta}$, il existe dans l'intervalle $(0, t^\circ)$ des nombres τ tels que $\bar{y}(\tau)-y(\tau)=\tilde{\eta}$.

Soit τ^* la borne inférieure de ces nombres τ. Évidemment $\tau^*>0$ et pour $t\in\langle 0, \tau^*\rangle$ on a

$$(21) \qquad \bar{y}(t)\geqslant y(t)+\tilde{\eta} \qquad \text{et} \qquad \bar{y}(\tau^*)=y(\tau^*)+\tilde{\eta} .$$

Cette dernière égalité, rapprochée de l'égalité $\bar{y}(0)=y(0)+\mathring{\eta}$, mène par le théorème de Lagrange à la conclusion suivante: Il existe un nombre τ° tel que $\tau^\circ\in(0, \tau^*)$ et $\bar{y}'(\tau^\circ)-y'(\tau^\circ)=(\tilde{\eta}-\mathring{\eta})/\tau^*<0$, c'est-à-dire

$$(22) \qquad \bar{y}'(\tau^\circ)<y'(\tau^\circ) .$$

D'autre part, au point τ° on a les égalités $\bar{y}'(\tau^\circ)=f\big(\tau^\circ, \bar{y}(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ)\big)$, et $y'(\tau^\circ)=f\big(\tau^\circ, y(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ))\big)=f\big(\tau^\circ, y\big[(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ)+h^\circ\big]\big)$. Puisque $\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)\leqslant\tau^\circ<\tau^*$ on trouve $\bar{y}(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ)>y(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ)+\tilde{\eta}$. Cette inégalité entraîne, en vertu du lemme 2,

$$y\big(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)\big)=y\big[(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ)+h^\circ\big]\leqslant\bar{y}\big(\tau^\circ-\delta(\tau^\circ)-h^\circ\big) .$$

Comme la fonction $f(t, y)$ est monotone, il en résulte l'inégalité

$$y'(\tau^\circ) \leqslant \bar{y}'(\tau^\circ), \tag{23}$$

en contradiction avec l'inégalité (22), ce qui achève la démonstration du théorème 1.

THÉORÈME 2. *Soit $y(t)$ une solution de l'équation* (1) *dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$. Supposons ensuite que les nombres $\mathring{\eta}$, h° vérifient la condition $0 < h^\circ < \mathring{\eta}/L^*$. Alors l'intégrale $\tilde{y}(t)$ de l'équation*

$$\begin{aligned} y'(t) &= f\big(t, y(t-\delta(t)-h^\circ)\big) && \textit{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle, \\ y(t) &= \overset{*}{\varphi}(t) - \mathring{\eta} && \textit{pour} \quad t \in \langle p_0, 0\rangle \end{aligned} \tag{24}$$

satisfait dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ à l'inégalité

$$\tilde{y}(t) \leqslant y(t) - \mathring{\eta}. \tag{25}$$

La démonstration du théorème 2 est analogue à celle du théorème 1.

4. Détermination des fonctions $u(t, \eta)$ et $v(t, \eta)$. Moyennant les inégalités obtenues à l'aide des théorèmes 1 et 2, nous définirons les fonctions $u(t, \eta)$ et $v(t, \eta)$ comme il suit:

$$u(t, \mathring{\eta}) \overset{\text{def}}{=} \bar{y}(t) - \mathring{\eta}, \qquad v(t, \mathring{\eta}) \overset{\text{def}}{=} \tilde{y}(t) + \mathring{\eta}. \tag{26}$$

Évidemment $v(t, \mathring{\eta}) = \overset{*}{\varphi}(t) = u(t, \mathring{\eta})$ pour $t \in \langle p_0, 0\rangle$ et

$$v(t, \mathring{\eta}) \leqslant y(t) \leqslant u(t, \mathring{\eta}) \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle.$$

Nous allons maintenant évaluer la „distance": $\max\limits_{\langle 0,t\rangle} \{u(s, \mathring{\eta}) - v(s, \mathring{\eta})\}$ des fonctions $v(t, \mathring{\eta})$ et $u(t, \mathring{\eta})$ dans l'intervalle $\langle 0, a\rangle$ en fonction de t. Pour cela il suffit de trouver une limitation pour la distance correspondante des fonctions $\bar{y}(t)$ et $\tilde{y}(t)$. Celles-ci vérifient les égalités

$$\begin{aligned} \bar{y}'(t) &= f\big(t, \bar{y}(t-\delta(t)-h^\circ)\big), && t \in \langle 0, a\rangle, \\ \bar{y}(t) &= \overset{*}{\varphi}(t) + \mathring{\eta}, && t \in \langle p_0, 0\rangle \end{aligned} \tag{27}$$

et

$$\begin{aligned} \tilde{y}'(t) &= f\big(t, \tilde{y}(t-\delta(t)-h^\circ)\big), && t \in \langle 0, a\rangle, \\ \tilde{y}(t) &= \overset{*}{\varphi}(t) - \mathring{\eta}, && t \in \langle p_0, 0\rangle. \end{aligned} \tag{28}$$

Les égalités (27) et (28) donnent, avec la condition de Lipschitz, la limitation

$$\begin{aligned} &|\bar{y}(t) - \tilde{y}(t)| = 2\mathring{\eta} \quad \text{pour} \quad t \in \langle p_0, 0\rangle, \\ &\max_{\langle 0,t\rangle} |\bar{y}'(s) - \tilde{y}'(s)| \leqslant L \max_{\langle 0,t\rangle} |\bar{y}(s) - \tilde{y}(s)| + 2L\mathring{\eta} \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle. \end{aligned} \tag{29}$$

En posant $u(t) = \max_{\langle 0,t\rangle} |\bar{y}(s) - \tilde{y}(s)|$, nous obtenons

$$D_{-}u(t) \leqslant Lu(t) + 2L\mathring{\eta}\,, \qquad u(0) = 2\mathring{\eta}\,, \tag{30}$$

d'où résulte la limitation suivante pour la fonction $u(t)$:

$$u(t) \leqslant 2\mathring{\eta}(2e^{Lt} - 1)\,. \tag{31}$$

En tenant compte de la définition des fonctions $u(t, \mathring{\eta})$ et $v(t, \mathring{\eta})$ nous obtenons pour ces fonctions la limitation suivante:

$$\max_{\langle 0,t\rangle} \{u(s, \mathring{\eta}) - v(s, \mathring{\eta})\} \leqslant 4\mathring{\eta}(e^{Lt} - 1) \qquad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle\,. \tag{32}$$

Remarque 2. De la limitation (31) il s'ensuit que l'intégrale de l'équation (2) à paramètre δ fixé dépend continûment de la fonction initiale $\varphi(t)$. Cette dépendance continue permet d'admettre, dans les théorèmes 1 et 2, aussi le cas où $h^\circ = \mathring{\eta}/L^*$.

Remarque 3. Les fonctions $u(t, \eta)$ et $v(t, \eta)$ s'expriment par les intégrales $\bar{y}(t)$ et $\tilde{y}(t)$ de l'équation (2) à retard $\delta^*(t) = \delta(t) + h^\circ$, $h^\circ > 0$. On peut déterminer ces intégrales effectivement par la méthode des intégrations successives. En outre, les fonctions ainsi obtenues $u(t, \eta)$ et $v(t, \eta)$ peuvent servir de point de départ pour améliorer l'approximation de l'intégrale $y(t)$ de l'équation (1). En effect, si l'on définit deux suites de fonctions $\{v_n(t)\}$ et $\{u_n(t)\}$ comme il suit:

$$v_0(t) = v(t, \eta)\,, \qquad u_0(t) = u(t, \eta) \qquad \text{pour} \quad t \in \langle p_0, a\rangle\,,$$

$$v_n(t) = u_n(t) = \varphi(t) \qquad \text{pour} \quad t \in \langle p, 0\rangle \ \text{et}\ n = 1, 2, \ldots,$$

$$\left.\begin{aligned} v_{n+1}(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f\big(s, v_n(s - \delta(s))\big)\,ds\,, \\ u_{n+1}(t) &= \varphi(0) + \int_0^t f\big(s, u_n(s - \delta(s))\big)\,ds \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad t \in \langle 0, a\rangle,\ n = 1, 2, \ldots,$$

l'inégalité $v_n(t) \leqslant y(t) \leqslant u_n(t)$, $t \in \langle 0, a\rangle$, $n = 1, 2, \ldots$, sera vérifiée et on aura la limitation ([1], [3])

$$|v_n(t) - u_n(t)| \leqslant \mathring{\eta}(Lt)^n/n!\,, \qquad t \in \langle p, a\rangle\,,\ n = 1, 2, \ldots$$

Travaux cités

[1] J. Błaż und K. Zima, *Über eine Differentialungleichung mit Verzögerung* Ann. Polon. Math. 14 (1964), p. 311-319.

[2] K. Zima, *O jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego dla równania różniczkowego z przesuniętym argumentem*, Zeszyty Naukowe WSP, Katowice, 5 (SM), 1965.

[3] Г. М. Жданов (G. M. Żdanow), *О приближенном решении системы дифференциальных уравнений первого порядка с запаздывающим аргументом*, Усп. Матем. наук 16 (1961), p. 143-148.

Reçu par la Rédaction le 18. 9. 1964