ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XII (1962)

Remarque sur un critère d'unicité des intégrales d'une équation différentielle ordinaire

par J. Szarski (Kraków)

Considérons une équation différentielle ordinaire, définie dans le plan tout entier

$$y' = f(x, y)\,. \tag{1}$$

Le critère d'unicité suivant, dû à E. Kamke [1] (p. 139, Satz 3), est bien connu:

Supposons que le second membre de l'équation (1) *satisfasse pour* $x \neq 0$ *à l'inégalité*

$$|f(x, y)-f(x, \bar{y})| \leqslant \omega(|x|, |y-\bar{y}|)\,, \tag{2}$$

où la fonction $\omega(x, z)$ *jouit des propriétés suivantes*:

(α) $\omega(x, z)$ *est continue et non négative pour* $x > 0$ *et* $z \geqslant 0$,

(β) *pour tout* $a > 0$ *la fonction* $z(x) \equiv 0$ *est l'unique fonction différentiable qui satisfait à l'équation*

$$z' = \omega(x, z) \tag{3}$$

dans l'intervalle $0 < x < a$ *et remplit les conditions*

$$\lim_{x\to 0} z(x) = z'(0) = 0\,. \tag{4}$$

Dans ces hypothèses l'équation (1) *admet au plus une intégrale issue du point* $(0, 0)$.

Il est naturel de se poser la question si dans le critère cité la propriété (β) peut être remplacée par la suivante:

(γ) *pour tout* $a > 0$ *la fonction* $z(x) \equiv 0$ *est l'unique fonction différentiable qui satisfait à l'équation* (3) *dans l'intervalle* $0 < x < a$ *et remplit les conditions*

$$\lim_{x\to 0} z(x) = \lim_{x\to 0} z'(x) = 0\,. \tag{5}$$

Il est évident que la propriété (β) entraîne (γ).

Or, le but de la présente note est de montrer que:

I. *La condition* (β) *est essentiellement plus forte que* (γ).

II. *Le critère d'unicité cité plus haut cesse d'être valable, même pour* $f(x, y)$ *continue, lorsqu'on remplace la condition* (β) *par* (γ).

En effet, soit $\varphi(x)$ une fonction définie pour $x > 0$ et satisfaisant aux conditions suivantes:

1° $x^2 < \varphi(x) \leqslant \frac{4}{3}x^2$,
2° $\varphi'(x)$ est continue,
3° $\varphi'(x) \geqslant 2x$,
4° $\lim\limits_{x\to 0}\varphi'(x)$ n'existe pas.

Il n'est pas difficile de construire une telle fonction. Posons maintenant pour $x > 0$ et $z \geqslant 0$

$$\omega(x, z) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} z \,. \tag{6}$$

D'après 1°, 2° et 3° on vérifie immédiatement que la fonction (6) remplit la condition (α). D'autre part, en vertu de 1° et 3° nous avons pour $x \neq 0$, $z \geqslant 0$

$$\omega(|x|, z) \geqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{|x|} z \,. \tag{7}$$

Toute intégrale de l'équation (3) avec $\omega(x, z)$ définie par la formule (6) a la forme

$$z = C\varphi(x) \,, \qquad C = \text{const} \,.$$

Il en résulte, en vertu de 1°, que chaque intégrale de l'équation (3) remplit la condition (4) et par conséquent $\omega(x, z)$ ne jouit pas de la propriété (β). Cependant, d'après 4°, on voit que la propriété (γ) est vérifiée.

Posons maintenant

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cdot \frac{y}{x} & \text{pour} \quad x > 0 \,, \quad 0 \leqslant y \leqslant x^{4/3}, \\ \frac{4}{3} x^{1/3} & \text{pour} \quad x > 0 \,, \quad y > x^{4/3}, \\ 0 & \text{en tout autre point} \,. \end{cases}$$

La fonction $f(x, y)$ ainsi définie est continue dans le plan tout entier. En effet, elle est évidemment continue en tout point qui n'est pas situé sur le demi-axe non négatif y, et pour les points de ce demi-axe la continuité résulte du fait que $f(0, y) = 0$ et que $|f(x, y)| \leqslant \frac{4}{3} |x|^{1/3}$ pour $x \neq 0$. En outre $f(x, y)$ satisfait à la condition (2), avec $\omega(x, z)$ définie par (6). En effet, on a d'après (7), pour $x \neq 0$

$$|f(x, y) - f(x, \bar{y})| \leqslant \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{|x|} |y - \bar{y}| \leqslant \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{|x|} |y - \bar{y}| \leqslant \omega(|x|, |y - \bar{y}|) \,.$$

Cependant l'unicité des intégrales de l'équation (1), issues de l'origine, est en défaut, puisqu'il y en a deux distinctes, par exemple

$$y_1(x) \equiv 0\,, \qquad y_2(x) = \begin{cases} x^{4/3} & \text{pour} \quad x > 0\,, \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant 0\,. \end{cases}$$

Les propositions I et II se trouvent ainsi démontrées.

Travail cité

[1] E. Kamke, *Differentialgleichungen reeller Funktionen*, Leipzig 1930.

Reçu par la Rédaction le 1. 12. 1961