ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIII (1977)

Les relations entre les équations pré-Schröder II

par JÓZEF DREWNIAK et JÓZEF KALINOWSKI (Katowice)

Résumé. Le présent travail contient trois exemples des solutions de l'équation (4) qui ne satisfont pas au système d'équations (5) pour $n > 2$. Ces solutions sont définies dans les structures algebriques $(Y, \cdot)$ qui vérifient deux des hypothèses (A), (B), (C). Dans une structure qui vérifie toutes les trois conditions, il y a équivalence entre l'équation (4) et le système (5) (voir [1], théorème 1).

1. Considérons un ensemble Y muni d'une opération de composition interne „$\cdot$". Nous admettons, sur la structure $(Y, \cdot)$, les hypothèses suivantes:

(A) L'opération „$\cdot$" est associative.

(B) L'opération „$\cdot$" est commutative.

(C) La loi de réduction suivante est vérifiée:

$$\bigwedge_{x,y,z\in Y} (x\cdot y = x\cdot z \wedge x \neq 0) \Rightarrow (y = z), \tag{1}$$

où „0" désigne un élément de l'ensemble Y satisfaisant à l'équivalence

$$(y = 0) \Leftrightarrow (\bigwedge_{x\in Y} x\cdot y = y), \tag{2}$$

si un tel élément existe.

Soit g une application d'un certain ensemble X dans lui-même. Nous désignerons par g_n, $n \in N$, les itérées de la fonction g, c'est-à-dire les fonctions

$$g_0(x) = x, \quad g_{n+1}(x) = g(g_n(x)), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad x \in X. \tag{3}$$

Dans la note [1] nous avons démontré que si (A), (B), (C) sont remplies alors chaque solution $f\colon X \to Y$ de l'équation fonctionnelle

$$f^2(g(x)) = f(g_2(x))\cdot f(x), \quad x \in X, \tag{4}$$

satisfait à toutes les équations du système d'équations pré-Schröder (voir [4])

$$f^n(g(x)) = f(g_n(x))\cdot f^{n-1}(x), \quad n = 2, 3, \ldots, \quad x \in X. \tag{5}$$

Dans cette note nous allons montrer dans quel sens les hypothèses (A), (B) et (C) sont essentielles pour obtenir le résultat mentionné ([1], théorème 1). Nous donnerons des exemples de structures multiplicatives $(Y, \cdot)$ dans lesquelles une des conditions (A), (B), (C) n'est pas remplie et en même temps il existe une solution f de l'équation (4) qui ne vérifie pas l'équation

$$f^3\big(g(x)\big) = f\big(g_3(x)\big)\cdot f^2(x), \qquad x \in X, \tag{6}$$

l'une des équations du système (5) ($n = 3$).

2. Soient X un ensemble non vide et g une application du type $g\colon X \to X$ les autres hypothèses sur X et g seront formulées dans des exemples particuliers. Nous distinguerons des sous-ensembles disjoints de X appelés *orbites* (cf. [2], p. 14). L'ensemble

$$C = C(x) = \{y \in X\colon \bigvee_{m,n \in N} g_m(x) = g_n(y)\} \tag{7}$$

est appelé *orbite du point* $x \in X$. On sait (cf. [2]) que si $x_0 \in C$, alors l'orbite C contient toute la suite itérative de x_0

$$x_n = g_n(x_0), \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Par suite les solutions de l'équation (4) peuvent être definies indépendamment sur des orbites différentes dans l'ensemble X (v. [4]).

Exemple 1. Soit Y un ensemble de vecteurs du plan R^2 dont les composantes scalaires sont positives. Soient a et b des éléments de Y. Nous définissons dans Y l'opération „·“:

$$a \cdot b = (a_1, a_2)\cdot(b_1, b_2) = (a_2 b_2, a_1 b_1) \in Y. \tag{9}$$

Cette opération n'est pas associative, car pour les vecteurs

$$d = (a\cdot b)\cdot c, \qquad e = a\cdot(b\cdot c)$$

nous avons

$$d_1 = a_1 b_1 c_2, \qquad e_1 = a_2 b_1 c_1.$$

La commutativité de la multiplication (9) est une conséquence immédiate de la définition, en outre la loi de réduction (1) est satisfaite, car les composantes scalaires des deux vecteurs sont non nulles. Alors dans la structure $(Y, \cdot)$ les conditions (B) et (C) seules sont satisfaites.

Supposons maintenant que pour un $x_0 \in X$ l'orbite $C(x_0)$ soit un ensemble infini, dans lequel, pour chaque $y \in C(x_0)$ fixé la valeur de la difference

$$k = k(y) = m - n \tag{10}$$

ne dépend pas du choix des nombres naturels m, n remplissant la condition

$$g_m(x_0) = g_n(y) \tag{11}$$

en vertu de la définition (7) [1].

Fixons $q > 0$, $q \neq 1$, et notons

$$f(y) = (1, q^k), \quad y \in C(x_0), \tag{12}$$

où $k = k(y)$ est la différence (10). Admettant

$$z = g(y) \tag{13}$$

conformément à (11) nous pouvons écrire:

$$g_m(x_0) = g_{n-1}(z),$$

d'où, en vertu de (12), nous avons

$$f(z) = (1, q^{k+1});$$

d'une manière générale nous obtiendrons

$$f(y_n) = (1, q^{k+n}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \quad k = k(y_0) \tag{14}$$

pour une suite itérative arbitraire $\{y_n\}$ dans l'orbite $C(x_0)$. En fixant le point $x = y_0 \in C(x_0)$ dans l'équation (4) nous pouvons écrire (pour $k = k(y_0)$) selon (14)

$$f^2\big(g(y_0)\big) = (1, q^{k+1})\cdot(1, q^{k+1}) = (q^{2k+2}, 1);$$
$$f\big(g_2(y_0)\big)\cdot f(y_0) = (1, q^{k+2})\cdot(1, q^k) = (q^{2k+2}, 1).$$

Alors la fonction f satisfait à l'équation (4) dans $C(x_0)$. Supposant de plus que la fonction f soit constante aux points de chaque orbite $C \subset X$, $C \neq C(x_0)$, nous obtiendrons une fonction satisfaisant à l'équation (4) dans X. En même temps nous pouvons écrire pour $y \in C(x_0)$, $k = k(y)$

$$f^3\big(g(y)\big) = (q^{k+1}, q^{2k+2}), \quad f\big(g_3(y)\big)\cdot f^2(y) = (q^{k+3}, q^{2k}),$$

c'est-à-dire que la fonction f ne vérifie pas l'équation (6) ($q > 0$, $q \neq 1$).

De l'exemple donné nous concluons:

CONCLUSION 1. Les hypothèses (B) et (C) ne suffisent pas pour que les solutions de l'équation (4) vérifient le système (5).

EXEMPLE 2. Soit Y l'ensemble des matrices non singulières du second segré avec l'opération de la multiplication des matrices. Alors dans la tructure $(Y, \cdot)$ les hypothèses (A) et (C) seules sont remplies.

---

[1] Cette hypothèse est équivalente à la condition

$$\bigwedge_{y \in C(x_0)} \bigwedge_{k,n \in N} g_{n+k}(y) \neq g_n(y).$$

Par exemple, pour la fonction réelle $g(x) = e^x$ chaque orbite remplit une telle condition, et pour les fonctions $g(x) = 2x$ ou $g(x) = x^3$ cette condition est remplie par toutes les orbites différentes de $C(0)$.

Maintenant nous allons supposer (de même que dans l'exemple 1), que dans certaine orbite $C(x_0) \subset X$ à chaque point $y \in C(x_0)$ on peut, d'une manière unique, faire correspondre un nombre entier $k = k(y)$ selon les formules (10) et (11). Nous commencerons par construire la solution $f\colon X \to Y$ de l'équation (4), sur cette orbite. Dans ce but nous définirons par récurrence une suite $\{c_n\}$ à coefficients entiers en admettant successivement:

$$\begin{aligned} c_0 &= c_1 = 1; \\ c_{n+1} &= \big(1+2(-1)^n\big)c_n + 2(-1)^n c_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \ldots; \\ c_{n-1} &= \tfrac{1}{2}(-1)^n\big(c_{n+1} - \big(1+2(-1)^n\big)c_n\big), \qquad n = 0, -1, -2, \ldots \end{aligned}$$

Pour un nombre entier arbitraire k nous tirons de là

$$\big(1+2(-1)^{k+1}\big)c_{k+1} = c_{k+2} + 2(-1)^{k+2}c_k. \tag{15}$$

Nous allons maintenant déterminer

$$f(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_k & 2(-1)^k \end{bmatrix}, \quad y \in C(x_0),$$

où k est défini par (10). En vertu des propriétés de l'orbite il résulte (comp. les considérations sur (13) et (14)) que:

$$f\big(g_n(y)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c_{k+n} & 2(-1)^{k+n} \end{bmatrix}, \quad n = 0, 1, \ldots, \; k = k(y), \; y \in C(x_0): \tag{16}$$

En substituant la matrice (16) ($x = y$) dans les deux membres de l'équation (4) et en effectuant la multiplication, on peut constater que le fait que l'équation (4) est vérifiée dans $C(x_0)$ est équivalent à la condition (15). Donc la fonction f est une solution de l'équation (4) dans $C(x_0)$ et en la définissant comme une fonction constante dont les valeurs sont prises dans Y sur les autres orbites $C \subset X$, nous obtenons la solution de l'équation (4) dans X.

Remarquons maintenant que les conditions (10) et (11) impliquent l'égalité $k(x_0) = 0$ et en vertu de (16) nous pouvons écrire

$$f(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad f\big(g(x_0)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad f\big(g_3(x_0)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}.$$

De là

$$f^3\big(g(x_0)\big) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} \neq f\big(g_3(x_0)\big)\cdot f^2(x_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -13 & -8 \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire que la fonction f ne vérifie pas l'équation (6).

De l'exemple 2 nous concluons:

CONCLUSION 2. Les hypothèses (A) et (C) ne sont pas suffisantes pour que les solutions de l'équation (4) vérifient le système (5).

Remarquons que dans l'exemple 2 $(Y, \cdot)$ est un groupe non commutatif. Alors, nous avons([2]):

CONCLUSION 3. Si la fonction f prend ses valeurs dans un groupe non commutatif, l'équation (4) n'est pas équivalente au système (5).

EXEMPLE 3. Fixons un nombre naturel impair $n \neq 1$ et soit

$$Y = \{0, 1, \ldots, 4n^2-1\}$$

un demi-groupe multiplicatif avec l'opération de la multiplication modulo $4n^2$. Dans la structure $(Y, \cdot)$ les hypothèses (A) et (B) seules sont satisfaites nous avons par exemple $2n\cdot n = 2n\cdot 3n$, $n \neq 3n$. Posant

$$a = 2n, \quad b = 4n, \quad c = n \tag{17}$$

nous pouvons écrire

$$a^2 = b^2 = a\cdot b = b\cdot c = 0. \tag{18}$$

Supposons maintenant que pour un point $x_0 \in X$

$$g(x) \neq x_0, \quad x \in X, \tag{19}$$

et que les premiers quatre termes de la suite itérative (8) soient différents deux à deux ([3]). Nous admettons

$$f(x_0) = c, \quad f(x_1) = f(x_3) = a, \quad f(x_2) = b \tag{20}$$

et que la fonction f transforme arbitrairement l'ensemble $X \setminus \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ sur l'ensemble $\{a, b\}$. La fonction $f\colon X \to X$ ainsi définie est une solution de l'équation (4) dans X en vertu de (18) et (19) (comp. [3]). En même temps nous avons en vertu de (17) et (20)

$$f^3\big(g(x_0)\big) = a^3 = 0, \quad f\big(g_3(x_0)\big)\cdot f^2(x_0) = a\cdot c^2 = a\cdot c \neq 0$$

(en posant $n = 2k+1$ nous trouvons

$$a\cdot c^2 = 2n^2\cdot(2k+1) = 4n^2\cdot k + 2n^2 = a\cdot c,$$

qui est différent de zéro); donc la fonction f ne satisfait pas à l'équation (6).

De l'exemple donné ci-dessus nous concluons:

CONCLUSION 4. Les hypothèses (A) et (B) ne suffisent pas pour que les solutions de l'équation (4) vérifient le système (5).

Cette conclusion donne une réponse négative à la question posée par M. M. Kuczma dans la note [3]: "Est-ce que dans le demi-groupe commutatif $(Y, \cdot)$ l'équation (4) est équivalente au système (5)?".

---

(2) Cette conclusion est due à R. Ger.

(3) Cette condition est remplie par des fonctions réelles telles que $g(x) = \sin x$, $g(x) = e^x$ où la fonction $g(x) = x^2$ définie dans l'intervalle $(0, \frac{1}{2})$.

Travaux cités

[1] J. Drewniak, J. Kalinowski, *Les relations entre les équations pré-Schröder I*, Ann. Polon. Math. 32 (1975), p. 5–11.

[2] M. Kuczma, *Functional equations in a single variable*, Monografie Mat. 46, Warszawa 1968.

[3] — P 63 R 2, Aequationes Math. 5 (1970), p. 327.

[4] — *Quelques observations à propos de l'équation pré-Schröder*, Ann. Polon. Math. 28 (1973), p. 49–52.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1974