ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XLIV (1984)

Über unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen

von PETER VOLKMANN (Karlsruhe)

Résumé. L'objet de l'étude est l'équation différentielle $u' = f(t, u)$ dans l'espace de Banach $E = l_\infty(A)$ des fonctions bornées $x\colon A \to R$, où A est un ensemble arbitraire et f est une fonction continue. Si l'on a $E = R^n$, il y a deux théorèmes d'existence pour cette équation, dûs à M. Müller et M. Nagumo, qui se fondent respectivement sur certaines conditions (M) et (N). Dans la présente note il sera démontré, que pour l'espace $E = l_\infty(A)$, (M) entraîne (N). Ce qui permet de déduire des variantes du théorème de Müller pour cet espace, car il y a des variantes correspondantes du théorème de Nagumo, spécialement dûes à R. H. Martin.

Sei A eine beliebige Menge und

$$l_\infty(A) = \{x \mid x = (x_\alpha)_{\alpha\in A},\ x_\alpha \text{ reell},\ \|x\| = \sup_{\alpha\in A}|x_\alpha| < +\infty\}.$$

Für $x, y \in l_\infty(A)$ wird $x \leqslant y$ geschrieben, wenn $x_\alpha \leqslant y_\alpha$ für alle $\alpha \in A$ gilt. Ferner bezeichne $\underline{D}_+$ und $\bar{D}_+$ die rechtsseitige untere bzw. die rechtsseitige obere Dinische Ableitung einer reellen Funktion.

SATZ. *Seien $v, w\colon [0, T) \to l_\infty(A)$ stetige Funktionen mit*

$$v(t) \leqslant w(t) \quad (0 \leqslant t < T),$$

und sei

$$D = \{(t, x) \mid 0 \leqslant t < T,\ x \in l_\infty(A),\ v(t) \leqslant x \leqslant w(t)\}. \tag{1}$$

Ferner sei $f\colon D \to l_\infty(A)$ eine stetige Funktion, welche der folgenden Bedingung genügt:

(M) *Ist $\alpha \in A$ und $0 \leqslant t < T$, so gilt*

$$\underline{D}_+ v_\alpha(t) \leqslant f_\alpha(t, x) \quad \text{für} \quad v(t) \leqslant x \leqslant w(t),\ x_\alpha = v_\alpha(t), \tag{2}$$

$$\bar{D}_+ w_\alpha(t) \geqslant f_\alpha(t, x) \quad \text{für} \quad v(t) \leqslant x \leqslant w(t),\ x_\alpha = w_\alpha(t). \tag{3}$$

Aus diesen Voraussetzungen folgt:

(N) *Zu $(\tau, y) \in D$ und $\varepsilon > 0$ gibt es $(\tau^*, y^*) \in D$ mit*

$$\tau < \tau^* < \tau + \varepsilon, \tag{4}$$

$$\left\| \frac{y^* - y}{\tau^* - \tau} - f(\tau, y) \right\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Bemerkungen. 1. Ist $A = \{1, 2, \ldots, n\}$, also $l_\infty(A) = R^n$ (wobei R den Raum der reellen Zahlen bezeichnet), so haben die Bedingungen (M) und (N) nach Müller [4] bzw. Nagumo [5] zur Folge, daß für $(\tau, y) \in D$ das Anfangswertproblem

$$u(\tau) = y, \quad u'(t) = f(t, u(t)) \quad (\tau \leqslant t < T)$$

stets lösbar ist. (Allerdings gilt der Satz von Nagumo auch für allgemeinere Bereiche als solche von der Form (1).)

2. Der auf (N) basierende Existenzsatz von Nagumo ist auf beliebige Banachräume ausgedehnt worden, besonders durch Martin [1], [2], [3]; dabei werden für f außer der Stetigkeit naturgemäß noch weitere Bedingungen (Kompaktheits- oder Dissipativitätsbedingungen) gefordert. Der vorstehende Satz erlaubt nun eine Übertragung des Satzes von Müller auf den Raum $l_\infty(A)$, falls f entsprechenden Regularitätsvoraussetzungen genügt.

3. Unter Kompaktheitsbedingungen für f ist der Müllersche Satz durch Walter [7] auf den Raum $l_\infty(A)$ übertragen worden, und zwar direkt, d.h. ohne Umweg über (N). Der hier eingeschlagene Weg der Herleitung von (N) aus (M) hat aber möglicherweise den Vorzug, daß sich aus künftigen unendlichdimensionalen Versionen des Satzes von Nagumo (vgl. dazu Question 4.1 in Martins Buch [3]) automatisch neue Versionen des Satzes von Müller ergeben können.

4. Der nachfolgende Beweis wird im wesentlichen durch Modifizierung von Ideen von Martin [2] und Walter [7] geführt.

Beweis des Satzes. 1. Für $0 \leqslant t < T$ werde

$$P_t\colon\ l_\infty(A) \to D_t = \{x \mid x \in l_\infty(A),\ v(t) \leqslant x \leqslant w(t)\}$$

erklärt durch

$$(P_t x)_\alpha = \begin{cases} v_\alpha(t) & (x_\alpha < v_\alpha(t)) \\ x_\alpha & (v_\alpha(t) \leqslant x_\alpha \leqslant w_\alpha(t)) \\ w_\alpha(t) & (x_\alpha > w_\alpha(t)) \end{cases} \quad (\alpha \in A).$$

Definiert man noch

$$F\colon\ [0, T) \times l_\infty(A) \to l_\infty(A)$$

durch $F(t, x) = f(t, P_t x)$, so ist F eine stetige Funktion, welche auf D mit f übereinstimmt.

2. Sei $(\tau, y) \in D$. Wegen der Stetigkeit von F lassen sich

Näherungslösungen für das Anfangswertproblem

$$u(\tau) = y, \qquad u'(t) = F(t, u(t))$$

konstruieren. Genauer gilt (z.B. nach Martin [1], [2]): Es gibt $\eta \in (0, T-\tau)$ und $K > 0$, so daß für $n = 1, 2, 3, \ldots$ stetige Funktionen

$$u^n\colon [\tau, \tau+\eta] \to l_\infty(A)$$

existieren, welche die Eigenschaften

$$\left\|u^n(t) - y - \int_\tau^t F(s, u^n(s))\,ds\right\| \leqslant 1/n \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta), \tag{6}$$

$$\|u^n(t) - y\| \leqslant K(t-\tau) \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta) \tag{7}$$

besitzen.

3. Für die Funktionen u^n kann die Doppelungleichung

$$v_\alpha(t) - 2/n \leqslant u_\alpha^n(t) \leqslant w_\alpha(t) + 2/n \qquad (\alpha \in A, \tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta) \tag{8}$$

gezeigt werden: Dazu seien n und α fixiert, und es werde zur Abkürzung

$$\varphi(t) = u_\alpha^n(t), \qquad g(t) = \int_\tau^t F_\alpha(s, u^n(s))\,ds \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta)$$

geschrieben. Dann ist zunächst nach (6)

$$|\varphi(t_1) - \varphi(t_0) - g(t_1) + g(t_0)| \leqslant 2/n \qquad (t_0, t_1 \in [\tau, \tau+\eta]), \tag{9}$$

und nach (7) ist $\varphi(\tau) = y_\alpha$, also

$$v_\alpha(\tau) \leqslant \varphi(\tau) \leqslant w_\alpha(\tau). \tag{10}$$

Aus (2) und der Definition von F folgt

$$\underline{D}_+ v_\alpha(t) \leqslant g'(t), \quad \text{falls} \quad \varphi(t) \leqslant v_\alpha(t) \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta), \tag{11}$$

und entsprechend folgt mit (3)

$$\bar{D}_+ w_\alpha(t) \geqslant g'(t), \quad \text{falls} \quad \varphi(t) \geqslant w_\alpha(t) \qquad (\tau \leqslant t \leqslant \tau+\eta). \tag{12}$$

Es sei nun t_1 ein t-Wert mit

$$\varphi(t_1) < v_\alpha(t_1).$$

Dann existiert wegen (10) ein $t_0 \in [\tau, t_1)$ mit

$$\varphi(t_0) = v_\alpha(t_0), \tag{13}$$

$$\varphi(t) \leqslant v_\alpha(t) \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1). \tag{14}$$

Nach (11), (14) ist also

$$\underline{D}_+(v_\alpha - g)(t) \leqslant 0 \qquad (t_0 \leqslant t \leqslant t_1),$$

und hieraus folgt

$$v_\alpha(t_1)-g(t_1) \leqslant v_\alpha(t_0)-g(t_0).$$

(9), (13) liefern jetzt

$$v_\alpha(t_1) \leqslant \varphi(t_1)+2/n,$$

und das beweist die linke Ungleichung in (8). Analog erhält man die rechte Ungleichung unter Verwendung von (12).

4. Zum Nachweis von (N) sei noch $\varepsilon > 0$. Da F im Punkte (τ, y) mit f übereinstimmt und dort stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so daß

$$\|F(t, x)-f(\tau, y)\| \leqslant \varepsilon/2 \quad (\|x-y\| \leqslant \delta,\ |t-\tau| \leqslant \delta,\ \tau \leqslant t < T) \tag{15}$$

gilt. Man wähle nun τ^* so, daß neben (4) noch die Ungleichungen

$$\tau^* \leqslant \tau+\eta, \quad \tau^* \leqslant \tau+\delta, \quad K(\tau^*-\tau) \leqslant \delta \tag{16}$$

gelten. Dann sei n so groß gewählt, daß

$$3/n < \tfrac{1}{2}\varepsilon(\tau^*-\tau) \tag{17}$$

ausfällt, und man setze

$$y^* = P_\tau u^n(\tau^*).$$

Nach Definition von P_τ ist natürlich $(\tau^*, y^*) \in D$. Wegen (8) ist

$$\|y^*-u^n(\tau^*)\| \leqslant 2/n,$$

und mit (6) folgt weiter

$$\Big\|y^*-y-\int_\tau^{\tau^*} F(s, u^n(s))\,ds\Big\| \leqslant 3/n. \tag{18}$$

Für $\tau \leqslant s \leqslant \tau^*$ ist wegen (7), (16)

$$\|u^n(s)-y\| \leqslant K(\tau^*-\tau) \leqslant \delta,$$

also gilt nach (15), (16)

$$\|F(s, u^n(s))-f(\tau, y)\| \leqslant \varepsilon/2 \quad (\tau \leqslant s \leqslant \tau^*).$$

Damit wird

$$\Big\|\int_\tau^{\tau^*} F(s, u^n(s))\,ds-(\tau^*-\tau)f(\tau, y)\Big\| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon(\tau^*-\tau).$$

Mit (17), (18) folgt

$$\|y^*-y-(\tau^*-\tau)f(\tau, y)\| < \varepsilon(\tau^*-\tau),$$

und Division durch $\tau^*-\tau$ liefert abschließend (5).

Bemerkungen 1. Tatsächlich ist sogar die folgende, (N) verschärfende Bedingung gezeigt worden:

($\bar{N}$) *Ist* $(\tau, y) \in D$, *so gibt es zu jedem* $t \in (\tau, T)$ *ein* $y(t)$, *so daß* $(t, y(t)) \in D$ *ist und*

$$\lim_{t \searrow \tau} \left\| \frac{y(t)-y}{t-\tau} - f(\tau, y) \right\| = 0$$

gilt.

Die Äquivalenz der Bedingungen (N) und ($\bar{N}$) ist aber aus Martins Arbeit [2] bereits bekannt (vgl. dort Theorem 2).

2. Für $x, y \in l_\infty(A)$ seien $x \vee y$, $x \wedge y \in l_\infty(A)$ durch

$$(x \vee y)_\alpha = \max(x_\alpha, y_\alpha), \quad (x \wedge y)_\alpha = \min(x_\alpha, y_\alpha) \quad (\alpha \in A)$$

erklärt. Dann zeigt der soeben geführte Beweis, daß obiger Satz auch dann gilt, wenn man dort $l_\infty(A)$ durch einen abgeschlossenen, linearen Teilraum E von $l_\infty(A)$ ersetzt, aus welchem die Operationen $\vee$ und $\wedge$ nicht hinausführen. Insbesondere kann $E = C[a, b]$ der Raum der auf einem Intervall $[a, b]$ stetigen, reellwertigen Funktionen sein.

Daß sich der Satz von Müller nicht ohne weiteres auf beliebige geordnete Banachräume ausdehnen läßt, zeigt ein Gegenbeispiel in [6].

Literatur

[1] R. H. Martin, Jr., *Differential equations on closed subsets of a Banach space*, Trans. Amer. Math. Soc. 179 (1973), 399–414.

[2] —, *Approximation and existence of solutions to ordinary differential equations in Banach spaces*, Funkcial. Ekvac., Ser. Internac. 16 (1973), 195–211.

[3] —, *Nonlinear operators and differential equations in Banach spaces*, John Wiley & Sons, New York–London–Sydney–Toronto 1976.

[4] M. Müller, *Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Math. Z. 26 (1926), 619–645.

[5] M. Nagumo, *Über die Lage der Integralkurven gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Proc. Phys.-Math. Soc. Japan, III. Ser. 24 (1942), 551–559.

[6] P. Volkmann, *Ausdehnung eines Satzes von Max Müller auf unendliche Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen*, Funkcial. Ekvac., Ser. Internac. 21 (1978), 81–96.

[7] W. Walter, *On Max Müller's existence-comparison theorem for infinite systems of ordinary differential equations*, Ann. Polon. Math. 42 (1983), 395–401.

Reçu par la Rédaction le 16. 10. 1979