ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XVI (1965)

Propriété limite de la dérivée transversale de la matrice du potentiel généralisé de simple couche relatif au système parabolique

par S. CĄKAŁA (Warszawa)

1. Introduction. A. Piskorek (v. [2], (21)) a démontré qu'une combinaison linéaire de dérivées partielles d'ordre $M \geqslant 2$ du potentiel de simple couche à densité continue, dite dérivée transversale, donnée par la formule:

$$(1)\quad \big(D_{T_P}^{(M-1)} U(X,t)\big)_\alpha = \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{j_1,\dots,j_M=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_M}(X,t) \frac{\partial^{M-1} U_\beta(X,t)}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_{M-1}}} \cos(x_{j_M}, \overline{n}_P),$$

$$\alpha = 1, \dots, N$$

possède pour la variable du temps $t <$ const, la limite suivante:

$$(2)\quad \lim_{X\to P} D_{T_P}^{(M-1)}[U(X,t)] = -\tfrac{1}{2}\varphi(P,t) + \int_0^t \iint_S D_{T_P}^{(M-1)} \Gamma(P,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$

en tout point P de la surface S. Le point X tend vers le point P de la façon suivante:

$$(2a)\quad \lim_{X\to P} \frac{|PP_X|^{\varkappa}}{|XP_X|^{(M-2)(n-1)}} = 0, \quad \text{pour} \quad M > 2,$$

$\varkappa$ est l'exposant de Liapounoff (v. [2], (29)). P_X est le point de la surface S le plus rapproché du point $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Dans la formule (1), les fonctions $A_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_M}(X,t)$ désignent les coefficients du système parabolique:

$$(3)\quad (\hat{\psi} u)_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^{N} \sum_{k=0}^{M} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_k}(X,t) \frac{\partial^k u_\beta}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}} - \frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = 0$$

où $\hat{\varphi}$ désigne la matrice des opérateurs différentiels de ce système et u la colonne des N fonctions inconnues, c'est-à-dire:

(3a) $$\hat{\varphi} = \Big\{ \sum_{k=0}^{M} \sum_{j_1,\dots,j_k=1}^{n} A_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_k}(X,t) \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\dots\partial x_{j_k}} - \frac{\partial}{\partial t} E \Big\}, \qquad \alpha, \beta = 1, \dots, N,$$

$$E = \{\delta_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta=1,\dots,N}, \qquad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta, \\ 0, & \alpha \neq \beta, \end{cases} \qquad u = \{u_\alpha(X,t)\}_{\alpha=1,\dots,N}.$$

Le système (3) et ses coefficients vérifient les conditions (2)-(7), (v. [2], p. 171). D'après ces conditions les coefficients sont continus dans la couche $\Omega' \times [0 \times \infty]$, et ils sont soumis aux conditions de Hölder. Le système (3) est parabolique au sens de Petrowsky. La surface S remplit les conditions de Liapounoff. Ω' est une région de E_n contenant la région Ω avec son bord S. Dans la formule (1), $(x_{j_M}, \bar{n}_P)$ désigne l'angle entre l'axe x_{j_M} et la normale $\bar{n}_P$ dirigée vers le domaine Ω', dans lequel est situé le point X.

Le potentiel $U(X,t)$ de l'expression (2) est donné par l'intégrale:

(4) $$U(X,t) = \int_0^t \iint_S \Gamma(X,t;Q,\tau)\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau,$$

$U(X,t)$ est la colonne de N fonctions données par les intégrales de surface suivantes:

(4a) $$U_\alpha(X,t) = \int_0^t \iint_S \sum_{\beta=1}^{N} \Gamma_{\alpha\beta}(X,t;Q,\tau)\varphi_\beta(Q,\tau)\,dQ\,d\tau.$$

Dans la formule (2) intervient $\Gamma(X,t;Q,\tau)$, la matrice des solutions fondamentales du système (3), dont les éléments figurent dans la formule (4a) sous le signe de l'intégrale. Les N fonctions de la colonne $\varphi(Q,\tau) = \{\varphi_\alpha(Q,\tau)\}_{\alpha=1,\dots,N}$ dite densité de simple couche, sont déterminées, bornées et intégrables sur la surface S.

2. Nous allons examiner la limite de l'expression de la formule (2) pour $t \to \infty$. Dans ce but on admet que les limites:

(5) $$\lim_{t\to\infty} A_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_k}(X,t) = \hat{A}_{\alpha\beta}^{j_1,\dots,j_k}(X),$$

(6) $$\lim_{t\to\infty} \varphi_\beta(X,t) = \hat{\varphi}_\beta(X)$$

existent uniformément dans Ω', et aussi on admet le domaine d'intégration Ω' et les coefficients du système (3) assujettis aux inégalités suivantes:

$$\int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \sum_{\beta=1}^N \dot{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \xi)\,dY d\xi \leqslant b < 1\,, \tag{7}$$
$$\int_0^\theta \iiint_{\Omega'} \sum_{\beta=1}^N \dot{N}_{\beta\alpha}(X, Y, \xi)\,dX d\xi \leqslant b\,, \qquad \alpha = 1, \ldots, N\,,$$

pour toutes les valeurs $\theta \geqslant 0$ et $X \in \Omega$, $Y \in \Omega'$.

On déduit de la formule (7) que la région Ω' ne peut pas être grande. Les fonctions $\dot{N}_{\alpha\beta}(X, Y, \xi)$ forment la matrice des dominantes de noyaux d'un système d'équations intégrales de Volterra (v. [3], (2,2) et [1], (3,4)).

3. Etude des fonctions de la formule (2). Nous allons démontrer le

THÉORÈME. *Les hypothèses* (2)-(7) *de l'article* [2] *et les hypothèses* (5)-(7) *étant admises, nous avons pour* $n > M$:

$$\lim_{t\to\infty}\{\lim_{X\to P} D_{T_P}^{(M-1)}[U(X,t)]\} = -\tfrac{1}{2}\hat{\varphi}(P) + \iint_S D_{T_P}^{(M-1)}\hat{\Gamma}(P,Q)\hat{\varphi}(Q)dQ \tag{8}$$

où $\hat{\Gamma}(P,Q)$ *est la matrice* (v. [1], (1,7)), *des solutions du système elliptique limite des équations*:

$$(\hat{\psi}u)_\alpha \equiv \sum_{\beta=1}^N \sum_{k=0}^M \sum_{j_1,\ldots,j_k=1}^n \hat{A}_{\alpha\beta}^{j_1,\ldots,j_k}(X)\frac{\partial^k u_\beta}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_k}} = 0\,. \tag{9}$$

Démonstration. Soit S_K la partie de la surface S découpée par la sphère K de centre P et de rayon r_0. Décomposons pour $t > T$ l'intégrale de la formule (2) en sommes de 3 intégrales:

$$\int_0^t \iint_S \frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau = \int_0^{t-T}\iint_S \frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P}\varphi(Q,\tau)dQ\,d\tau + \tag{10}$$
$$+\int_{t-T}^t \iint_{S-S_K}\frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P}\varphi(Q,\tau)dQ\,d\tau + \int_{t-T}^t\iint_{S_K}\frac{d\Gamma(P,t;Q,\tau)}{dT_P}\varphi(Q,\tau)dQ\,d\tau$$
$$= J_1(P,t) + J_2(P,t) + J_3(P,t)\,, \qquad \left(\frac{d}{dT_P} = D_{T_P}^{(M-1)}\right).$$

Nous allons démontrer que:

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} J_1(P,t) = 0\,, \tag{11a}$$

$$\lim_{r_0\to 0}\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} J_2(P,t) = \iint_S \frac{d\hat{\Gamma}(P,Q)}{dT_P}\hat{\varphi}(Q)dQ\,, \tag{11b}$$

$$\lim_{r_0\to 0} J_3(P,t) = 0\,. \tag{11c}$$

D'après les formules (25), (26), (69) et (72') de l'article [3], nous avons:

$$(12)\quad J_1(P,t)$$
$$=\int_0^{t-T}\iint_S\left\{\frac{d[W^{Q,\tau}(P,t;Q,\tau)]}{dT_P}+\int_\tau^t\iiint_{\Omega'}\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\Big(N(Z,\theta;Q,\tau)+\right.$$
$$\left.+\int_\tau^\theta\iiint_{\Omega'}\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)N(\Pi,\xi;Q,\tau)d\Pi d\xi\Big)dZd\theta\right\}\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$
$$=i_1(P,t)+i_2(P,t)+i_3(P,t),$$

$\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)$ est la matrice des noyaux résolvants $\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(Z,\theta;\Pi,\xi)$ déterminés dans le travail [3], p. 252. Les éléments $N_{\alpha\beta}(Z,\theta;Q,\tau)$ (v. [3], (72)), de la matrice $N(Z,\theta;Q,\tau)$ du système d'équations intégrales de Volterra (v. [3], (22)), vérifient les inégalités:

$$(13a)\quad \begin{gathered}|N_{\alpha\beta}(Z,\theta;Q,\tau)|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu_1}|ZQ|^{n+M(1-\mu_1)-h_1}},\\ 1-\frac{h_1}{M}<\mu_1<1;\quad t-\tau<T_0=\text{const},\end{gathered}$$

$$(13b)\quad |N_{\alpha\beta}(Z,\theta;Q,\tau)|>\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{n/M}},\quad t-\tau>T_0\quad (\text{v. [1], (12,2)}).$$

$|ZQ|$ désigne la distance euclidienne des points Z et Q.

Les éléments de la matrice de la dérivée transversale de la quasi-solution admettent les limitations aux singularités faibles:

$$(14a)\quad \left|\frac{d[W^{Q,\tau}_{\alpha\beta}(P,t;Q,\tau)]}{dT_P}\right|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{\mu}|PQ|^{n+M-1-M\mu-\varkappa^*}},\quad \mu\in\left(1-\frac{\varkappa^*}{M},1\right);$$

(v. [2], (84)) et (v. [2], (22), (34)),

$$(14b)\quad \left|\frac{d[W^{Q,\tau}_{\alpha\beta}(P,t;Q,\tau)]}{dT_P}\right|<\frac{\text{const}}{(t-\tau)^{(n+M-1)/M}},\quad t-\tau>T_0.$$

Dans le travail [1], (v. (11,4) et (9,4)), H. Milicer-Grużewska a démontré les propriétés suivantes des intégrales de la matrice des noyaux résolvants:

L'intégrale

$$(15a)\quad \int_0^{t-T}d\theta'\iiint_{\Omega'}\sum_{\beta=1}^{N}|\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X,t;Y,\theta')|dY,\quad X\in\Omega,\ t>T,\ 0<\tau<t-T$$

converge vers zéro avec $1/T$, et l'intégrale

$$\int_{\tau}^{t} d\theta' \iiint_{\Omega'} \sum_{\beta=1}^{N} |\mathfrak{N}_{\alpha\beta}(X, t; Y, \theta')| dY, \qquad X \in \Omega,\ t-\tau = \theta \geqslant 0 \tag{15b}$$

existe uniformément pour chaque $\theta \geqslant 0$, $\alpha = 1, 2, \ldots, N$.

En profitant des limitations (13a)-(15b), nous allons démontrer la propriété (11a). Grâce à la limitation (14b) nous avons:

$$|i_1(P, t)| < \text{const} \int_0^{t-T} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{(n+M-1)/M}} \iint_S dQ \to 0; \qquad t, T \to \infty. \tag{16}$$

En décomposant l'intervalle d'intégration de la variable θ en deux intervalles: de τ à $(t+\tau)/2$ et de $(t+\tau)/2$ à t, et en tenant compte des limitations (13a)-(14b) nous avons:

$$\begin{aligned} |i_2(P, t)| &< \text{const} \int_0^{t-T} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{(n+M-1)/M}} \iint_S dQ \int_{\tau}^{(t+\tau)/2} \frac{d\theta}{(\theta-\tau)^{\mu_1}} \times \\ &\times \iiint_{\Omega'} \frac{dZ}{|ZQ|^{n+M(1-\mu_1)-h_1}} + \text{const} \int_0^{t-T} \frac{d\tau}{(t-\tau)^{n/M}} \iint_S dQ \int_{(t+\tau)/2}^{t} \frac{d\theta}{(t-\theta)^{\mu}} \times \\ &\times \iiint_{\Omega'} \frac{dZ}{|PZ|^{n-1+M(1-\mu)-\varkappa^*}} \to 0, \qquad \text{pour} \quad t, T \to \infty. \end{aligned} \tag{17}$$

Nous avons alors:

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} i_1(P, t) = 0, \tag{18}$$

$$\lim_{T\to\infty} \lim_{t\to\infty} i_2(P, t) = 0. \tag{19}$$

En décomposant dans la fonction $i_3(P, t)$ l'intervalle d'intégration par rapport à θ en deux intervalles: de τ à $(t+\tau)/2$ et de $(t+\tau)/2$ à t, et l'intervalle d'intégration par rapport à ξ en deux intervalles: de τ à $(\theta+\tau)/2$ et de $(\theta+\tau)/2$ à θ, nous avons alors:

$$\begin{aligned} i_3(P, t) = \int_0^{t-T} \iint_S \Bigg\{ &\int_{\tau}^{(t+\tau)/2} d\theta \iiint_{\Omega'} \frac{d[W^{Z,\theta}(P, t; Z, \theta)]}{dT_P} dZ \int_{\tau}^{\theta} d\xi \times \\ &\times \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(Z, \theta; \Pi, \xi) N(\Pi, \xi; Q, \tau) d\Pi + \\ + \int_{(t+\tau)/2}^{t} d\theta \iiint_{\Omega'} &\frac{d[W^{Z,\theta}(P, t; Z, \theta)]}{dT_P} dZ \left(\int_0^{(\tau+\theta)/2} + \int_{(\tau+\theta)/2}^{\theta} \right) d\xi \iiint_{\Omega'} \mathfrak{N}(Z, \theta; \Pi, \xi) \times \\ &\times N(\Pi, \xi; Q, \tau) d\Pi \Bigg\} \varphi(Q, \tau) dQ\, d\tau = j_1(P, t) + j_2(P, t) + j_3(P, t). \end{aligned} \tag{20}$$

Après avoir changé l'ordre des intégrations par rapport aux variables ξ et θ, resp. Π et Z, dans la fonction $j_1(P,t)$ et en tenant compte de (14b) nous avons:

$$(21)\quad |j_1(P,t)| < \text{const}\int_0^{t-T}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{(n+M-1)/M}}\iint_S dQ\int_\tau^{(t+\tau)/2} d\xi\times$$
$$\times\iiint_{\Omega'}|N(\Pi,\xi;Q,\tau)|\,d\Pi\int_\xi^{(t+\tau)/2} d\theta\iiint_{\Omega'}|\mathfrak{R}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,dZ\,.$$

Grâce à (15b) l'intégrale du noyau résolvant existe. En tenant compte de l'inégalité (13a) et après avoir intégré la variable τ on a:

$$(22)\qquad \lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} j_1(P,t) = 0\,.$$

Dans la fonction $j_3(P,t)$ l'accroissement des paramètres $\xi-\tau$ de la fonction $N(\Pi,\xi;Q,\tau)$ est:

$$\xi-\tau > \frac{\theta+\tau}{2}-\tau > \frac{t-\tau}{4} > \frac{T}{4}\,.$$

D'après (13b), $\xi-\tau > T/4$, on a:

$$(23)\quad |j_3(P,t)| < \text{const}\int_0^{t-T}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{n/M}}\iint_S dQ\int_{(t+\tau)/2}^{t} d\theta\times$$
$$\times\iiint_{\Omega'}\left|\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\right|dZ\int_{(\theta+\tau)/2}^{\theta} d\xi\iiint_{\Omega'}|\mathfrak{R}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,d\Pi\,.$$

Comme dans la formule (22) nous avons:

$$(24)\qquad \lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} j_3(P,t) = 0\,.$$

Pour $j_2(P,t)$ on a la décomposition:

$$(25)\quad j_2(P,t) = \int_0^{t-T}\iint_S\int_{(t+\tau)/2}^{t}\iiint_{\Omega'}\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dTp}\times$$
$$\times\left\{\int_\tau^{(t+3\tau)/4}+\int_{(t+3\tau)/4}^{(\tau+\theta)/2}\right\}\iiint_{\Omega'}\mathfrak{R}(Z,\theta;\Pi,\xi)N(\Pi,\xi;Q,\tau)\,d\Pi\, d\xi\, dZ\, d\theta\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau$$
$$= R_1(P,t)+R_2(P,t)\,.$$

L'accroissement $\xi-\tau$ dans la fonction $R_2(P,t)$ est $\xi-\tau > (t-\tau)/4 > T/4$.

On a donc:

$$(26)\qquad |R_2(P,t)| < \text{const}\int\limits_0^{t-T}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{n/M}}\iint\limits_S dQ\int\limits_{(t+\tau)/2}^{t} d\theta\,\times$$

$$\times\iiint\limits_{\Omega'}\left|\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\right|dZ\int\limits_{(t+3\tau)/4}^{(\tau+\theta)/2}d\xi\iiint\limits_{\Omega'}|\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,d\Pi\,.$$

En tenant compte de (15b) nous voyons que l'intégrale du noyau résolvant existe. A cause de l'inégalité (14a) les autres intégrales existent. Après avoir intégré par rapport à la variable τ nous avons:

$$(27)\qquad \lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} R_2(P,t) = 0.$$

En changeant dans la fonction $R_1(P,t)$ l'ordre des intégrations par rapport aux variables τ et θ, et ensuite par rapport à Q et Z, nous avons:

$$(28)\qquad R_1(P,t) = \int\limits_{t/2}^{t-T/2}d\theta\iiint\limits_{\Omega'}\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\,dZ\,\times$$

$$\times\int\limits_0^{2\theta-t}\iint\limits_S\int\limits_\tau^{(t+3\tau)/4}\iiint\limits_{\Omega'}\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)N(\Pi,\xi;Q,\tau)\,d\Pi\,d\xi\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau\,+$$

$$+\int\limits_{t-T/2}^{t}d\theta\iiint\limits_{\Omega'}\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\,dZ\int\limits_0^{t-T}\iint\limits_S\int\limits_\tau^{(t+3\tau)/4}\iiint\limits_{\Omega'}\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)\,\times$$

$$\times N(\Pi,\xi;Q,\tau)\,d\Pi\,d\xi\,\varphi(Q,\tau)\,dQ\,d\tau = R_{1,1}(P,t)+R_{1,2}(P,t)\,.$$

Changeons dans $R_{1,1}(P,t)$ l'ordre des intégrations par rapport à τ et ξ, et aussi par rapport à Π et Q. D'après (13a), (14b) et (15b) nous avons:

$$(29)\qquad \lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} R_{1,1}(P,t) = 0\,.$$

En changeant dans la fonction $R_{1,2}(P,t)$ l'ordre des intégrations par rapport à ξ et τ, et aussi par rapport à Q et Π, on obtient:

$$(30)\qquad |R_{1,2}(P,t)| < \text{const}\int\limits_{t-T/2}^{t}d\theta\iiint\limits_{\Omega'}\left|\frac{d[W^{Z,\theta}(P,t;Z,\theta)]}{dT_P}\right|dZ\,\times$$

$$\times\Bigg\{\int\limits_0^{t/4}d\xi\iiint\limits_{\Omega'}|\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,d\Pi\int\limits_0^{\xi}d\tau\iint\limits_S|N(\Pi,\xi;Q,\tau)|\,dQ\,+$$

$$+\int\limits_{t/4}^{t-T}d\xi\iiint\limits_{\Omega'}|\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,d\Pi\int\limits_{(4\xi-t)/3}^{\xi}d\tau\iint\limits_S|N(\Pi,\xi;Q,\tau)|\,dQ\,+$$

$$+\int\limits_{t-T}^{t-\frac{3}{4}T}d\xi\iiint\limits_{\Omega'}|\mathfrak{N}(Z,\theta;\Pi,\xi)|\,d\Pi\int\limits_{(4\xi-t)/3}^{t-T}d\tau\iint\limits_S|N(\Pi,\xi;Q,\tau)|\,dQ\Bigg\}\,.$$

En tenant compte de (13a)-(14b) et (15a), $\theta-\xi > T/4$, nous obtenons:

(31)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} R_{1,2}(P,t) = 0\,.$$

En vertu de la décomposition (28) et des formules (29) et (31) on a:

(32)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} R_1(P,t) = 0\,.$$

Les formules (27) et (32) dennent:

(33)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} j_2(P,t) = 0\,.$$

La décomposition (20) et les formules (22), (24) et (33) donnent:

(34)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} i_3(P,t) = 0\,.$$

En tenant compte de (12), (18), (19) et (34) on obtient:

(35)
$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} J_1(P,t) = 0\,.$$

Nous allons étudier la fonction $J_3(P,t)$ (v. (10)). En admettant $T > T_0 = \text{const}$, on décompose l'intervalle d'intégration de la variable τ, de $t-T$ à $t-T_0$ et de $t-T_0$ à t. Alors on obtient les intégrales $J_{3,1}(P,t)$ et $J_{3,2}(P,t)$. Dans la fonction $J_{3,2}(P,t)$ l'accroissement des paramètres $t-\tau < T_0$. On a (v. [2], p. 84), donc:

(36)
$$|J_{3,2}(P,t)| < \text{const}\int_{t-T_0}^{t}\frac{d\tau}{(t-\tau)^{\mu^*}}\iint_{S_k}\frac{dQ}{|PQ|^{n-1+M(1-\mu_*)-\varkappa^*}} \to 0\,, \qquad \text{pour} \quad r_0\to 0\,.$$

L'étude de l'intégrale $J_{3,1}(P,t)$ est analogue à la preuve de la formule (11a). L'intégrale $J_{3,1}(P,t)$ existe et converge vers zéro avec $r_0\to 0$, car $t-\tau > T_0$. A cause de cela et de la formule (36) on a:

(37)
$$\lim_{r_0\to 0} J_3(P,t) = 0\,.$$

Enfin nous allons étudier la fonction $J_2(P,t)$ de la formule (10). En posant $t-\tau=\theta$, $-d\tau = d\theta$, nous constatons que la variable θ est finie. La variable du temps t intervient seulement dans les coefficients de la solution Γ et dans la fonction $\varphi(Q,\tau)$. C'est pourquoi on peut passer à la limite pour $t\to\infty$ sous le signe de l'intégrale et aussi sous le signe de la dérivée transversale.

Alors

$$\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} J_2(P,t) = \lim_{T\to\infty}\int_0^T \int_{S-S_K} \frac{d[\hat{\Gamma}(P,Q,\theta)]}{dT_P}\hat{\varphi}(Q)\,dQ\,d\theta \tag{38}$$

$$= \iint_{S-S_K} \frac{d}{dT_P}\Big[\int_0^\infty \hat{\Gamma}(P,Q,\theta)\,d\theta\Big]\hat{\varphi}(Q)\,dQ$$

$$= \int_{S-S_K} \frac{d[\hat{\Gamma}(P,Q)]}{dT_P}\hat{\varphi}(Q)\,dQ$$

en vertu des résultats du travail [1], (v. (1,7)).

Pour obtenir la formule (11b), il faut passer à la limite pour $r_0\to 0$ (v. [1], (3,3)). On a alors:

$$\lim_{r_0\to 0}\lim_{T\to\infty}\lim_{t\to\infty} J_2(P,t) = \iint_S \frac{d[\hat{\Gamma}(P,Q)]}{dT_P}\hat{\varphi}(Q)\,dQ\,. \tag{39}$$

Les résultats (35), (37), (39) et (6) donnent la formule (8), c.q.f.d.

Travaux cités

[1] H. Milicer-Grużewska, *Propriété de la matrice du potentiel généralisé de simple couche du système parabolique d'équations*, Rend. Circ. Mat. Palermo, Serie II, 11 (1962), p. 1-25.

[2] A. Piskorek, *Propriété limite de la dérivée transversale du potentiel de simple couche relatif au système parabolique*, Ricerche di Mat. 11 (1962), p. 170-191.

[3] W. Pogorzelski, *Propriétés des solutions du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Math. Scand. 6 (1958), p. 237-262.

Reçu par la Rédaction le 5. 7. 1963