ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XIX (1967)

Bemerkungen über Zeichen der Elemente der Matrix der Grundlösungen für parabolische System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

von J. CHABROWSKI (Katowice)

§ 1. Wir betrachten das System von partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$(1.1)\qquad \Psi_{t,x}^{(i)}(u_1, \ldots, u_N) = \sum_{j=1,\ldots,N}^{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + \\ + \sum_{j=1,\ldots,N}^{|k|=1} B_{ij}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1,\ldots,N} C_{ij}(t,x)u_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0,$$

$i = 1, \ldots, N$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u_1, \ldots, u_N$ sind gesuchte Funktionen der unabhängigen Veränderlichen x, t. Die Koeffizienten des Systems (1.1) sind definiert im Gebiete $[0, T]\times E_n$, wo E_n n-dimensionalen Euklidischen Raum bezeichnet. (k) bezeichnet die Folge der ganzen, nichtnegativen Zahlen $(k_1, \ldots, k_n)$, $|k| = k_1 + \ldots + k_n$.

Wir nehmen folgende Voraussetzungen an:

I. Die Koeffizienten des Systems (1.1) sind beschränkt und stetig im Gebiete $[0, T]\times E_n$, und erfüllen Hölderbedingung hinsichtlich der Veränderlichen x, wobei die Koeffizienten bei Ableitungen zweiter Ordnung noch Hölderbedingung hinsichtlich Veränderlicher t erfüllen.

II. System (1.1) ist parabolisch im Sinne von Pietrowski, das heißt Realteile der Nullstellen λ_a der Gleichung

$$(1.2)\qquad \det_{i,j=1,\ldots,N}\Big\{\sum_{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t,x)(is_1)^{k_1}\ldots(is_n)^{k_n} - \delta_{ij}\lambda\Big\} = 0,$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases}0, & i\neq j,\\ 1, & i = j\end{cases}$$

erfüllen Ungleichungen

$$\operatorname{Re}(\lambda a) < -\delta, \qquad \delta > 0; \qquad a = 1, \ldots, N$$

für alle reelle $s_1, \ldots, s_n$, die Bedingung erfüllen

$$s_1^2 + \ldots + s_n^2 = 1\,,$$

sowie für alle $(t, x) \in [0, T] \times E_n$.

Die Voraussetzungen I und II garantieren die Existenz der Matrix der Grundlösungen $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$, $i, j = 1, \ldots, N$, $0 \leqslant \tau < t \leqslant T$, $x, \xi \in E_n$, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ ([3]).

Satz 1.1. *Sind die Voraussetzungen* I, II *erfüllt, ist* $\varphi(x)$ *eine dreimal differenzierbare Funktion im Raum* E_n, *wobei die Ableitungen dritter Ordnung beschränkt sind, so gilt für alle* $i \neq j$ *die folgende Formel*

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1.3}$$
$$= C_{ij}(t, x)\varphi(x) + \sum_{|k|=1} B_{ij}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}\varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}\varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}.$$

Beweis. Das Integral in der Formel (1.3) wird mit Hilfe der Taylorschen Formel umgestaltet:

$$\frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi \tag{1.4}$$
$$= \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \varphi(x)\, d\xi + \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)[\varphi(\xi) - \varphi(x)]\, d\xi$$
$$= \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \varphi(x)\, d\xi + \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \times$$
$$\times \left\{ \sum_{|l|=1}^{2} \frac{1}{l!} \left[(\xi_1 - x_1) \frac{\partial}{\partial z_1} + \ldots + (\xi_n - x_n) \frac{\partial}{\partial z_n} \right]^{(l)} \varphi(z) \Big|_{z=x} + R \right\} d\xi$$

wo R Lagrangesches Restglied bezeichnet, berechnet in einem Punkt auf der Verbindungsstrecke $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ und $(x_1, \ldots, x_n)$, $l! = l_1! \ldots l_n!$.

Aus den in der Note [1] (Formel (5.1)) und [2] (Formel (5'.3)) bewiesenen Formeln geht hervor, daß

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{k!(t-\tau)} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)(\xi_l - x_l)^k d\xi = A_{ij}^{(k)}(t, x),$$

$$(\xi - x)^k = \prod_{i=1}^{n} (\xi_i - x_i)^{k_i},$$

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)(\xi_l - x_l)\, d\xi = B_{ij}^{(k)}(t, x), \qquad k_s = \begin{cases} 0, & s \neq l\,, \\ 1, & s = l\,, \end{cases}$$

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)\, d\xi = C_{ij}(t, x), \qquad i \neq j.$$

Machen wir den Grenzübergang in (1.4) und benützten die letzten drei Formeln, so erhalten wir die Gleichungen (1.3).

§ 2. Mit Hilfe des Satzes (1.1) kann gewiße Sätze betreffs der Zeichen der Funktionen $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ für $i \neq j$ erhalten.

SATZ 2.1. *Die Koeffizienten des Systems* (1.1) *mögen die Voraussetzungen* I *und* II *erfüllen. Wenn bei fixierten $i \neq j$ für eine gewiße Folge $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ der Koeffizient $A_{ij}^{(k)}(t, x)$ nicht identisch gleich Null ist, so verändert die Funktion $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ das Zeichen.*

Beweis. Im Falle $C_{ij}(t, x) = 0$, $i, j = 1, \ldots, N$, entsteht folgende Gleichung

$$\int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) d\xi = 0, \qquad i, j = 1, \ldots, N, \ i \neq j .$$

Wenn die Funktion $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ das Zeichen nicht veränderte, dann wäre die Funktion stets nichtnegativ oder nichtpositiv für alle (t, x), (τ, ξ); $(t, x) \neq (\tau, \xi)$. Angesichts der vorhergehenden Gleichung hätten wir $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \equiv 0$. Aus der Note [1] (Formel (5.1)) geht $A_{ij}^{(k)}(t, x) \equiv 0$ hervor, was einen Widerspruch mit unseren Voraussetzungen ergibt. Setzen wir also vorus, daß nicht alle Koeffizienten $C_{ij}(t, x)$ gleich Null sind. Wir nehmen noch folgende Definitionen an:

durch (k^{ml}) werden wir die Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ bezeichnen, deren Elemente die Gestalt haben

$$k_p = \begin{cases} 0, & p \neq m \text{ und } p \neq l , \\ 1, & p = m \text{ oder } p = l , \end{cases} \qquad m \neq l ;$$

durch (k^{mm}) wird die Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ bezeichnet, deren Elemente die Gestalt haben

$$k_p = \begin{cases} 0, & p \neq m , \\ 2, & p = m ; \end{cases}$$

durch (k^{m}) werden wir die Folge $(k_1, \ldots, k_n)$ bezeichnen, deren Elemente die Gestalt haben

$$k_p = \begin{cases} 0, & p \neq m , \\ 1, & p = m . \end{cases}$$

Betrachten wir zuerst den Fall, wenn $(k_1, \ldots, k_n) = (k^{mm})$. Aus der Voraussetzung geht hervor, daß so ein Punkt (t^1, x^1) existiert, daß $A_{ij}^{(k^{mm})}(t^1, x^1) \neq 0$, $x^1 = (x_1^1, \ldots, x_n^1)$. Setzen wir zuerst vorus, daß $A_{ij}^{(k^{mm})}(t^1, x^1) > 0$. Wir beweisen, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$, $i \neq j$, weder immer nichtpositiv noch immer nichtnegativ sein kann. Wirklich, wenn für alle $(t, x) \neq (\tau, \xi)$, $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \leqslant 0$ wäre, so hätten wir angesichts der Note [1] (Formel 5.1))

$$A_{ij}^{(k^{mm})}(t, x) = \lim_{\tau \to t} \frac{1}{2(t-\tau)} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)(\xi_m - x_m)^2 d\xi \leqslant 0 ,$$

was unmöglich ist. Dagegen wäre immer $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0$, so substituieren wir, im Falle wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \leqslant 0$, in die Formel (1.3) die Funktion

$$f(\xi_m) = 1 + \cos^2(\xi_m - x_m^1) .$$

Es ensteht folgende Gleichung

$$\lim_{\tau\to t} \frac{1}{t-\tau} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) f(\xi_m) d\xi = C_{ij}(t,x) f(x_m) + B_{ij}^{(km)}(t, x) f'(x_m) + A_{ij}^{(kmm)}(t, x) f''(x_m) . \tag{2.1}$$

Die Grenze soll nichtnegativ sein, während im Punkte (t^1, x^1) diese Grenze gleich $2C_{ij}(t^1, x^1) - 2A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1) < 0$ ist, was unmöglich ist. Im Falle, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$, nehmen wir in der Formel (1.3) als $f(\xi_m)$ die Funktion

$$f(\xi_m) = \left[\frac{A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} - (\xi_m - x_m^1)^2\right] \varphi(\xi_m)$$

wo

$$\varphi(\xi_m) = \begin{cases} 1, & |\xi_m - x_m| \leqslant \delta/2 \\ 0, & |\xi_m - x_m| \geqslant \delta , \end{cases} \tag{2.2}$$

wobei $\varphi(\xi_m)$ unendlich differenzierbar ist und $0 \leqslant \varphi(\xi_m) \leqslant 1$. δ ist so angepasst, daß die Ungleichung entsteht

$$\frac{A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} - (\xi_m - x_m^1)^2 \geqslant 0 \quad \text{für} \quad |\xi_m - x_m| \leqslant \delta . \tag{2.3}$$

Offensichtlich $f(\xi_m) \geqslant 0$. Die Grenze in der Formel (2.1) ist im Punkt (t^1, x^1) gleich

$$\frac{A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} C_{ij}(t^1, x^1) - 2A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1) = -A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1) < 0 ,$$

was unmöglich ist.

Im zweiten Fall, wenn $A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1) < 0$ beweisen wir, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ weder immer nichtnegativ noch immer nichtpositiv sein kann. Wenn $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nichtnegativ wäre so hätten wir aus der Note [1] (Formel (5.1))

$$A_{ij}^{(kmm)}(t, x) = \lim_{\tau\to t} \frac{1}{2(t-\tau)} \int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)(\xi_m - x_m)^2 d\xi \geqslant 0 ,$$

was unmöglich ist. Daß die Funktion $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht immer nichtpositiv sein kann, beweisen wir wie vorher mit Hilfe der Formel (2.1). Im Falle, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$, kann man dabei die Funktion

$$f(\xi_m) = -\frac{3A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} + (\xi_m - x_m^1)^2 \geqslant 0$$

verwenden; wenn $C_{ij}(t^1, x^1) = 0$, so führt man die Funktion

$$f(\xi_m) = 1 + \cos(\xi_m - x_m^1) \geqslant 0$$

ein. Im Falle, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) < 0$, kann man zum Beispiel die Funktion

$$f(\xi_m) = \left[\frac{A_{ij}^{(kmm)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} - (\xi_m - x_m)^2\right]\varphi(\xi_m)$$

verwenden, wobei wir die Funktion $\varphi(\xi_m)$ mit Hilfe der Formel (2.2) definieren und die Konstante, in der Definition der Funktion $\varphi(x)$, so angepasst ist, damit die Ungleichung (2.3) entsteht. Betrachten wir weiter den Fall, wenn $(k_1, \ldots, k_n) = (k^{ml})$. Analog wie vorher beweisen wir, daß wenn $A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1) > 0$, so kann $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ weder immer nichtnegativ noch immer nichtpositiv sein. Wenn $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \leqslant 0$, so substituieren wir im Falle, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \geqslant 0$, in die Formel (1.3) die Funktion

$$f(\xi_m, \xi_l) = 1 + \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1) \geqslant 0 .$$

Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}(2.4)\quad & \lim_{\tau\to t}\frac{1}{t-\tau}\int \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) f(\xi_m, \xi_l)\, d\xi \\ &= C_{ij}(t, x) f(x_m, x_l) + B_{ij}^{(km)}(t, x) f'_{x_m}(x_m, x_l) + A_{ij}^{(kmm)}(t, x) f''_{x_m x_m}(x_m, x_l) + \\ &\quad + 2A_{ij}^{(kml)}(t, x) f''_{x_m x_l}(x_m, x_l) + A_{ij}^{(kll)}(t, x) f''_{x_l x_l}(x_m, x_l) + B_{ij}^{(kl)}(t, x) f'_{x_l}(x_m, x_l)\end{aligned}$$

wo $A_{ij}^{(kml)}(t, x) = A_{ij}^{(klm)}(t, x)$.

Diese Grenze soll nichtpositiv sein, während für (t^1, x^1) die Grenze gleich $C_{ij}(t^1, x^1) + 2A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1) > 0$ ist.

Im Falle, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) < 0$, kann man in der Formel (2.4) als $f(\xi_m, \xi_l)$

$$(2.5)\quad f(\xi_m, \xi_l) = \left[-\frac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} + \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1)\right]\varphi(\xi_m, \xi_l)$$

nehmen, wobei

$$\varphi(\xi_m, \xi_l) = 1, \quad \text{wenn} \quad -\frac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} \geqslant 1 ,$$

dagegen

$$(2.6)\qquad \varphi(\xi_m, \xi_l) = \begin{cases} 1, & [(\xi_m - x_m^1)^2 + (\xi_l - x_l^1)^2]^{1/2} \leqslant \delta/2 , \\ 0, & [(\xi_m - x_m^1)^2 + (\xi_l - x_l^1)^2]^{1/2} \geqslant \delta \end{cases}$$

wenn $-\dfrac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} < 1$: außerdem ist $\varphi(\xi_m, \xi_l)$ unendlich differenzierbar und $0 \leqslant \varphi(\xi_m, \xi_l) \leqslant 1$. δ ist angepasst, daß für $[(\xi_m - x_m^1)^2 + (\xi_l - x_l^1)^2]^{1/2} \leqslant \delta$ die Ungleichung

$$-\sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1) \leqslant -\frac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)}$$

entsteht. Offensichtlich $f(\xi_m, \xi_l) \geqslant 0$.

Ähnlich beweisen wir, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0$ nicht sein kann, denn widrigenfalls nehmen wir in der Formel (2.4) als $f(\xi_m, \xi_l)$ die Funktion

$$f(\xi_m, \xi_l) = 1 - \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1),$$

wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \leqslant 0$ und die Grenze in der Formel (2.4) würde im Punkte (t^1, x^1) gleich $C_{ij}(t^1, x^1) - 2A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1) < 0$ sein, was unmöglich ist. Wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$, genügt es in der Formel (2.4) als $f(\xi_m, \xi_l)$ die Funktion

$$(2.7) \qquad f(\xi_m, \xi_l) = \left[\frac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} - \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1)\right]\varphi(\xi_m, \xi_l)$$

anzunehmen, wo $\varphi(\xi_m, \xi_l) = 1$, wenn $\dfrac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} \geqslant 1$; dagegen, wenn $\dfrac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)} < 1$, wird $\varphi(\xi_m, \xi_l)$ mit Hilfe der Formel (2.6) definiert, wobei δ so angepasst ist, damit für $[(\xi_m - x_m^1)^2 + (\xi_l - x_l^1)^2]^{1/2} \leqslant \delta$ ein Ungleichung entsteht

$$\sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1) \leqslant \frac{A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1)}{C_{ij}(t^1, x^1)}.$$

Im letzeten Falle, wenn $A_{ij}^{(kml)}(t^1, x^1) < 0$, beweisen wir zuerst, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht immer nichtnegativ sein kann. Zu diesem Zwecke nehmen wir

$$f(\xi_m, \xi_l) = 1 + \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1) \geqslant 0$$

an, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \leqslant 0$, und die Funktion $f(\xi_m, \xi_l)$ wird mittelst der (2.5) und (2.6) definiert, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$. Weiter beweisen wir, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht durchweg nichtpositiv sein kann; dafür nehmen wir

$$f(\xi_m, \xi_l) = 1 - \sin(\xi_m - x_m^1)\sin(\xi_l - x_l^1)$$

an, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \geqslant 0$ und die Funktion $f(\xi_m, \xi_l)$ wird mit Hilfe der Formel (2.7) definiert, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) < 0$.

Mit derselben Methode kann man ähnlichen Satz erhalten betreffs der Koeffizienten $B_{ij}^{(k)}(t, x)$.

Satz 2.2. *Die Koeffizienten des Systems* (1.1) *mögen die Voraussetzungen* I, II *erfüllen. Wenn bei fixiertem $i \neq j$ für eine gewiße Folge $(k) = (k_1, \ldots, k_n)$ der Koeffizient $B_{ij}^{(k)}(t, x)$ nicht identisch gleich Null ist, so verändert die Funktion $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ das Zeichen.*

Beweis. Sei $B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1) > 0$. Wir beweisen, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ weder immer nichtpositiv noch immer nichtnegativ sein kann. Setzen wir voraus, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \leqslant 0$. Im Falle wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \geqslant 0$, substituieren wir in der Formel (2.1) die Funktion

$$f(\xi_m) = 1 + \sin(\xi_m - x_m^1) \geqslant 0$$

und die Grenze im Punkte (t^1, x^1) ist gleich $C_{ij}(t^1, x^1) + B^{(km)}(t^1, x^1) > 0$, was unmöglich ist. Wenn dagegen $C_{ij}(t^1, x^1) < 0$, so substituieren wir in der Formel (2.1) die Funktion

$$f(\xi_m) = \left[-\frac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} + \sin(\xi_m - x_m^1) \right] \varphi(\xi_m) \tag{2.8}$$

mit $\varphi(\xi_m) = 1$, wenn $-\dfrac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} \geqslant 1$, dagegen

$$\varphi(\xi_m) = \begin{cases} 1, & |\xi_m - x_m^1| \leqslant \delta/2, \\ 0, & |\xi_m - x_m^1| \geqslant \delta, \quad \delta > 0, \end{cases} \tag{2.9}$$

wenn $-\dfrac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} < 1$, wobei $\varphi(\xi_m)$ unendlich differenzierbar ist und $0 \leqslant \varphi(\xi_m) \leqslant 1$. Die Konstante δ ist so angepasst, damit für $|\xi_m - x_m^1| \leqslant \delta$ eine Ungleichung

$$-\sin(\xi_m - x_m^1) \leqslant -\frac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)}$$

entsteht. Die Grenze in der Formel (2.1) ist im Punkte (t^1, x^1) gleich

$$-\frac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} C_{ij}(t^1, x^1) + B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1) = \tfrac{1}{2} B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1) > 0$$

was unmöglich ist. Für den Beweis, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht immer nichtnegativ sein kann, kann man die Funktion

$$f(\xi_m) = 1 - \sin(\xi_m - x_m) \geqslant 0 \tag{2.10}$$

verwenden, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \leqslant 0$, und die Funktion

$$f(\xi_m) = \left[\frac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} - \sin(\xi_m - x_m^1) \right] \varphi(\xi_m) \tag{2.11}$$

wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$, wo $\varphi(\xi_m) = 1$, wenn $\dfrac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} \geqslant 1$, dagegen wird die Funktion $\varphi(\xi_m)$ mittelst der Formel (2.9) definiert wenn $\dfrac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)} < 1$, wobei die Konstante δ so angepasst ist, damit eine Ungleichung

$$\sin(\xi_m - x_m^1) \leqslant \frac{B_{ij}^{(km)}(t^1, x^1)}{2C_{ij}(t^1, x^1)}$$

für $|\xi_m - x_m^1| \leqslant \delta$ entsteht. Endlich betrachten wir den Fall $B_{ij}^{(k^m)}(t^1, x^1) < 0$ und beweisen zuerst, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht immer nichtnegativ sein kann. Hier kann man die Funktion

$$f(\xi_m) = 1 + \sin(\xi_m - x_m^1)$$

verwenden, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \leqslant 0$. Wenn $C_{ij}(t^1, x^1) > 0$, so kann man sich zum Beispiel der in den Formeln (2.8), (2.9) definierten Funktion bedienen. Dagagen für den Beweis, daß $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ nicht immer nichtpositiv sein kann, kann man sich der in der Formel (2.10) definierten Funktion bedienen, wenn $C_{ij}(t^1, x^1) \geqslant 0$, und man verwendet die Funktion $f(\xi_m)$ aus der Formel (2.11), wenn $C_{ij}(t^1, x^1) < 0$.

Aus den Sätzen 2.1 und 2.2 kann man nachstehende Folgerung ziehen:

FOLGERUNG 2.1. *Wenn die Koeffizienten des Systems* (1.1) *die Voraussetzungen* I, II *erfüllen und wenn bei fixierten $i \neq j$ bei gewißem (k) wenigstens einer von den Koeffizienten $A_{ij}^{(k)}(t, x)$, $B_{ij}^{(k)}(t, x)$ nicht identisch gleich Null ist, so verändert $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ das Zeichen.*

Aus der Formel (1.3) in dem Satz 1.1 geht hervor:

FOLGERUNG 2.2. *Sind die Voraussetzungen* I, II *erfüllt, ist $\varphi(x)$ eine dreimal differenzierbare Funktion im Raum E_n, wobei die Ableitungen dritter Ordnung beshränkt sind, dann gilt für $i = 1, \ldots, N$ folgende Formel*

$$\lim_{\tau \to t} \frac{1}{t-\tau} \int \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi \tag{2.12}$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}} C_{ij}(t, x) \varphi(x) + \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}}^{|k|=1} B_{ij}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|} \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + $$

$$+ \sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}}^{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|} \varphi(x)}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} .$$

Analog wie vorher beweisen wir

SATZ 2.3. *Wir setzen voraus daß die Koeffizienten des Systems* (1.1) *die Voraussetzungen* I, II *erfüllen. Wenn für einen fixierten Index i ($i = 1, \ldots, N$) bei gewißem (k) mindestens eine der Summen $\sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}} A_{ij}^{(k)}(t, x)$, $\sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq i}} B_{ij}^{(k)}(t, x)$ nicht identisch gleich Null ist, muß die Summe $\sum_{\substack{j=1,\ldots,N \\ j \neq 1}} \Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$ das Zeichen ändern.*

§ **3.** Man kann ein Beispiel des Systems angeben, für welches alle Elemente der Matrix der Grundlösungen nichtnegativ sind. Es soll ein parabolisches System im Sinne von Pietrowski gegeben werden:

$$\begin{aligned}(3.1)\qquad & \Psi^{(i)}_{t,x}(u_1, \dots, u_N) \\ &= \sum^{|k|=2} C^{(k)}_{ii} \frac{\partial^{|k|} u_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1,\dots,N} C_{ij}(t,x) u_j - \frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \qquad i = 1, \dots, N .\end{aligned}$$

In diesem System sind die Koeffizienten $C^{(k)}_{ii}$ konstant. Die übrigen Koeffizienten bei Ableitungen zweiter Ordnung und alle Koeffizienten bei Ableitungen erster Ordnung sind gleich Null. Wir setzen voraus, daß $C_{ij}(t, x)$ stetig, beschrankt in $[0, T] \times E_n$ sind und Hölderbedingung hinsichtlich x erfüllen.

Satz 3.1. *Alle Elemente der Matrix der Grundlösungen für das System* (3.1) *sind nichtnegativ, wenn* $C_{ij}(t, x) \geqslant 0$, $i, j = 1, \dots, N$.

Beweis. In Übereinstimmung mit der Definition der Matrix der Grundlösungen nach W. Pogorzelski [3] haben wir

$$\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) = W^{\tau,y}_{ij}(t, x; \tau, y) + \int_\tau^t d\zeta \int \sum_{k=1}^{N} W^{\zeta,z}_{ik}(t, x; \zeta, z) \Phi_{kj}(\zeta, z; \tau, y)\, dz ,$$

$W^{\tau,y}_{ij}(t, x; \tau, y)$, $i, j = 1, \dots, N$, bilden die Matrix der Quasilösungen $\Phi_{sr}(t, x; \tau, y)$ sind Lösungen der folgenden Systems von Volterraschen Integralgleichungen $s = 1, \dots, N$ (r fixiert):

$$\begin{aligned}(3.2)\qquad & \Phi_{sr}(t, x; \tau, y) \\ &= \Psi^{(s)}_{(j)t,x}[W^{\tau,y}_{jr}(t, x; \tau, y)] + \int_\tau^t d\zeta \int \sum_{l=1}^{N} \Psi^{(s)}_{(j)t,x}[W^{\zeta,z}_{jl}(t, x; \zeta, z)] \Phi_{lr}(\zeta, z; \tau, y)\, dz ,\end{aligned}$$

wo $\Psi^{(s)}_{(j)t,x}(W_{jr})$ den für die Folge $(W^{\tau,y}_{1r}, \dots, W^{\tau,y}_{Nr})$ berechneten Differentialoperator (3.1) bezeichnet. Jede quadratische Form $\sum^{|k|=2} C_{ii} s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$ ist positiv definit und jede Gleichung

$$(3.3)\qquad \frac{\partial \vartheta_i}{\partial t} = \sum^{|k|=2} C_{ii} \frac{\partial^{|k|} \vartheta_i}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

hat die Grundlösung. Unsere Matrix der Quasilösungen hat die Gestalt

$$(3.4)\qquad W^{\zeta,z}_{ii}(t, x; \tau, y) = W_{ii}(t, x; \tau, y), \qquad W^{\zeta,z}_{ij}(t, x; \tau, y) = 0$$

für $i \neq j$. Das System von Integralgleichungen (3.2) kann man in der Gestalt schreiben:

$$\Phi_{sr}(t, x; \tau, y)$$
$$= C_{sr}(t, x) W_{rr}(t, x; \tau, y) + \int_\tau^t d\zeta \int \sum_{l=1}^N C_{sl}(t, x) W_{ll}(t, x; \zeta, z) \Phi_{lr}(\zeta, z; \tau, y)\, dz ,$$

$s = 1, \ldots, N$, r fixiert.

Die Lösung des Systems von Integralgleichungen kann man mit folgenden Formeln beschreiben:

$$\Phi_{sr}(t, x; \tau, y) = f_{sr}(t, x; \tau, y) + \int_\tau^t d\zeta \int \sum_{j=1}^N \mathfrak{N}_{sj}(t, x; \zeta, z) f_{jr}(\zeta, z; \tau, y)\, dz ,$$

wobei

$$\mathfrak{N}_{sj}(t, x; \zeta, z) = \sum_{\nu=0}^\infty N_{sj}^{(\nu)}(t, x; \zeta, z) \qquad (N_{sj}^{(0)} = N_{sj}) ,$$

$$N_{sj}^{(\nu+1)}(t, x; \zeta, z) = \sum_{l=1}^N \int_\zeta^t d\vartheta \int N_{sl}(t, x; \vartheta, u) N_{lj}^{(\nu)}(\vartheta, u; \zeta, z)\, du ,$$

$$N_{sl}(t, x; \zeta, z) = \Psi_{(j)t,x}^{(s)}[W_{jl}^{\zeta,z}(t, x; \zeta, z)] ,$$

$$f_{sl}(t, x; \tau, y) = \Psi_{(j)t,x}^{(s)}[W_{jl}^{\tau,y}(t, x; \tau, y)] .$$

Aus den Formeln (3.4) geht hervor, daß die Quasilösungen nichtnegativ sind, also $N_{sl}(t, x; \zeta, z)$ und $f_{sl}(t, x; \tau, y)$ nichtnegativ sind. Daraus ergibt sich, daß $\Phi_{sr}(t, x; \tau, y)$ für alle s, r nichtnegativ sind, und das heißt $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, y) \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, N$.

Der Satz 3.1 widerspricht nicht den Sätzen 2.1 und 2.2 weil wir im Satz 3.1 vorausgesetzt haben daß alle Koeffizienten bei Ableitungen erster und zweiter Ordnung für $i \neq j$ identisch gleich Null sind.

§ 4. Die Elemente, welche auf der Hauptdiagonale der Matrix der Grundlösungen liegen, können — für spezielle parabolische Systeme — Grundlösungen gewöhnlicher parabolischer Gleichungen sein und daher sind sie nichtnegativ.

Betrachten vir folgendes parabolisches System im Sinne von Pietrowski:

$$(4.1) \qquad \frac{\partial u_j}{\partial t} = \sum_{j \leqslant l \leqslant N}^{|k|=2} A_{jl}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|} u_l}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{j \leqslant l \leqslant N}^{|k|=1} B_{jl}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|} u_l}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}} ,$$

$j = 1, \ldots, N$.

Wie immer setzen wir voraus, daß die Koeffizienten stetig und beschränkt in $[0, T] \times E_n$ sind und die Hölderbedingung hinsichtlich x erfüllen; die Koeffizienten bei Ableitungen zweiter Ordnung sollen die Hölderbedingung auch hinsichtlich t erfüllen.

Die Gleichung von Pietrowski für das System (4.1) hat die Gestalt:

$$\prod_{j=1}^{N}\Big(\sum_{|k|=2} A_{jj}^{(k)}(t, x) s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n} + \lambda\Big) = 0 \ .$$

Daraus geht hervor, daß jede Form $\sum_{|k|=2} A_{jj}^{(k)}(t, x) s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$ positiv definit ist. Also jede Gleichung

$$(4.2) \qquad \frac{\partial \vartheta_j}{\partial t} = \sum_{|k|=2} A_{jj}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}\vartheta_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}} + \sum_{|k|=1} B_{jj}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}\vartheta_j}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$$

ist parabolisch im gewöhnlichen Sinne. Über die Matrix der Grundlösungen für das System (4.1) beweisen wir folgenden

SATZ 4.1. *Die Funktion $\Gamma_{jj}(t, x; \tau, \xi)$ ist die Grundlösung der Gleichung* (4.2), $j = 1, \dots, N$. *Dagegen sind die Funktionen $\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi)$, $i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, i-1$, identisch gleich Null.*

Beweis. Betrachten wir das Cauchysche Problem

$$u_1(\tau, x) = 0, \quad \dots, \quad u_{i-1}(\tau, x) = 0 \ ,$$
$$u_i(\tau, x) = \varphi(x), \quad u_{i+1}(\tau, x) = 0, \dots, u_N(\tau, x) = 0 \ ,$$

wo $\varphi(x)$ eine stetige und beschränkte Funktion ist. Die Lösung dieses Problems hat Gestalt:

$$u_1(t, x) = \int \Gamma_{1i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad u_2(t, x) = \int \Gamma_{2i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad \dots,$$
$$u_N(t, x) = \int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi \ .$$

Insbesondere erfüllt die letzte Funktion eine gewöhnliche parabolische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi\Big]$$
$$= \sum_{|k|=2} A_{NN}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\Big[\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi\Big] +$$
$$+ \sum_{|k|=1} B_{NN}^{(k)}(t, x) \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}\Big[\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi) d\xi\Big]$$

und die Anfangsbedingung

$$\lim_{t\to\tau}\Big[\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Big] = \delta_{iN}\varphi(x),$$

$$\delta_{iN} = \begin{cases} 0, & i \neq N, \\ 1, & i = N, \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Aus dem Maximumprinzip für parabolische Gleichungen geht hervor, daß wenn $\varphi(x) \geqslant 0$, so $\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi \geqslant 0$. Daraus ergibt sich, daß $\Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi) \geqslant 0$. Es ist bekannt, daß

$$\int \Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi)\,d\xi = 0, \qquad i = 1, \ldots, N-1$$

und folglich

$$\Gamma_{Ni}(t, x; \tau, \xi) = 0, \qquad i = 1, \ldots, N-1.$$

Setzen wir voraus, daß

$$\Gamma_{ij}(t, x; \tau, \xi) = 0$$

für $i = 1, \ldots, N-k$, $j = 1, \ldots, N-k-1$, $2 < k \leqslant N-3$.

Wir beweisen, daß

$$\Gamma_{N-k-1,j}(t, x; \tau, \xi) = 0 \qquad \text{für} \qquad j = 1, \ldots, N-k-2.$$

Zu diesem Zwecke betrachten wir das Cauchysche Problem

$$u_1(\tau, x) = 0, \quad \ldots, \quad u_{i-1}(\tau, x) = 0, \quad u_i(\tau, x) = \varphi(x),$$
$$u_{i+1}(\tau, x) = 0 \quad \ldots, \quad u_N(\tau, x) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant N-k-1.$$

Die Lösung hat die Gestalt:

$$u_1(t, x) = \int \Gamma_{1i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad u_2(t, x) = \int \Gamma_{2i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad \ldots,$$
$$u_{N-k-1}(t, x) = \int \Gamma_{N-k-1,i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi, \quad u_{N-k}(t, x) = 0, \quad \ldots,$$
$$u_N(t, x) = 0.$$

Insbesondere erfüllt die Funktion $u_{N-k-1}(t, x)$ die parabolische Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big[\int \Gamma_{N-k-1,i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Big]$$
$$= \sum^{|k|=2} A^{(k)}_{N-k-1,N-k-1}(t, x)\,\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Big[\int \Gamma_{N-k-1,i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Big] +$$
$$+ \sum^{|k|=2} B^{(k)}_{N-k-1,N-k-1}(t, x)\,\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}\Big[\int \Gamma_{N-k-1,i}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi\Big]$$

und die Anfangsbedingung

$$\lim_{t\to\tau}\int \Gamma_{N-k-1,i}(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \delta_{i,N-k-1}\varphi(x)\,,$$
$$\delta_{i,N-k-1} = \begin{cases} 0, & i \neq N-k-1,\\ 1, & i = N-k-1.\end{cases}$$

Diese Lösung ist nichtnegativ für jede nichtnegative, stetige und beschränkte Funktion $\varphi(x)$, also $\Gamma_{N,k-1,i}(t,x;\tau,\xi) \geqslant 0$, $1 \leqslant i \leqslant N-k-1$.

Weil

$$\int \Gamma_{N-k-1,i}(t,x;\tau,\xi)\,d\xi = 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1,\ldots,N-k-2\,,$$

so ist

$$\Gamma_{N-k-1,i}(t,x;\tau,\xi) = 0 \qquad \text{für} \qquad i = 1,\ldots,N-k-2\,.$$

Es ist bekannt, daß jede Kolonne der Matrix der Grundlösungen das System (4.1) erfüllt. Wenn wir also insbesondere die Kolonne von dem Index j in die Gleichung von dem Index j, substituieren dann erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial t}[\Gamma_{jj}(t,x;\tau,\xi)] = \sum^{|k|=2} A_{jj}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}[\Gamma_{jj}(t,x;\tau,\xi)] + \\ + \sum^{|k|=1} B_{jj}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}}[\Gamma_{jj}(t,x;\tau,\xi)]\,.$$

$\Gamma_{jj}(t,x;\tau,\xi)$ hat außerdem dieselben Eingenschaften wie gewöhnliche Grundlösung. Angesichts der Eindentigkeit ist $\Gamma_{jj}(t,x;\tau,\xi)$ die Grundlösung der Gleichung (4.2) von dem Index j.

Ein anderes Beispiel dafür, daß die Funktion auf der Hauptdiagonale eine gewöhnliche Grundlösung sein kann ist das System:

$$(4.3)\qquad \frac{\partial u_i}{\partial t} = \sum_{j=1,\ldots,N}^{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + \sum_{j=1,\ldots,N}^{|k|=1} B_{ij}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}u_j}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + \\ + \sum_{j=1,\ldots,N} C_{ij}(t,x)u_j \qquad (i = 1,\ldots,N)\,.$$

Setzen wir voraus, daß die Voraussetzungen I und II vom § 1 erfüllt sind.

SATZ 4.2. *Wenn $A_{sr}^{(k)}(t,x) = 0$, $B_{sr}^{(k)}(t,x) = 0$, $C_{sr}(t,x) = 0$ für $s = 1,\ldots,r-1,r+1,\ldots,N$ (r fixiert $1 \leqslant r \leqslant N$) und für alle (k), so ist $\Gamma_{sr}(t,x;\tau,\xi) = 0$ für $s = 1,\ldots,r-1,\ r+1,\ldots,N$, dagegen ist $\Gamma_{rr}(t,x;\tau,\xi)$ die Grundlösung für die parabolische Gleichung*:

$$(4.5)\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \sum^{|k|=2} A_{rr}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}\vartheta}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + \\ + \sum^{|k|=1} B_{rr}^{(k)}(t,x)\frac{\partial^{|k|}\vartheta}{\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_n^{k_n}} + C_{rr}(t,x)\vartheta\,.$$

Beweis. Die Gleichung von Pietrowski hat folgende Gestalt:

$$\Big(\sum_{|k|=2} A_{rr}^{(k)}(t, x) s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n} + \lambda\Big) \det\Big\{\sum^{|k|=2} A_{ij}^{(k)}(t, x)(is_1)^{k_1} \dots (is_n)^{k_n} - \delta_{ij}\lambda\Big\} = 0,$$

$$i = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, N.$$

Daraus geht hervor, daß die Form $\sum_{|k|=2} A_{rr}^{(k)}(t, x) s_1^{k_1} \dots s_n^{k_n}$ positiv definit ist, also die Gleichung (4.5) parabolisch ist. Die Voraussetzung I garantiert gleichfalls die Existenz der Grundlösung $\Gamma(t, x; \tau, \xi)$ für die Gleichung (4.5). Betrachten wir das Cauchysche Problem für des System (4.3)

$$u_1(\tau, x) = 0, \quad \dots, \quad u_{i-1}(\tau, x) = 0, \quad u_i(\tau, x) = \varphi(x),$$
$$u_{i+1}(\tau, x) = 0, \quad \dots, \quad u_N(\tau, x) = 0$$

wobei $\varphi(x)$ eine stetige, beschränkte Funktion ist. Diese Lösung kann man in der Gestalt der darstellen

$$u_1(t, x) = \int \Gamma_{1r}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi, \quad \dots, \quad u_N(t, x) = \int \Gamma_{Nr}(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi.$$

Anderseits hat die Lösung dieses Problems die Gestalt

$$u_1(t, x) = 0, \quad \dots, \quad u_{r-1}(t, x) = 0, \quad u_r(t, x) = \int \Gamma(t, x; \tau, \xi)\varphi(\xi)d\xi,$$
$$u_{r+1}(t, x) = 0, \quad \dots, \quad u_N(t, x) = 0.$$

Wegen der Eindentigkeit haben wir:

$$\Gamma_{jr}(t, x; \tau, \xi) = 0, \quad j = 1, \dots, r-1, r+1, \dots, N$$
$$\Gamma_{rr}(t, x; \tau, \xi) = \Gamma(t, x; \tau, \xi).$$

Literaturverzeichnis

[1] H. Milicer-Grużewska, *Quelques propriétés des solutions fondamentales du système parabolique d'équations*, Publ. Sém. Géom. Univ. Neuchâtel, S. I, 3 (1963).

[2] — *Recherches sur les propriétés de la solution du système parabolique d'équations*, Memorie Accad. Scienze, Torino, S. 3. T. 4, P. I, n. 5. (1960), S. 257-280.

[3] W. Pogorzelski, *Etude de la matrice des solutions fondamentales du système parabolique d'équations aux dérivées partielles*, Ricerche Mat. 7 (1958), S. 153-185.

Reçu par la Rédaction le 26. 2. 1966