ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXVI (1972)

Априорные оценки решений краевых задач для систем линейных многомерных разностных уравнений

Зенон Шода (Варшава)

В настоящей статье приводится теорема о априорных оценках нормы решения разностной краевой задачи через нормы правой стороны системы и правой стороны граничных условий для задач рассматриваных в [1]. Приведены оценки независят от шага сетки.

I. Определения. Пусть множество

$$D = \{X : X = (x^1, \ldots, x^n),\ a^j \leqslant x^j \leqslant b^j \ \text{ для } j = 1, \ldots, n\}$$

принадлежит n-мерному вещественному пространству R^n и пусть будет дано n-мерное множество

$$\mathfrak{M} = \{k : k = (k_1, \ldots, k_n),\ k_j = 0, 1, \ldots, N_j \text{ для } j = 1, \ldots, n\}.$$

Вводя обозначения: $X_0 = (a^1, \ldots, a^n)$, $h_j = (b^j - a^j)/N_j$ для $j = 1, \ldots, n$, e_j n-мерный вектор с j-той координатой равной 1 а остальными равными 0, определим множество

$$D_h = \{X_k : X_k \in D,\ X_{k+e_j} - X_k = e_j h_j,\ k, k+e_j \in \mathfrak{M} \text{ для } j = 1, \ldots, n\},$$

множество граничных точек Γ_h множества D_h

$$\Gamma_h = \{X_k : X_k \in D_h,\ k_j = 0 \text{ либо } k_j = N_j \text{ для } j = 1, \ldots, n\}$$

и множество

$$\mathfrak{M}_0 = \{k : X_k \in \Gamma_h\}.$$

Введём следующие обозначения $H = h_1 h_2 \ldots h_n$,

$$H' = \begin{cases} h_1 \ldots h_{j-1} h_{j+1} \ldots h_n & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h \text{ для которых } k_j = 0, \\ -h_1 \ldots h_{j-1} h_{j+1} \ldots h_n & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h \text{ для которых } k_j = N_j. \end{cases}$$

Пусть дальше

$$u_k = \begin{bmatrix} u_k^1 \\ \vdots \\ u_k^p \end{bmatrix}, \quad F_k = \begin{bmatrix} f_k^1 \\ \vdots \\ f_k^p \end{bmatrix}, \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} \varphi_k^1 \\ \vdots \\ \varphi_k^{pq} \end{bmatrix},$$

где p, q — натуральные числа, u_k^i — функции определены на множестве

D_h, f_k^i — функции определены на множестве $D_A \subset D_h$, φ_k^i — функции определены на множестве Γ_h.

Обозначим через $\pi^r(\Omega_h)$ унитарное пространство всех r-мерных вектор-функций определеных на множестве Ω_h с скалярным произведением

$$(1.1)\qquad (v, u)_{\mathfrak{M}_\Omega} = H \sum_{k \in \mathfrak{M}_\Omega} v_k^* u_k \quad \text{для } v_k, u_k \in \pi^r(\Omega_h),$$

где $v_k^* = (v_k^1, \ldots, v_k^r)$, $\mathfrak{M}_\Omega = \{k : X_k \in \Omega_h\}$.

Дальше мы будем употреблять пространства типа $\pi^r(\Omega_h)$ следующего вида:

$$\pi^p(D_h), \quad \pi^p(D_A), \quad \pi^{pq}(\Gamma_h).$$

В пространстве $\pi^p(D_h)$ можно определить линейный разностный оператор следующего вида

$$(1.2)\qquad Au_k = \sum_{\alpha, \beta, \alpha', \beta' \in \mathfrak{N}} D_\beta^\alpha A_{\beta:\beta'}^{\alpha:\alpha'} D_{\beta'}^{\alpha'} u_k \quad \text{для } u_k \in \pi^p(D_h),$$

здесь $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha' = (\alpha_1', \ldots, \alpha_n')$, $\beta' = (\beta_1', \ldots, \beta_n')$, α_j, β_j, α_j', β_j' для $j = 1, \ldots, n$ принимают целые неотрицательные значения.

Множество $\mathfrak{N}$ определяется следующим образом

$$\mathfrak{N} = \{\alpha, \beta, \alpha', \beta';\ \alpha+\beta+\alpha'+\beta' = \gamma,\ \alpha+\beta-\alpha'-\beta' = \bar{\gamma},$$
$$\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n), \bar{\gamma} = (\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_n),\quad 0 \leqslant \gamma_j \leqslant 2q_j,\ 0 \leqslant \bar{\gamma}_j \leqslant 1\};$$

q_j — для $j = 1, \ldots, n$ фиксированные натуральные числа, $A_{\beta:\beta'}^{\alpha:\alpha'}$ являются квадратными матрицами порядка p, столбцы которых принадлежат к пространству $\pi^p(D_h)$. Предполагаем, в след за [1], что существуют такие матрицы $A_{\beta:\beta}^{\alpha:\alpha} \neq \theta$ (¹) (θ — нулевая матрица порядка p) при $X_k \in D_h$, для которых существуют системы векторов α, β, α', β' таких, что $\gamma_j = 2q_j$ для $j = 1, \ldots, n$. Число $2q_j$ есть порядком оператора A по j-той переменной, а число $2q = 2\max q_j$ есть максимальным порядком оператора A,

$$D_\beta^\alpha = D_{\beta_1}^{\alpha_1} \ldots D_{\beta_n}^{\alpha_n}, \qquad D_{\beta_j}^{\alpha_j} = \Delta_j^{\alpha_j} \nabla_j^{\beta_j} \quad \text{для } j = 1, \ldots, n,$$

$$\Delta_j u_k = \frac{1}{h_j}(u_{k+e_j} - u_k), \qquad \nabla_j u_k = \frac{1}{h_j}(u_k - u_{k-e_j}).$$

Оператор A определён в точке $X_k \in D_h$ если в этой точке определена вектор-функция Au_k для $u_k \in \pi^p(D_h)$. Точка $X_k \in D_h$ в которой определён оператор A называется узлом оператора A в множестве D_h. Множество всех возможных узлов оператора A в множестве D_h обозначать будем символом D_A. Очевидно, что $D_A \subset D_h$ и $Au_k \in \pi^p(D_A)$.

(¹) Это предположение гарантирует, что оператор A имеет $2q_j$ порядок по j-той переменной для $j = 1, \ldots, n$.

Дальше символом $\mathfrak{M}_A$ будем обозначать множество

$$\mathfrak{M}_A = \{k : X_k \in D_A\}.$$

В [1] было показано, что оператор сопраженный с оператором A в пространстве $\pi^p(D_h)$ имеет вид

$$A^* = \sum_{\beta, \beta, \alpha', \beta' \in \mathfrak{N}} (-1)^{(\alpha+\beta+\alpha'+\beta')} D_{\alpha'}^{\beta'} (A_{\beta:\beta'}^{\alpha:\alpha'})^* D_{\alpha}^{\beta}, \tag{1.3}$$

где $(A_{\beta:\beta'}^{\alpha:\alpha'})^*$ — транспонированная матрица $A_{\beta:\beta'}^{\alpha:\alpha'}$,

$$(\alpha+\beta+\alpha'+\beta') =$$
$$= \alpha_1 + \ldots + \alpha_n + \beta_1 + \ldots + \beta_n + \alpha_1' + \ldots + \alpha_n' + \beta_1' + \ldots + \beta_n'.$$

С определения оператора A следует, что

$$D_A \equiv D_{A^*}.$$

Дальше будем пользоваться псевдонормальным разностным граничным оператором δ, определённым в точках множества Γ_h, введеным в работе [1] следующим образом:

Пусть

$$\alpha_j(X_k) = \begin{cases} 1 & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h \quad \text{для которых } k_j = 0, \\ 0 & \text{для остальных } X_k \in \Gamma_h, \end{cases}$$

$$\beta_j(X_k) = \begin{cases} 1 & \text{для тех } X_k \in \Gamma_h \quad \text{для которых } k_j = N_j, \\ 0 & \text{для остальных } X_k \in \Gamma_h, \end{cases}$$

$$\delta_j^+ = \begin{bmatrix} E \\ E\Delta_j \\ \vdots \\ E\Delta_j^{q_j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \delta_j^- = \begin{bmatrix} E \\ E\nabla_j \\ \vdots \\ E\nabla_j^{q_j-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

здесь E — единичная матрица порядка p.

Очевидно, что операторы являются матричными разностными операторами имеющими p столбцов. Предполагаем, что имеют они pq строк, т.е. для этого значения j, которое отвечает максимальному значению q_j операторы δ_j^+, δ_j^- не имеют нулевых строк.

Теперь

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} [\alpha_j(X_k)\, \delta_j^+ + \beta_j(X_k)\, \delta_j^-] \qquad \text{для} \qquad X_k \in \Gamma_h. \tag{1.4}$$

Употребляя определение операторов A^* и δ мы можем написать соотношение

$$(1.5)\qquad (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = H' \sum_{k\in\mathfrak{M}_0} (\delta u_k^* R_1 \delta v_k - \delta v_k^* R_2 \delta u_k) =$$

$$= (\delta u, R_1 \delta v)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, R_2 \delta u)_{\mathfrak{M}_0} \quad \text{для} \quad v_k, u_k \in \pi^p(D_h).$$

Операторы R_1, R_2 являются матричными разностными операторами определёнными в точках множества Γ_h имеюще pq строк и pq столбцов.

2. Разностная краевая задача. Для заданных $F_k \in \pi^p(D_A)$ и $\Phi_k \in \in \pi^p(\Gamma_h)$ надо найти вектор-функцию $u_k \in \pi^p(D_h)$ удовлетворяющую системе разностных уравнений

$$(2.1)\qquad Au_k = F_k \quad \text{для } X_k \in D_A$$

и граничным условиям

$$(2.2)\qquad B\delta u_k = \Phi_k \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h,$$

где оператор A определён в (1.2), оператор δ определён в (1.4), $B = B_s + + R_2$, B_s — матричный разностный оператор определён только в точках $X_k \in \Gamma_h$ и действующий только в доль Γ_h, имеющий pq строк и pq столбцов. Оператор R_2 определён соотношением (1.5). В работе [1] было показано что при предположению существования оператора B_s^*, т.е. оператора удовлетворяющего соотношению

$$(2.3)\qquad (\varphi, B_s\psi)_{\mathfrak{M}_0} = (B_s^*\varphi, \psi)_{\mathfrak{M}_0} \quad \text{для } \varphi_k, \psi_k \in \pi^{pq}(\Gamma_h)$$

существует такой граничный оператор B^*, что

$$(2.4)\qquad (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} - (A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A} = (B^*\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0}$$

и $B^* = B_s^* + R_1$; R_1 — оператор определён соотношением (1.5), B_s^* — оператор определён соотношением (2.3).

3. Претварительные определения. Вычитывая с (2.4) член $(A^*v, u)_{\mathfrak{M}_A}$ и проводя в нём суммирование по частям получаем

$$(3.1)\qquad H \sum_{k\in\tilde{\mathfrak{M}}_A} \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathfrak{N}} (-1)^{|\alpha+\beta|} D_\alpha^\beta u_k^* A_{\beta;\,\beta'}^{\alpha;\,\alpha'} D_{\beta'}^{\alpha'} v_k =$$

$$= (v, Au)_{\mathfrak{M}_A} + (\delta v, B\delta u)_{\mathfrak{M}_0} - (G\delta v, \delta u)_{\mathfrak{M}_0},$$

где G является матричным разностным оператором полученным из объединения оператора B^* с оператором полученным из преведенного суммирования по частям, а множество

$$\tilde{\mathfrak{M}}_A = \{k : \max_{\alpha\in\mathfrak{N}} \alpha_j \leqslant k_j \leqslant N_j - \max_{\beta\in\mathfrak{N}} \beta_j \quad \text{для } j = 1, \ldots, n\}$$

есть множеством мульти индексов узлов операторов выступающих в левой стороне соотношения (3.1). Очевидно, что $\tilde{\mathfrak{M}}_A \supset \mathfrak{M}_A$. Это следует из того, что порядок разностных операторов выступающих в левой части (3.1) меньше чем порядок оператора A. Множество $\tilde{\mathfrak{M}}_A$ является множеством мульти индексов, отвечающим узлом операторов $D^{\alpha'}_{\beta'}$, D^{β}_{α} в множестве D_h.

В дальшей части этой работы мы будем пользоватся следующими двумя функционалами

$$W(u, v) = H \sum_{k\in\tilde{\mathfrak{M}}_A} \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathfrak{N}} (-1)^{|\alpha+\beta|+q} D^{\beta}_{\alpha} u^*_k A^{\alpha;\,\alpha'}_{\beta;\,\beta'} D^{\alpha'}_{\beta'} v_k \tag{3.2}$$

и

$$W_S(u, v) = (-1)^q H' \sum_{k\in\mathfrak{M}_0} \delta u^*_k S \delta v_k \tag{3.3}$$

определёнными для $u_k, v_k \in \pi^p(D_h)$.

Нетрудно заметить, что δv_k, $\delta u_k \in \pi^{pq}(\Gamma_h)$.

Оператор S есть разностным матричным оператором определённым в точках $X_k \in \Gamma_h$ и действующим только вдоль Γ_h. Оператор S имеет pq строк и pq столбцов.

4. Предположения. В предыдущих параграфах были введены некоторые предположения об рассматриванной разностной задаче. Нам казалось это удобным для пояснения введеных определений. В этом параграфе мы сберём все существенные для этой работы предположения, несмотря на то, что некоторые из них были введены в предыдущих параграфах. И так мы предполагаем:

(1°) *Порядок разностного оператора A, определённого в* (1.2) *по каждой переменной является чётным числом.*

(Из этого предположения между прочем следует, что множество узлов оператора A идентично множеству узлов сопряженного оператора A^*, т.е. $D_A \equiv D_{A^*}$).

(2°) *Оператор граничных условий* (2.2) *имеет вид*

$$B\delta = (B_S + R_2)\delta,$$

где R_2 оператор определён соотношением (1.5), *B_S разностный матричный оператор имеющий pq строк и pq столбцов, определён в точках множества Γ_h и действующий вдоль Γ_h.*

(3°) *Существует оператор B^*_S сопряженный с оператором B_S т.е. оператор удовлетворяющий соотношению* (2.3).

(4°) *Оператор A такой, что функционал* (3.2) *положительно определён, т.е.*

$$W(u, u) > 0 \quad \text{для всех } u_k \in \pi^p(D_h) \quad \text{кроме } u_k \equiv 0$$

(5°) *Для задачи* (2.1), (2.2) *существует разностный матричный оператор* S (определим его точнее в дальшей части работы) *имеющий* pq *строк и* pq *столбцов определён в точках* Γ_h *и действующий только вдоль* Γ_h. *Существует сопряженный к нему оператор* S^*, *т.е. оператор удовлетворяющий следующему соотношению*

$$(\varphi, S\psi)_{\mathfrak{M}_0} = (S^*\varphi, \psi)_{\mathfrak{M}_0} \quad \text{для } \varphi_k, \psi_k \in \pi^{pq}(\Gamma_h).$$

Кроме выше сказанного оператор S *такой, что функционал* (3.3) *положительно определён, т.е.*

$$W_S(u, u) > 0 \quad \text{для всех } u_k \in \pi^p(D_h) \quad \text{кроме } u_k \equiv 0.$$

В теореме 1 мы сформулируем более строгие предположения, но они не являются существенными для рассматриванных нами проблем. Замечания приведены в конце работы выясняют это предсказание.

5. Гильбертовые пространства пораждены задачей (2.1), (2.2). Определим здесь три гильбертовые пространства; пространство вектор-функций определённых на множестве D_h, которое обозначать будем $\pi_U^p(D_h)$, пространство вектор-функций определённых на множестве D_A которое обозначать будем $\pi_F^p(D_A)$ и пространство вектор-функций определенных на множестве Γ_h, которое аналогично обозначать будем $\pi_\Phi^{pq}(\Gamma_h)$. Если функционалы (3.2) и (3.3) удовлетворяющие предположениам 4°, 5° из 4 такие, что существуют положительные константы c_1, c_2 что

$$\overline{W}(u, u) = W(u, u) - c_1 H \sum_{k \in \tilde{\mathfrak{M}}_A} u_k^* u_k > 0 \tag{5.1}$$

и

$$\overline{W}_S(u, u) = W_S(u, u) - c_2 H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} \delta u_k^* \delta u_k > 0 \tag{5.2}$$

для всех $u_k \in \pi^p(D_h)$ кроме $u_k \equiv 0$, то при помощи функционалов (5.1), (5.2) можно определить скалярное произведение вектор-функций определённых на множестве D_h.

Пусть $\pi_U^p(D_h)$ будет гильбертовым пространством всех p-мерных вектор-функций определенных на множестве D_h с скалярным произведением определённым следующим образом

$$(v, u)_U = \overline{W}(v, u) + \overline{W}_S(v, u) \quad \text{для } v_k, u_k \in \pi_U^p(D_h). \tag{5.3}$$

Соответственно норма в этом пространстве определяется в следующей форме

$$\|u\|_U = (u, u)_U^{1/2}. \tag{5.4}$$

Нетрудно проверить, что так определённое скалярное произведение удовлетворяет обычным условиям скалярного произведения с тем, что свойство коммутативности имеет следующий вид $(v, u)_U = (u, v)_U^*$, * обозначает здесь, что все матрицы выступающие в функционале $W(v, u)$ должны быть транспонированные, а в функционале $W_S(v, u)$ в место оператора S должен выступать оператор S^*. Очевидно, если матрицы в функционале $W_S(v, u)$ и оператор S в функционале $W_S(v, u)$ симметричны то $(v, u)_U = (u, v)_U$.

Пусть $\pi_U^p(D_A)$ будет гильбертовым пространством всех p-мерных вектор-функций определённых в множестве D_A. Скалярное произведение в этом пространстве определим в следующим виде

$$(F_1, F_2)_F = H \sum_{k \in \mathfrak{M}_A} F_{1k}^*, F_{2k}, \qquad \text{для } F_{1k}, F_{2k} \in \pi_F^p(D_A). \tag{5.5}$$

Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|F\|_F = (F, F)_F^{1/2}. \tag{5.6}$$

Наконец пусть $\pi_\Phi^{pq}(\Gamma_h)$ обозначает гильбертовое пространство всех pq-мерных вектор-функций определённых в множестве Γ_h. Скалярное произведение в этом пространстве определим формулой

$$(\Phi_1, \Phi_2) = H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} [\Phi_{1k}^* \Phi_{2k} + c(R\Phi_{1k})^* R\Phi_{2k}], \tag{5.7}$$

для $\Phi_{1k}, \Phi_{2k} \in \pi_\Phi^{pq}(\Gamma_h)$. В (5.7) c есть положительной константой, R является разностным матричным оператором, имеющим pq строк и pq столбцов, действующим вдоль Γ_h. Норма в этом пространстве определена обычным образом,
т.е.

$$\|\Phi\|_\Phi = (\Phi, \Phi)_\Phi^{1/2}.$$

6. Теорема о априорных оценках.

Теорема 1. *Если для задачи* (2.1), (2.2) *существуют операторы* R, S *действующие только вдоль* Γ_h *удовлетворяющие следующим условиям*:

1° *существует сопряженный оператор* S^*,

2° $(-1)^{q+1} H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} \delta u_k^* G \delta u_k \leqslant (-1)^{q+1} H' \sum_{k \in \mathfrak{M}_0} \delta u_k^* RB \delta u_k - W_S(u, u)$,

3° *существуют положительные постоянные* c_1, c_2 *такие, что*

$\overline{W}(u, u) > 0$ *и* $\overline{W}_S(u, u) > 0$ *для всех* $u_k \in \pi^p(D_h)$ *кроме* $u_k \equiv 0$,

то для решения задачи справедлива оценка

$$\|u\|_U \leqslant M \|F\|_F + N \|\Phi\|_\Phi,$$

где M, N *положительные константы независящие от*

$$h_1, \ldots, h_n, u_k, F_k, \Phi_k.$$

Доказательство. Из (3.1) и предположений теоремы имеем

$$H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A}\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathfrak{N}}(-1)^{|\alpha+\beta|+q}D_\alpha^\beta u_k^* A_{\beta:\beta}^{\alpha:\alpha'} D_\beta^\alpha u_k =$$

$$= (-1)^q H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} u_k^* F_k + (-1)^{q+1}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^* G\delta u_k + (-1)^q H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\Phi_k \leqslant$$

$$\leqslant (-1)^q H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} u_k^* F_k + (-1)^q H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\Phi_k + (-1)^{q+1}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^* RB\delta u_k -$$

$$- W_S(u, u).$$

В силу предыдущего имеем

$$W(u, u) + W_S(u, u) \leqslant (-1)^q H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} u_k^* F_k +$$

$$+ (-1)^q H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\Phi_k + (-1)^{q+1}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^* R\Phi_k.$$

Употребляя ε-неравенство

$$|ab| \leqslant \frac{\varepsilon a^2}{2} + \frac{b^2}{2\varepsilon} \quad \text{для } \varepsilon > 0$$

получаем

$$W(u, u) + W_S(u, u) \leqslant \frac{\varepsilon_1}{2}H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} u_k^* u_k + \frac{1}{2\varepsilon_1}H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} F_k^* F_k +$$

$$+ \frac{\varepsilon_2}{2}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\delta u_k + \frac{1}{2\varepsilon_2}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\Phi_k^*\Phi_k +$$

$$+ \frac{\varepsilon_3}{2}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\delta u_k + \frac{1}{2\varepsilon_3}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}(R\Phi_k)^* R\Phi_k.$$

Дальше мы можем написать

$$W(u, u) - \frac{\varepsilon_1}{2}H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} u_k^* u_k + W_S(u, u) - \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\delta u_k^*\delta u_k \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\varepsilon_1}H\sum_{k\in\mathfrak{M}_A} F_k^* F_k + \frac{1}{2\varepsilon_2}H'\sum_{k\in\mathfrak{M}_0}\left[\Phi_k^*\Phi_k + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3}(R\Phi_k)^* R\Phi_k\right].$$

Выберая $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ так, чтобы

$$\frac{\varepsilon_1}{2} = c_1, \qquad \frac{\varepsilon_2+\varepsilon_3}{2} = c_2, \qquad \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_3} = c$$

получаем

$$\overline{W}(u, u) + \overline{W}_S(u, u) \leqslant \frac{1}{4c_1}(F, F)_F + \frac{c+1}{4cc_2}(\Phi, \Phi)_\Phi.$$

Используя определение норм в простанствах

$$\pi_U^p(D_h),\qquad \pi_F^p(D_\Delta),\qquad \pi_\Phi^{pq}(\Gamma_h)$$

получаем

$$\|u\|_U^2 \leqslant \frac{1}{4c_1}\|F\|_F^2 + \frac{c+1}{4cc_2}\|\Phi\|_\Phi^2.$$

Дальше при

$$M = \frac{1}{2\sqrt{c_1}},\qquad N = \sqrt{\frac{c+1}{4cc_2}}$$

получаем

$$\|u\|_U \leqslant M\|F\|_F + N\|\Phi\|_\Phi.$$

Теорема доказана.

7. Замечания.

Замечание I. Если предположить, что для оператора системы (2.1) существует константа K такая, что

$$H\sum_{k\in\mathfrak{M}_\Delta}\sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'\in\mathfrak{N}}(-1)^{|\alpha+\beta|+q}(\xi_k^{\alpha,\beta})^* A_{\beta;\beta'}^{\alpha;\alpha}\xi_k^{\alpha,\beta} \geqslant K^2 H\sum_{k\in\mathfrak{M}_\Delta}\sum_{\alpha,\beta\in\mathfrak{N}_0}(\xi_k^{\alpha,\beta})^*\xi_k^{\alpha,\beta}$$

для произвольных

$$\xi_k^{\alpha,\beta}\in\pi^p(D_h)$$

и

$$\mathfrak{N}_0 = \{\alpha,\beta : 0\leqslant \alpha_j+\beta_j\leqslant q_j \quad \text{для } j = 1,2,\dots,n\}$$

то

$$\|u\| \leqslant M_1\|F\|_F + N_1\|\Phi\|_\Phi,$$

где

$$M_1 = M/K,\qquad N_1 = N/K,\qquad \|u\|^2 = H\sum_{k\in\mathfrak{M}_\Delta}\sum_{\alpha,\beta\in\mathfrak{N}_0} D_\beta^\alpha u_k^* D_\beta^\alpha u_k.$$

Замечание 2. Если для задачи (2.1), (2.2) справедливо неравенство $W(u,u)>0$ для $u_k\in\pi^p(D_h)$ с исключением $u_k\equiv 0$ но не существует константа $c_1>0$ такая, что $\overline{W}(u,u)>0$ то при помощи преобразования

$$u_k = [\eta_1-(1+\eta_2 h_i)^{k_i}]v_k. \tag{7.1}$$

Можно получить задачу на отыскание вектор-функций v_k, удовлетворяющие условию $\overline{W}(v,v)>0$ для всех $v_k\in\pi^p(D_h)$ кроме $v_k\equiv 0$. К преобразованной задаче можно применить теорему 1 и при помощи обратного преобразования к преобразованию (7.1) получить оценки решения исходной задачи.

Замечание 3. Если для задачи (2.1), (2.2) справедливы условия $W(u,v)>0$ и $W_S(u,u)>0$ для всех $u_k\in\pi^p(D_h)$ кроме $u_k\equiv 0$ но не существует константа $c_2>0$ такая, что $\overline{W}_S(u,u)>0$ то можно положить

$$u_k = w_k + z_k,$$

где z_k известная вектор-функция из пространства $\pi^p(D_h)$ удовлетворяющая граничным условиям (2.2), и получить краевую задачу на функцию w_k

$$Aw_k = \bar{F}_k \quad \text{для } X_k \in D_A, \tag{7.2}$$

$$B\delta w_k = 0 \quad \text{для } X_k \in \Gamma_h. \tag{7.3}$$

Теорему о априорных оценках для задачи (7.2), (7.3) можно доказать без предположения положительной определённости функционала $\bar{W}_S(w, w)$. Дальше можно найти оценку нормы решения u_k через нормы F_k и z_k.

Литература

[1] З. Шода, *Краевые задачи для систем линейных многомерных разностных уравнений*, Ann. Polon. Math. 22 (1970), p. 359-369.

Reçu par la Rédaction le 25. 2. 1970