ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Schéma des différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles elliptiques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites du type de Neumann

par MARIAN MALEC (Cracovie)

Résumé. On considère une méthode des différences finies pour un système d'équations non linéaires partielles elliptiques aux dérivées mixtes et avec des conditions aux limites du type de Neumann.

On démontre, sous certaines conditions, que cette méthode approchée est convergente. On évalue aussi l'erreur de la méthode des différences finies proposée.

1. Les processus stationnaires d'échange de masse et de chaleur (ne dépendant pas du temps) se laissent décrire en général à l'aide de systèmes du type elliptique sous la forme:

$$f_l\left(x, u, \frac{\partial u_l}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (l = 1, \ldots, p) \tag{1.1}$$

où

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in [0, \sigma]^n, \qquad u = u(x) = \big(u_1(x), \ldots, u_p(x)\big),$$

$$\frac{\partial u_l}{\partial x} = \left\{\frac{\partial u_l}{\partial x_i}\right\}, \qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} = \left\{\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}\right\} \qquad (i, j = 1, \ldots, n).$$

La présence des dérivées mixtes de la fonction u_l $(l = 1, \ldots, p)$ dans le système (1.1) permet de décrire, entre autres, à l'aide de ce système les processus de chauffage ou de refroidissement des corps anisotropes. Dans la pratique on commande ces processus en imposant un flux de chaleur au bord du corps chauffé ou refroidi, ce qui équivaut à l'imposition de conditions aux limites du type de Neumann:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x) = \varphi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = 0, \\ &\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x) = \psi_{li}(x) \quad \text{pour } x_i = \sigma \end{aligned} \qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n). \tag{1.2}$$

Dans la présente communication je propose une méthode des différences finies pour résoudre le problème différentiel (1.1)–(1.2) et je démontre que cette méthode est convergente.

Il est à noter qu'un pareil résultat a été déjà obtenu par Malec([1]), mais seulement pour le cas particulier où $p = 1$.

2. Dans la présente communication on admettra les hypothèses suivantes:

(1) les fonctions scalaires $f_l(x, u, q, w)$ $(l = 1, \ldots, p)$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $u = (u_1, \ldots, u_p)$, $q = (q_1, \ldots, q_n)$, $w = (w_{11}, \ldots, w_{1n}, \ldots, w_{n1}, \ldots, w_{nn})$ sont de classe C^1 dans l'ensemble

$$D = [0, \sigma]^n \times R^{p+n+n^2} \tag{2.1}$$

et satisfont dans cet ensemble aux conditions

$$\frac{\partial f_l}{\partial u_l} \leqslant L < 0, \qquad 0 \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial u_\mu} \leqslant K \qquad (l = 1, \ldots, p,\ \mu = 1, \ldots, p,\ \mu \neq l), \tag{2.2}$$

$$\left|\frac{\partial f_l}{\partial q_i}\right| \leqslant \Gamma \qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n), \tag{2.3}$$

$$0 < g \leqslant \frac{\partial f_l}{\partial w_{ii}} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left|\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}}\right| \qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n) \tag{2.4}$$

où L, K, Γ et g sont des nombres;

(2) pour des indices fixés l, i et j (où $1 \leqslant l \leqslant p$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant n$ et $i \neq j$), la fonction $\partial f_l / \partial w_{ij}$ est dans l'ensemble D toujours non négative ou bien toujours non positive;

(3) les égalités

$$\frac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} = \frac{\partial f_l}{\partial w_{ji}} \qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n) \tag{2.5}$$

sont satisfaites en chaque point de l'ensemble D;

([1]) M. Malec, *Sur une méthode des différences finies pour l'équation différentielle non linéaire elliptique aux dérivées mixtes et avec une condition aux limites du type de Neumann* (à paraître dans Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Jagiellońskiego).

(4) les constantes L, K, Γ, g, p et h sont telles que

$$\frac{g}{h}-\frac{\Gamma}{2}\geqslant 0, \quad L+K(p-1)<0; \tag{2.6}$$

(5) les fonctions scalaires $u_l(x)$ $(l=1,\ldots,p)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble $E=[0,\sigma]^n$ et vérifient le système d'équations différentielles partielles (1.1) de même que les conditions aux limites (1.2).

3. Supposons que N soit un nombre naturel et que $m_1,\ldots,m_n$ soient des nombres entiers et posons

$$\begin{aligned} M &= (m_1,\ldots,m_n),\\ Z_1 &= \{M\colon\ 0\leqslant m_i\leqslant N+1,\ i=1,\ldots,n\},\\ Z_2 &= \{M\colon\ -1\leqslant m_i\leqslant N,\ i=1,\ldots,n\}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} -i(M) &= (m_1,\ldots,m_{i-1},m_i-1,m_{i+1},\ldots,m_n) \quad (M\in Z_1),\\ i(M) &= (m_1,\ldots,m_{i-1},m_i+1,m_{i+1},\ldots,m_n) \quad (M\in Z_2)\\ &\qquad\qquad (i=1,\ldots,n), \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned} Z=\big\{M\colon &\text{ il existe } i \text{ et } j\ (1\leqslant i\leqslant n,\ 1\leqslant j\leqslant n) \text{ tels que } i\big(j(M)\big)\\ &\text{ou } i\big(-j(M)\big) \text{ ou } -i\big(j(M)\big) \text{ ou } -i\big(-j(M)\big) \text{ appartient à } Z_1\cap Z_2\big\}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Faisons correspondre à chaque multi-indice $M\in Z$ les nombres réels v_l^M $(l=1,\ldots,p)$ et posons

$$\begin{aligned} v_l^{Mi} &= \frac{1}{2h}\,\big(v_l^{i(M)}-v_l^{-i(M)}\big),\\ v_l^{+Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,\big(-v_l^{i(M)}-v_l^{j(M)}-v_l^{-i(M)}-v_l^{-j(M)}+2v_l^M+v_l^{i(j(M))}+\\ &\qquad\qquad +v_l^{-i(-j(M))}\big),\\ v_l^{-Mij} &= \frac{1}{2h^2}\,\big(v_l^{i(M)}+v_l^{j(M)}+v_l^{-i(M)}+v_l^{-j(M)}-2v_l^M-v_l^{i(-j(M))}-\\ &\qquad\qquad -v_l^{-i(j(M))}\big)\\ &\qquad (l=1,\ldots,p,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n,\ M\in Z_1\cap Z_2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Considérons maintenant dans l'espace euclidien à n dimensions R^n l'ensemble des points nodaux dont les coordonnées sont

$$x_i^{m_i}=m_i\cdot h \quad (i=1,\ldots,n), \tag{3.5}$$

où $M=(m_1,\ldots,m_n)\in Z$, $0<h=\sigma/N$ et désignons le point nodal $(x_1^{m_1},\ldots,x_n^{m_n})$ par x^M.

Dans la suite nous admettons que les nombres v_l^M satisfont aux égalités

$$
\begin{aligned}
& v_l^{Mi} && = \varphi_{li}(x^M) \quad (m_i = 0), \\
& v_l^{Mi} && = \psi_{li}(x^M) \quad (m_i = N), \\
& v_l^{i(j(M))} && = v_l^{-i(-j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) + \psi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = m_j = N, \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j), \\
& v_l^{-i(j(M))} && = v_l^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) - \psi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = 0,\ m_j = N, \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j), \\
& v_l^{-i(-j(M))} && = v_l^{i(j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) + \varphi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = m_j = 0, \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j), \\
& v_l^{i(-j(M))} && = v_l^{-i(j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) - \varphi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = N,\ m_j = 0, \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j)
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2),$$

et au système d'équations aux différences finies

$$f_l(x^M, v^M, v_l^{MI}, v_l^{MIJ}) = 0 \quad (l = 1, \ldots, p,\ M \in Z_1 \cap Z_2), \tag{3.7}$$

où les fonctions φ_{li}, ψ_{li} $(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n)$ et f_l $(l = 1, \ldots, p)$ sont les mêmes que celles qui figurent dans (1.2) et (1.1), et

$$
\begin{aligned}
& v^M && = (v_1^M, \ldots, v_p^M), \\
& v_l^{MI} && = (v_l^{M1}, \ldots, v_l^{Mn}), \\
& v_l^{MIJ} && = (v_l^{M11}, \ldots, v_l^{M1n}, \ldots, v_l^{Mn1}, \ldots, v_l^{Mnn}), \\
& v_l^{Mij} && = \begin{cases} v_l^{+Mij} & \text{pour } i \neq j \text{ et } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \geqslant 0, \\[2ex] v_l^{-Mij} & \text{pour } i = j \text{ ou } \dfrac{\partial f_l}{\partial w_{ij}} \leqslant 0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2)$$

(voir l'hypothèse (2) dans 2).

4. Désignons par $u^M = \{u_l^M\}$ $(l = 1, \ldots, p)$ la valeur de la solution du problème différentiel (1.1)–(1.2) au point nodal x^M engendré par le multi-indice $M \in Z_1 \cap Z_2$ et posons

$$
\begin{aligned}
& u_l^{-i(M)} && = u_l^{i(M)} - 2h\varphi_{li}(x^M) \quad (m_i = 0), \\
& u_l^{i(M)} && = u_l^{-i(M)} + 2h\psi_{li}(x^M) \quad (m_i = N), \\
& u_l^{i(j(M))} && = u_l^{-i(-j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) + \psi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = m_j = N, \\
& && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i \neq j),
\end{aligned}
$$

$$(4.1)\quad \begin{aligned} u_l^{-i(j(M))} &= u_l^{i(-j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) - \psi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = 0,\ m_j = N,\ i \neq j),\\ u_l^{-i(-j(M))} &= u_l^{i(j(M))} - 2h[\varphi_{li}(x^M) + \varphi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = m_j = 0,\ i \neq j),\\ u_l^{i(-j(M))} &= u_l^{-i(j(M))} + 2h[\psi_{li}(x^M) - \varphi_{lj}(x^M)] \quad (m_i = N,\ m_j = 0,\ i \neq j) \end{aligned}$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n,\ M \in Z_1 \cap Z_2).$$

LEMME 1. *Les hypothèses de 2 étant satisfaites,* u_l^M $(l = 1, \ldots, p)$ *vérifient les égalités*

$$(4.2)\qquad f_l(x^M, u^M, u_l^{MI}, u_l^{MIJ}) = \eta_l^M(h) \qquad (l = 1, \ldots, p,\ M \in Z_1 \cap Z_2)$$

où les grandeurs u^M, u_l^{MI} *et* u_l^{MIJ} $(l = 1, \ldots, p)$ *pour* u_l^M *sont définies de la même manière que les grandeurs* v^M, v_l^{MI} *et* v_l^{MIJ} *le sont pour* v_l^M *(voir* (3.7), (3.4)) *et*

$$(4.3)\qquad \lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0, \qquad \varepsilon(h) = \max_{1\leqslant l\leqslant p}[\max_{M\in Z_1\cap Z_2} |\eta_l^M(h)|].$$

Démonstration. Les formules (4.2) et (4.3) sont évidentes pour ceux des points nodaux qui sont engendrés par les multi-indices $M \in Z_1 \cap Z_2$, $1 \leqslant m_i \leqslant N-1$ $(i = 1, \ldots, n)$, puisque $u(x)$ est une solution de classe C^2 dans l'ensemble E du problème différentiel (1.1)–(1.2) et les fonctions f_l $(l = 1, \ldots, p)$ sont de classe C^1 dans D, d'après (5) et (1).

Il faut encore démontrer que les formules (4.2) et (4.3) sont valables pour les points nodaux x^M appartenant à la frontière ∂E de l'ensemble E. Pour cela il suffit de prouver que pour $x^M \in \partial E$ les quotients des différences finies u_l^{Mi} et u_l^{-Mij}, u_l^{+Mij} $(l = 1, \ldots, p, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n)$ tendent vers $\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M)$ et vers $\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M)$ respectivement, avec $h \to 0$ (cela résulte de la régularité des fonctions f_l $(l = 1, \ldots, p)$ dans l'ensemble D).

De (4.1) nous tirons

$$(4.4)\quad \begin{aligned} u_l^{Mi} &= \varphi_{li}(x^M) = \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M) \quad \text{pour } m_i = 0,\\ u_l^{Mi} &= \psi_{li}(x^M) = \frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M) \quad \text{pour } m_i = N \end{aligned}$$

$$(l = 1, \ldots, p, \quad i = 1, \ldots, n).$$

Soit

$$(4.5)\quad u_l^+(x) = \begin{cases} u_l(x) \quad \text{pour } x \in E, \\ u_l(x_1, \ldots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) + 2x_i\varphi_{li}(\check{x}_i) \\ \qquad \text{pour } x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [-\sigma, 0], \\ u_l(x_1, \ldots, x_{i-1}, 2\sigma - x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n) - 2(\sigma - x_i)\psi_{li}(\hat{x}_i) \\ \qquad \text{pour } x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [\sigma, 2\sigma] \\ \qquad\qquad (i = 1, \ldots, n) \end{cases}$$

où $l = 1, \ldots, p$, $\check{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $\hat{x}_i = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Les fonctions $u_l^+(x)$ $(l = 1, \ldots, p)$ sont de classe C^2 dans l'ensemble $E^+ = E \cup (E_1^+ \cup \ldots \cup E_n^+)$ où

$$(4.6)\quad E_i^+ = \{x \in R^n\colon x_j \in [0, \sigma],\ j = 1, \ldots, n,\ j \neq i,\ x_i \in [-\sigma, 2\sigma]\} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Les dérivées des fonctions u_l^+ $(l = 1, \ldots, p)$ peuvent donc être approchées par les quotients des différences finies formés de la même façon que les quotients u_l^{-Mij} et u_l^{+Mij} $(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n)$ pour les fonctions u_l $(l = 1, \ldots, p)$, mais sous la seule condition que tous les points nodaux figurant dans ces quotients appartiennent à l'ensemble E^+.

Comme les valeurs des fonctions u_l^+ et u_l sont respectivement égales aux points nodaux engendrés par les multi-indices M, $-i(M)$, $i(M)$, $j(M)$ $(j = 1, \ldots, n,\ j \neq i)$ lorsque $m_i = 0$ ou $m_i = N$ $(i = 1, \ldots, n)$, et les valeurs des dérivées du second ordre de ces deux fonctions sont les mêmes pour $x^M \in E$, on a

$$(4.7)\quad u_l^{Mii} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}(x^M) + O(h^2) \qquad \text{pour } m_i = 0 \text{ ou } m_i = N \quad (i = 1, \ldots, n),$$

$$u_l^{\pm Mij} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + O(h^2) \qquad \text{pour } m_i = 0,\ m_j = 0,\ m_j = N\ (i \neq j),$$

$$(4.8)\quad u_l^{+Mij} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + O(h^2) \qquad \text{pour } m_i = 0,\ m_j = N\ (i \neq j),$$

$$u_l^{-Mij} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + O(h^2) \qquad \text{pour } m_i = m_j = 0 \text{ ou } m_i = m_j = N\ (i \neq j)$$

$$(l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).$$

Il faut montrer que

$$
(4.9)\qquad
\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} u_l^{+Mij} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) \qquad \text{pour } m_i = m_j = 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou } m_i = m_j = N\ (i \neq j),\\
&\lim_{h\to 0} u_l^{-Mij} = \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) \qquad \text{pour } m_i = 0,\ m_j = N\ (i \neq j)\\
&\qquad\qquad (l = 1, \ldots, p,\ i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Nous ferons la démonstration des égalités (4.9) dans le cas où $m_i = m_j = 0$ $(i \neq j)$. Si $m_i = m_j = N$ $(i \neq j)$ ou $m_i = 0$ et $m_j = N$ $(i \neq j)$, la démonstration est pareille.

Soient donc $x^M \in \partial E$ et $m_i = m_j = 0$ $(i \neq j)$. Nous aurons alors

$$
(4.10)\qquad u_l^{i(j(M))} = u_l^M + h\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x^M)\right] + \frac{1}{2}h^2\left[\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}(x^M) + \right.
$$
$$
\left. + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j^2}(x^M)\right] + h^2 \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) + O(h^3).
$$

D'où

$$
(4.11)\qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) = \frac{1}{2h^2}\left[u_l^{i(j(M))} + u_l^{i(j(M))} - 2u_l^M - \right.
$$
$$
\left. - 2h\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x^M)\right) - h^2\left(\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}(x^M) + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_j^2}(x^M)\right)\right] + O(h).
$$

Mais

$$
\begin{aligned}
u_l^{i(j(M))} &= u_l^{-i(-j(M))} + 2h\left[\varphi_{li}(x^M) + \varphi_{lj}(x^M)\right]\\
&= u_l^{-i(-j(M))} + 2h\left[\frac{\partial u_l}{\partial x_i}(x^M) + \frac{\partial u_l}{\partial x_j}(x^M)\right]
\end{aligned}
$$

(voir (4.1) et (1.2)) et

$$
\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i^2}(x^M) = \frac{1}{h^2}\left[u_l^{i(M)} - 2u_l^M + u_l^{-i(M)}\right]
$$

(voir (4.7) et (3.4), (3.8), (2.5)), alors

$$
(4.12)\qquad \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_i \partial x_j}(x^M) = \frac{1}{2h^2}\left[u_l^{i(j(M))} + u_l^{-i(-j(M))} - 2u_l^M + u_l^{i(M)} + \right.
$$
$$
\left. + 2u_l^M - u_l^{-i(M)} - u_l^{j(M)} + 2u_l^M - u_l^{-j(M)}\right] + O(h) = u_l^{+Mij} + O(h).
$$

La démonstration du lemme est terminée.

5. THÉORÈME. *Les hypothèses du* 2 *étant satisfaites, les nombres* v_l^M *et* u_l^M $(l=1,\ldots,p,\ M\in Z)$ *sont déterminés par les formules* (3.6), (3.7) *et* (4.1), (4.2) *respectivement, on a pour* $r_l^M=u_l^M-v_l^M$ $(l=1,\ldots,p)$;

$$|r_l^M|\leqslant\frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)}\qquad(l=1,\ldots,p,\ M\in Z)\tag{5.1}$$

(voir (4.3) et (3.3)) *et*

$$\lim_{h\to 0} r_l^M=0\qquad(l=1,\ldots,p,\ M\in Z).\tag{5.2}$$

Démonstration. Vu que (5.2) résulte de (5.1) il suffit de prouver (5.1).

De (4.1) et de (3.6), nous tirons

$$\begin{aligned}
r_l^{i(M)} &= r_l^{-i(M)} && \text{pour } m_i=0 \text{ et } m_i=N,\\
r_l^{i(j(M))} &= r_l^{-i(-j(M))} && \text{pour } m_i=m_j=0 \text{ et } m_i=m_j=N,\\
r_l^{i(-j(M))} &= r_l^{-i(j(M))} && \text{pour } m_i=0,\ m_j=N
\end{aligned}\tag{5.3}$$

$$(l=1,\ldots,p,\ i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n,\ i\neq j,\ M\in Z_1\cap Z_2).$$

Il résulte des dernières égalités que

$$\max_{M\in Z} r_l^M=r_l^{A(l)},\qquad \min_{M\in Z} r_l^M=r_l^{B(l)},\tag{5.4}$$

où $A(l)\in Z_1\cap Z_2$, $B(l)\in Z_1\cap Z_2$ $(l=1,\ldots,p)$. Soit

$$r_k^{A(k)}=\max_{1\leqslant l\leqslant p} r_l^{A(l)},\qquad r_s^{B(s)}=\min_{1\leqslant l\leqslant p} r_l^{B(l)}.\tag{5.5}$$

Tenant compte de (4.2), (3.7) et appliquant le théorème de la moyenne, nous obtenons

$$\begin{aligned}
-\varepsilon(h)\leqslant \eta_k^{A(k)} &= f_k(x^{A(k)},\ u^{A(k)},\ u_k^{A(k)I},\ u_k^{A(k)IJ})-\\
&\qquad -f_k(x^{A(k)},\ v^{A(k)},\ v_k^{A(k)I},\ v_k^{A(k)IJ})\\
&= \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)}+\sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{A(k)} r_k^{A(k)j}+\sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}^{A(k)} r_k^{A(k)ij}
\end{aligned}\tag{5.6}$$

où

$$c_{k\mu}^{A(k)}=\frac{\partial f_k}{\partial u_\mu}(-),\qquad b_{kj}^{A(k)}=\frac{\partial f_k}{\partial q_j}(-),\qquad a_{kij}^{A(k)}=\frac{\partial f_k}{\partial w_{ij}}(-)\Bigg|$$

$$(i=1,\ldots,n,\ j=1,\ldots,n)$$

et les dérivées sont prises en des points convenables.

D'une façon analogue, on parvient à l'inégalité suivante:

$$(5.7)\qquad \varepsilon(h) \geqslant \eta_s^{B(s)} = f_s(x^{B(s)}, u^{B(s)}, u_s^{B(s)I}, u_s^{B(s)IJ}) - \\ -f_s(x^{B(s)}, v^{B(s)}, v_s^{B(s)I}, v_s^{B(s)IJ}) \\ = \sum_{\mu=1}^{p} c_{s\mu}^{B(s)} r_\mu^{B(s)} + \sum_{j=1}^{n} b_{sj}^{B(s)} r_s^{B(s)j} + \sum_{i,j=1}^{n} a_{sij}^{B(s)} r_\mu^{B(s)ij}.$$

Montrons maintenant que

$$(5.8)\qquad r_k^{A(k)} \leqslant \frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)}.$$

Nous démontrerons (5.8) par l'absurde. Admettons que l'inégalité (5.8) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que

$$(5.9)\qquad r_k^{A(k)} > \frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)}.$$

En utilisant la définition (3.4) et en tenant compte de l'égalité $a_{kij}^{A(k)} = a_{kij}^{A(k)}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$ (voir (2.5)), nous obtenons

$$(5.10)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}^{A(k)} r_k^{A(k)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{A(k)} r_k^{A(k)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)} \\ = \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) + \tfrac{1}{2} b_{ki}^{A(k)}\right] \cdot (r_k^{i(A(k))} - r_k^{A(k)}) + \\ + \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq 1}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) - \tfrac{1}{2} b_{ki}^{A(k)}\right] \cdot (r_k^{-i(A(k))} - r_k^{A(k)}) + \\ + \frac{1}{2h^2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}| \cdot [(r_k^{i(s(k;i,j)j(A(k)))} - r_k^{A(k)}) + \\ + (r_k^{-i(-s(k;i,j)j(A(k)))} - r_k^{A(k)})] + \\ + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)}$$

où

$$(5.11)\qquad s(k;\, i,\, j) = \begin{cases} +1 & \text{pour } a_{kij}^{A(k)} \geqslant 0 \\ -1 & \text{pour } a_{kij}^{A(k)} \leqslant 0 \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).$$

Il résulte des hypothèses (2.4), (2.8), (2.6) que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) + \tfrac{1}{2} b_{kj}^{A(k)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0 \\
&\hspace{20em} (i = 1, \ldots, n), \qquad (5.12)\\
&\frac{1}{h}\Big(a_{kii}^{A(k)} - \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |a_{kij}^{A(k)}|\Big) - \tfrac{1}{2} b_{ki}^{A(k)} \geqslant \frac{g}{h} - \frac{\Gamma}{2} \geqslant 0
\end{aligned}
$$

tandis qu'à partir de (5.4) on arrive à

$$
\begin{aligned}
&r_k^{i(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, \qquad r_k^{-i(A(k))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, \\
&\hspace{20em} (5.13)\\
&r_k^{i(s(k;i,j)j(A(k)))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0, \qquad r_k^{-i(-s(k;i,j)j(A(k)))} - r_k^{A(k)} \leqslant 0 \\
&\hspace{12em} (i = 1, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n).
\end{aligned}
$$

Remarquons aussi que

$$
\begin{aligned}
(5.14)\quad \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)} &= c_{kk}^{A(k)} r_k^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)} \\
&\leqslant c_{kk}^{A(k)} r_k^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(\mu)} \leqslant c_{kk}^{A(k)} r_k^{A(k)} + \sum_{\substack{\mu=1\\ \mu\neq k}}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_k^{A(k)} \\
&\leqslant c_{kk}^{A(k)} r_k^{A(k)} + K(p-1) r_k^{A(k)} \leqslant [L + K(p-1)] r_k^{A(k)} < -\varepsilon(h)
\end{aligned}
$$

(voir (2.2), (5.5), (5.9), (2.6)).

De (5.10)–(5.14) nous obtenons

$$
(5.15)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} a_{kij}^{A(k)} r_k^{A(k)ij} + \sum_{j=1}^{n} b_{kj}^{A(k)} r_k^{A(k)j} + \sum_{\mu=1}^{p} c_{k\mu}^{A(k)} r_\mu^{A(k)} < -\varepsilon(h).
$$

La dernière inégalité est en contradiction avec (5.9), ce qui achève la démonstration de l'inégalité (5.8).

D'une façon analogue on peut montrer que l'inégalité nous donne

$$
(5.16)\qquad r_s^{B(s)} \geqslant \frac{\varepsilon(h)}{L + K(p-1)}.
$$

Il résulte des inégalités (5.8) et (5.16) que

$$|r_l^M| \leqslant \frac{-\varepsilon(h)}{L+K(p-1)} \qquad (l=1,..,p,\ M \in Z) \tag{5.17}$$

(voir (5.5) et (5.4)) ce qui achève la démonstration du théorème.

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1975