ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
LI (1990)

Релаксационные колебания в системах с переключением

В. А. Плисс (Ленинград)

Zdzisław Opial in memoriam

В приложениях часто встречаются системы с малым параметром при производных, зависимость от времени в которых проявляется в виде периодических переключений. Именно такие системы здесь и рассматриваются.

При определенных условиях исследуется неблуждающее множество, в частности, выясняются обстоятельства, при которых неблуждающее множество содержит нетривиальное гиперболическое базисное подмножество.

1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\mu \frac{dx}{dt} = X(x, t), \tag{1.1}$$

где x и X — n-мерные векторы, а μ — малый положительный параметр. Вектор X имеет вид

$$X(x) = \begin{cases} X_+(x) & \text{при } 2m\omega \leqslant t < (2m+1)\omega, \\ X_-(x) & \text{при } (2m-1)\omega \leqslant t < 2m\omega, \end{cases}$$

где m — целые числа, а $\omega > 0$. Относительно векторов X_+ и X_- будем предполагать, что они непрерывно дифференцируемы при всех x.

Таким образом, при $2m\omega \leqslant t < (2m+1)\omega$ система (1.1) имеет вид

$$\mu \frac{dx}{dt} = X_+(x), \tag{1.2}$$

а при $(2m-1)\omega \leqslant t < 2m\omega$ — вид

$$\mu \frac{dx}{dt} = X_-(x). \tag{1.3}$$

Сделаем в системе (1.1) замену переменной $t = \mu\theta$, тогда системы (1.2) и (1.3) перейдут соответственно в системы

$$\frac{dx}{d\theta} = X_+(x) \tag{1.4}$$

при $2m\omega/\mu \leqslant \theta < (2m+1)\omega/\mu$ и

$$\frac{dx}{d\theta} = X_-(x) \tag{1.5}$$

при $(2m-1)\omega/\mu \leqslant \theta < 2m\omega/\mu$.

Будем предполагать, что системы (1.4) и (1.5) удовлетворяют следующим условиям.

(I) Системы (1.4) и (1.5) диссипативны.

(II) Системы (1.4) и (1.5) представляют собой системы Морса–Смейла без периодических решений.

(III) Системы (1.4) и (1.5) не имеют вполне неустойчивых состояний равновесия.

Обозначим через q_j^+ $(j = 1, \ldots, s^+)$ и q_j^- $(j = 1, \ldots, s^-)$ устойчивые состояния равновесия систем (1.4) и (1.5) соответственно. Через q_{kj}^+ $(j = 1, \ldots, s_k^+)$ и q_{kj}^- $(j = 1, \ldots, s_k^-)$ обозначим состояния равновесия систем (1.4) и (1.5), имеющие ровно k отрицательных характеристических показателей $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. Обозначим через $W_+^s(q_{kj}^+)$ и $W_+^u(q_{kj}^+)$ устойчивое и неустойчивое многообразия состояния равновесия q_{kj}^+ системы (1.4) и через $W_-^s(q_{kj}^-)$ и $W_-^u(q_{kj}^-)$ обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия состояния равновесия q_{kj}^- системы (1.5). Через $U(M, \varepsilon)$ мы будем обозначать ε-окрестность множества M. Выберем достаточно малое число $\Delta > 0$ и введём обозначения

$$D_+^s(q_{kj}^+) = W_+^s(q_{kj}^+) \cap U(q_{kj}^+, \Delta),$$

$$D_+^u(q_{kj}^+) = W_+^u(q_{kj}^+) \cap U(q_{kj}^+, \Delta),$$

$$D_-^s(q_{kj}^-) = W_-^s(q_{kj}^-) \cap U(q_{kj}^-, \Delta),$$

$$D_-^u(q_{kj}^-) = W_-^u(q_{kj}^-) \cap U(q_{kj}^-, \Delta).$$

В силу условия (II) мы можем считать, что $D_+^s(q_{kj}^+)$, $D_+^u(q_{kj}^+)$, $D_-^s(q_{kj}^-)$ и $D_-^u(q_{kj}^-)$ представляют собой перроновы диски. Кроме того, Δ можно считать столь малым, что на любом решении системы (1.4) или (1.5), лежащем на интервале I в Δ-окрестности состояния равновесия, эта система гиперболична с константами $a > 0$ и $\lambda > 0$ на интервале I [3].

Выберем и зафиксируем число Δ, обладающее указанными свойствами.

Пусть $x^+(\theta, \theta_0, x_0)$ и $x^-(\theta, \theta_0, x_0)$ — решения систем (1.4) и (1.5) соответственно с начальными данными $\theta = \theta_0$, $x = x_0$. Введём следующие обозначения:

$$V_+^s(q_{kj}^+) = \{x\colon\ x = x^+(\theta, 0, x_0),\ x_0 \in D_+^s(q_{kj}^+),\ |\theta| \leqslant \theta'\},$$

$$V_+^u(q_{kj}^+) = \{x\colon\ x = x^+(\theta, 0, x_0),\ x_0 \in D_+^u(q_{kj}^+),\ |\theta| \leqslant \theta'\},$$

$$V_-^s(q_{kj}^-) = \{x\colon\ x = x^-(\theta, 0, x_0),\ x_0 \in D_-^s(q_{kj}^-),\ |\theta| \leqslant \theta'\},$$

$$V_-^u(q_{kj}^-) = \{x\colon\ x = x^-(\theta, 0, x_0),\ x_0 \in D_-^u(q_{kj}^-),\ |\theta| \leqslant \theta'\},$$

где θ' — положительное число.

Сделаем следующие предположения относительно „взаимоотношения" систем (1.4) и (1.5).

(IV) Ни одно из состояний равновесия системы (1.4) не лежит ни на одном многообразии $W_-^s(q_{kj}^-)$, $W_-^u(q_{kj}^-)$ системы (1.5); ни одно из состояний равновесия системы (1.5) не лежит ни на одном многообразии $W_+^s(q_{kj}^+)$, $W_+^u(q_{kj}^+)$.

(V) Существует такое θ', что при всех k, m, j и i выполняются равенства $W_+^s(q_{kj}^+) \cap W_-^u(q_{mi}^-) = V_+^s(q_{kj}^+) \cap V_-^u(q_{mi}^-)$ и

$$W_+^u(q_{kj}^+) \cap W_-^s(q_{mi}^-) = V_+^u(q_{kj}^+) \cap V_-^s(q_{mi}^-).$$

В дальнейшем это θ' будем считать фиксированным.

(VI) Все пересечения $V_+^s(q_{kj}^+)$ с $V_-^u(q_{mi}^-)$ и $V_+^u(q_{kj}^+)$ с $V_-^s(q_{mi}^-)$ трансверсальны.

При этих предположениях мы будем изучать поведение решений системы (1.1).

2. Обозначим через Ξ_+ преобразование, осуществляемое сдвигом по траекториям системы (1.4) при $0 \leqslant \theta \leqslant \omega/\mu$, а через Ξ_- — преобразование сдвига по траекториям системы (1.5) при $0 \leqslant \theta \leqslant \omega/\mu$, т.е.

$$\Xi_+ x_0 = x^+\left(\frac{\omega}{\mu}, 0, x_0\right) \quad \text{и} \quad \Xi_- x_0 = x^-\left(\frac{\omega}{\mu}, 0, x_0\right).$$

Положим $\Xi = \Xi_- \Xi_+$, ясно, что Ξ — преобразование Пуанкаре системы (1.1).

Из условия (I) следует [4], что для шара R с центром в начале координат и достаточно большим радиусом выполняется: $\Xi_+ \bar{R} \subset R$, $\Xi_- \bar{R} \subset R$, где $\bar{R}$ — замыкание R, и любое решение системы (1.1), начинающееся вне шара R, уходит в бесконечность при убывании t. Зафиксируем какой-нибудь шар R, обладающий этими свойствами.

Обозначим через $\tilde{S}_j^+$ область притяжения устойчивого состояния равновесия q_j^+ системы (1.4), а через $\tilde{S}_j^-$ — область притяжения состояния равновесия q_j^- системы (1.5) и положим $S_j^+ = \tilde{S}_j^+ \cap R$, $S_j^- = \tilde{S}_j^- \cap R$.

Из условия (IV) и выбора R следует, что каждому j соответствует такое i, что $q_j^+ \in S_i^-$, в этом случае будем писать $q_j^+ \to q_i^-$, и обратно, каждому i соответствует такое j, что $q_i^- \in S_j^+$, в этом случае пишем $q_i^- \to q_j^+$. Отсюда вытекает, что если ε достаточно мало, то

$$U(q_j^+, \varepsilon) \subset S_j^+ \backslash U(\partial S_j^+, \varepsilon), \quad \text{где } \partial S_j^+ \text{ — граница } S_j^+,$$

$$U(q_j^+, \varepsilon) \subset S_i^- \backslash U(\partial S_i^-, \varepsilon), \quad U(q_i^-, \varepsilon) \subset S_i^- \backslash U(\partial S_i^-, \varepsilon),$$

$$U(q_i^-, \varepsilon) \subset S_j^+ \backslash U(\partial S_j^+, \varepsilon).$$

Если μ достаточно мало, то $\Xi_+(S_j^+ \backslash U(\partial S_j^+, \varepsilon)) \subset U(q_j^+, \varepsilon)$ и $\Xi_-(S_i^- \backslash U(\partial S_i^-, \varepsilon)) \subset U(q_i^-, \varepsilon)$, и при этом оба эти преобразования будут сжимающими.

Пусть состояния равновесия $q_{j_1}^+, \ldots, q_{j_k}^+$ и $q_{i_1}^-, \ldots, q_{i_k}^-$ таковы, что $q_{j_1}^+ \to q_{i_1}^- \to q_{j_2}^+ \to q_{i_2}^- \to \ldots \to q_{j_k}^+ \to q_{i_k}^- \to q_{j_1}^+$, $q_{j_s}^+ = q_{j_r}^+$ и $q_{i_s}^- \neq q_{i_r}^-$ при $s \neq r$, тогда будем говорить, что эти состояния равновесия образуют цикл длины k. Нетрудно видеть, что для такого цикла справедливо $\Xi^k(S_{j_1}^+ \backslash U(\partial S_{j_1}^+, \varepsilon)) \subset U(q_{j_1}^+, \varepsilon)$ и преобразование Ξ^k является сжимающим, если μ достаточно мало.

Отсюда следует, что существует точка $q \in U(q_{j_1}^+, \varepsilon)$ такая, что $\Xi^k q = q$, значит, решение $\varphi(t) = x(t, 0, q)$ системы (1.1) имеет период $2k\omega$ и является асимптотически устойчивым. Обозначим через S пересечение области притяжения этого решения с пространством $t = 0$. Из сказанного следует, что

$$S_{j_1}^+ \backslash U(\partial S_{j_1}, \varepsilon) \subset S.$$

Возьмем устойчивое состояние равновесия $q_{j_1}^+$. Оно порождает цепочку $q_{j_1}^+ \to q_{i_1}^- \to q_{j_2}^+ \to q_{i_2}^- \to \ldots$ Ввиду конечности числа состояний равновесия систем (1.4) и (1.5) эта цепочка содержит цикл длины k. Может случиться, что этот цикл имеет вид $q_{j_1}^+ \to q_{i_1}^- \to \ldots \to q_{i_k}^- \to q_{j_1}^+$, а может оказаться, что этот цикл начинается с точки $q_{j_r}^+$ при $r > 1$. В последнем случае любое решение системы (1.1), начинающееся в $S_{j_1}^+ \backslash U(\partial S_{j_1}^+, \varepsilon)$ стремится при $t \to +\infty$ к устойчивому периодическому решению, порождаемому нашим циклом.

Обозначим через $\varphi_i(t)$ $(i = 1, \ldots, s)$ все такие устойчивые периодические решения системы (1.1).

Таким образом, справедливы следующие утверждения.

Теорема 2.1. *Любое решение, начинающееся при $t = 0$ в множестве $\bigcup_{j=1}^{s^+} (S_j^+ \backslash U(\partial S_j^+, \varepsilon))$, стремится к устойчивому периодическому решению при $t \to +\infty$.*

Теорема 2.2. *Любое решение системы* (1.1), *начинающееся при* $t = \omega$ *в множестве* $\bigcup_{i=1}^{s^-} (S_i^- \backslash U(\partial S_i^-, \varepsilon))$, *стремится к устойчивому периодическому решению при* $t \to +\infty$.

3. Введем следующие обозначения

$$W_+^s = \bigcup_{j,k} W_+^s(q_{kj}^+), \qquad W_+^u = \bigcup_{j,k} W_+^u(q_{kj}^+),$$

$$W_-^s = \bigcup_{j,k} W_-^s(q_{kj}^-), \qquad W_-^u = \bigcup_{j,k} W_-^u(q_{kj}^-).$$

Из результатов работы [2] следует, что

$$W_+^s = \bigcup_{j=1}^{s^+} \partial \tilde{S}_j^+, \qquad W_-^s = \bigcup_{j=1}^{s^-} \partial \tilde{S}_j^-. \tag{3.1}$$

Из условий (I), (II), (III) вытекает, что граница области притяжения при убывании t бесконечно удаленной точки системы (1.4) совпадает с $W_+^u \cup \bigcup_{j=1}^{s^+} q_j^+$, а граница такой же области для системы (1.5) совпадает с $W_-^u \cup \bigcup_{j=1}^{s^-} q_j^-$. Отсюда и из теорем 2.1 и 2.2 вытекают следующие утверждения.

Лемма 3.1. *Любое решение системы* (1.1), *начинающееся при* $t = 0$ *в множестве* $R \backslash U(W_+^s, \varepsilon)$, *стремится к одному из устойчивых периодических решений* $\varphi_i(t)$ *при* $t \to +\infty$.

Лемма 3.2. *Любое решение системы* (1.1), *начинающееся при* $t = 0$ *в множестве* $R \backslash U\left(W_-^u \cup \bigcup_{j=1}^{s^-} q_j^-, \varepsilon\right)$, *уходит в бесконечность при убывании* t.

Лемма 3.3. *Любое решение системы* (1.1), *начинающееся при* $t = \omega$ *в* $R \backslash U(W^s_-, \varepsilon)$, *стремится к одному из решений* $\varphi_i(t)$ *при* $t \to +\infty$.

Лемма 3.4. *Любое решение системы* (1.1), *начинающееся при* $t = \omega$ *в* $R \backslash U\left(W_+^u \cup \bigcup_{j=1}^{s^+} q_j^+, \varepsilon\right)$, *уходит в бесконечность при убывании* t.

Все эти леммы справедливы, разумеется, при любом $\varepsilon > 0$ и достаточно малом μ.

Из лемм 3.1–3.4 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Любое неблуждающее решение системы* (1.1), *отличное от решений* $\varphi_i(t)$, *при* $t = 0$ *проходит через множество* $U(W_+^s, \varepsilon) \cap U(W_-^u, \varepsilon) \cap R$, *а при* $t = \omega$ — *через множество* $U(W_+^u, \varepsilon) \cap U(W_-^s, \varepsilon) \cap R$, *при любом* ε *и достаточно малом* μ.

Лемма 3.5. *Существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что если*

$$\xi \in U\left(V_+^s(q_{kj}^+),\ \varepsilon_0\right) \cap U(W_-^u,\ \varepsilon_0),$$

а

$$x^+(\omega/\mu,\ 0,\ \xi) \in U(W_+^u,\ \varepsilon_0) \cap U(W_-^s,\ \varepsilon_0),$$

то

$$x^+(\omega/\mu,\ 0,\ \xi) \in U\left(V_+^u(q_{kj}^+),\ \varepsilon_0\right).$$

Доказательство. Допустим, вопреки утверждению леммы, что существуют последовательности точек ξ_i и чисел ε_i и μ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ такие, что $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$,

$$\xi_i \in U\left(V_+^s(q_{kj}^+), \varepsilon_i\right) \cap U(W_-^u,\ \varepsilon_i),$$

$$x^+(\omega/\mu_i,\ 0,\ \xi_i) \in U(W_+^u,\ \varepsilon_i) \cap U(W_-^s,\ \varepsilon_i)$$

и

$$x^+(\omega/\mu_i,\ 0,\ \xi_i) \notin U\left(V_+^u(q_{kj}^+),\ \varepsilon_i\right).$$

По условию (V) пересечения $V_+^s(q_{kj}^+) \cap W_-^u$ и $W_+^u \cap W_-^s$ компактны, поэтому мы можем считать, что последовательности ξ_i и $x(\omega/\mu_i, 0, \xi_i)$ сходятся. Пусть $\lim\limits_{i\to\infty} \xi_i = p_0$ и $\lim\limits_{i\to\infty} x^+(\omega/\mu_i, 0, \xi_i) = p_1$, тогда $p_0 \in V_+^s(q_{kj}^+) \cap W_-^u$, $p_1 \in W_+^u \cap W_-^s$ и $p_1 \notin V_-^u(q_{kj}^+)$. По условию (V) существуют точки $q_{k_1 j_1}^+ \neq q_{kj}^+$ и q_{ml}^- такие, что $p_1 \in V_+^u(q_{k_1 j_1}^+) \cap V_-^s(q_{ml}^-)$.

Благодаря наличию отрезков траекторий $x^+(\theta, 0, \xi_i)$ $(0 \leqslant \theta \leqslant \omega/\mu_i)$ системы (1.4), по свойству систем Морса–Смейла (см. по этому поводу [5]), многообразие $W_+^u(q_{kj}^+)$ содержится в предельном множестве неустойчивого многообразия $W_+^u(q_{kj}^+)$. По условию (VI) пересечение $W_+^u(q_{k_1 j_1}^+)$ с $W_-^s(q_{ml}^-)$ трансверсально, следовательно, $W_+^u(q_{kj}^+) \backslash V_+^u(q_{kj}^+)$ пересекается с $W_-^s(q_{ml}^-)$, что противоречит условию (V).

Противоречие и доказывает лемму.

Точно так же справедлива и следующая лемма.

Лемма 3.6. *Существует такое* $\varepsilon_1 > 0$, *что, если*

$$\xi \in U\left(V_-^s(q_{mi}^-),\ \varepsilon_1\right) \cap U(W_+^u,\ \varepsilon_1),$$

а

$$x^-(\omega/\mu,\ 0,\ \xi) \in U(W_-^u,\ \varepsilon_1) \cap U(W_+^s,\ \varepsilon_1),$$

то

$$x^-(\omega/\mu,\ 0,\ \xi) \in U\left(V_-^u(q_{mi}^-),\ \varepsilon_1\right).$$

Пусть $p_0 \in W_+^s(q_{kj}^+)$, $p_1 \in W_+^u(q_{kj}^+)$, тогда будем писать $p_0 \to q_{kj}^+ \to p_1$, и, если $p_2 \in W_-^s(q_{mi}^-)$, $p_3 \in W_-^u(q_{mi}^-)$, то будем писать $p_2 \to q_{mi}^- \to p_3$.

Леммы 3.5 и 3.6 позволяют доказать следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Существуют $\varepsilon_2 > 0$ и $\mu_2 > 0$ такие, что, если точка $p_0 \in W^s_+ \cap W^u_-$ такова, что через $U(p_0, \varepsilon_2)$ при $t = 0$ проходит неблуждающее решение системы* (1.1) *с $\mu < \mu_2$, то существует цикл*

(3.2) $$p_0 \to q^+_{kj_1} \to p_1 \to q^-_{ki_1} \to p_2 \to \dots \to q^+_{kj_\nu} \to p_{2\nu-1} \to q^-_{ki_\nu} \to p_0.$$

Доказательство. Одноименные (устойчивое или неустойчивое) многообразия состояний равновесия одной и той же системы не пересекаются, поэтому существует такое $\varrho > 0$, что

$$\operatorname{dist}\left(V^s_+(q^+_{k_1j_1}),\ V^s_+(q^+_{k_2j_2})\right) > \varrho, \qquad \operatorname{dist}\left(V^u_+(q^+_{k_1j_1}),\ V^u_+(q^+_{k_2j_2})\right) > \varrho,$$
$$\operatorname{dist}\left(V^s_-(q^-_{k_1j_1}),\ V^s_-(q^-_{k_2j_2})\right) > \varrho, \qquad \operatorname{dist}\left(V^u_-(q^-_{k_1j_1}),\ V^u_-(q^-_{k_2j_2})\right) > \varrho,$$

если $(k_1, j_1) \neq (k_2, j_2)$.

Выберем $\varepsilon_2 < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varrho/3\}$, где ε_0 и ε_1 из лемм 3.5 и 3.6, а по нему μ_2 так, чтобы были выполнены утверждения лемм 3.1–3.4. Покажем, что эти ε_2 и μ_2 есть искомые.

По условию теоремы существует такая точка ξ и такое натуральное ν, что $\xi \in U(p_0, \varepsilon_2)$ и $x(2\nu\omega, 0, \xi) \in U(p_0, \varepsilon_2)$. По условию $p_0 \in W^s_+ \cap W^u_-$, поэтому существует седловое состояние равновесия $q^+_{k_1j_1}$ системы (1.4) такое, что $p_0 \in V^s_+(q^+_{k_1j_1})$. Как следует из сказанного в начале п. 3, $x(\omega, 0, \xi) \in U(W^u_+, \varepsilon_2) \cap U(W^s_-, \varepsilon_2)$, а отсюда по лемме 3.5 следует, что

$$x(\omega, 0, \xi) \in U\left(V^u_+(q^+_{k_1j_1}), \varepsilon_2\right) \cap U(W^s_-, \varepsilon_2).$$

Обозначим через p_1 такую точку, что $p_1 \in V^u_+(q^+_{k_1j_1}) \cap W^s_-$ и $x(\omega, 0, \xi) \in U(p_1, \varepsilon_2)$. По смыслу наших обозначений имеем $p_0 \to q^+_{k_1j_1} \to p_1$. Точка $p_1 \in V^u_+(q^+_{k_1j_1}) \cap W^s_-$, значит, существует такое состояние равновесия $q^-_{m_1i_1}$ системы (1.5), что $p_1 \in V^u_+(q^+_{k_1j_1}) \cap V^s_-(q^-_{m_1i_1})$. Далее, используя поочередно леммы 3.6 и 3.5, убедимся в существовании цепочки

(3.3) $$p_0 \to q^+_{k_1j_1} \to p_1 \to q^-_{m_1i_1} \to p_2 \to \dots \to q^+_{k_\nu j_\nu} \to p_{2\nu-1} \to q^-_{m_\nu i_\nu} \to p_{2\nu}.$$

При этом окажется, что

(3.4) $$x(\alpha\omega, 0, \xi) \in U(p_\alpha, \varepsilon_2) \qquad (\alpha = 0, 1, \dots, 2\nu).$$

Согласно (3.4), $\operatorname{dist}\left(x(2\nu\omega, 0, \xi), p_{2\nu}\right) < \varepsilon_2$. С другой стороны, по выбору ξ, $\operatorname{dist}\left(x(2\nu\omega, 0, \xi), p_0\right) < \varepsilon_2$, следовательно,

(3.5) $$\operatorname{dist}(p_0, p_{2\nu}) < 2\varepsilon_2.$$

Точка $p_{2\nu} \in V^u_-(q^-_{m_\nu i_\nu}) \cap W^s_+$, значит, при некоторых l и j $p_{2\nu} \in V^s_+(q^+_{lj})$. Отсюда и из (3.5) следует, что

$$\operatorname{dist}\left(V^s_+(q^+_{lj}),\ V^s_+(q^+_{k_1j_1})\right) < 2\varepsilon_2 < \varrho.$$

Отсюда по выбору ϱ следует, что $q^+_{k_1j_1} = q^+_{lj}$. Точка $p_0 \in V^s_+(q^+_{k_1j_1}) \cap W^u_-$, значит, при некоторых l и j, $p_0 \in V^s_+(q^+_{k_1j_1}) \cap V^u_-(q^-_{lj})$, отсюда так же, как и выше, следует, что $q_{lj}^- = q_{m_\nu i_\nu}^-$. Таким образом, $p_0 \in V_+^s(q_{k_1 j_1}^+) \cap V_-^u(q_{m_\nu i_\nu}^-)$ и $p_{2\nu} \in V_+^s(q_{k_1 j_1}^+) \cap V_-^u(q_{m_\nu i_\nu}^-)$. Следовательно, имеет место $p_{2\nu} \to q_{m_\nu i_\nu}^- \to p_0$, и наряду с цепочкой (3.4) существует цикл

$$p_0 \to q_{k_1 j_1}^+ \to p_1 \to q_{m_1 i_1}^- \to p_2 \to \ldots \to q_{k_\nu j_\nu}^+ \to p_{2\nu-1} \to q_{m_\nu i_\nu}^- \to p_0.$$

Покажем теперь, что в этом цикле $k_1 = m_1 = \ldots = k_\nu = m_\nu$. Действительно, p_1 лежит на пересечении $V_+^u(q_{k_1 j_1}^+) \cap V_-^s(q_{m_1 i_1}^-)$, а по условию (VI) это пересечение трансверсально, следовательно,

$$\dim V_+^u(q_{k_1 j_1}^+) + \dim V_-^s(q_{m_1 i_1}^-) \geqslant n.$$

Отсюда следует неравенство $k_1 \leqslant m_1$. Точно так же, $m_1 \leqslant k_2 \leqslant m_2 \leqslant \ldots \leqslant k_\nu \leqslant m_\nu$. Поскольку $p_0 \in V_+^s(q_{k_1 j_1}^+) \cap V_-^u(q_{m_\nu i_\nu}^-)$, то $m_\nu \leqslant k_1$. Итак, имеем $k_1 \leqslant m_1 \leqslant k_2 \leqslant \ldots \leqslant m_\nu \leqslant k_1$. А это возможно лишь при условии, что $k_1 = m_1 = \ldots = m_\nu = k$.

Теорема, таким образом, доказана.

Следствие 3.1. *В цикле* (3.2) *все точки* p_l — *изолированные точки пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия системы* (1.4) *и* (1.5).

Таким образом, если не существует циклов вида (3.2), то неблуждающее множество системы (1.1) состоит из единственного устойчивого периодического решения.

4. Для дальнейшего изучения неблуждающего множества системы (1.1) нам понадобится следующая лемма.

Рассмотрим линейную систему уравнений

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x, \tag{4.1}$$

где матрица $P(t)$ непрерывна при $t \leqslant 0$ и $t \geqslant 0$ и ограничена: $|P(t)| \leqslant h$ при всех t. Обозначим через $\Phi(t)$ фундаментальную матрицу решений системы (4.1). Будем предполагать, что выполняются следующие условия.

Существуют константы $a > 0$, $\lambda > 0$ и линейные подпространства $K_-^u(t)$, $K_-^s(t)$ при $t \leqslant 0$ и $K_+^u(t)$, $K_+^s(t)$ при $t \geqslant 0$ такие, что $\dim K_-^u(t) + \dim K_-^s(t) = n$,

$$\dim K_+^u(t) + \dim K_+^s(t) = n, \qquad \dim K_-^u = \dim K_+^u = \text{const},$$

$1 \leqslant \dim K_-^u \leqslant n-1$, и, если вектор $x_0 \in K_-^u(t_0)$, $t_0 \leqslant 0$, то при любом $t \leqslant t_0$ выполняется неравенство

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leqslant a|x_0|e^{\lambda(t-t_0)}; \tag{4.2}$$

если $x_0 \in K_-^s(t_0)$, $t_0 \leqslant 0$, то при $t_0 \leqslant t \leqslant 0$ выполняется неравенство

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leqslant a|x_0|e^{-\lambda(t-t_0)}; \tag{4.3}$$

если $x_0 \in K^u_+(t_0)$, $t_0 \geqslant 0$, то при $0 \leqslant t \leqslant t_0$ выполняется неравенство (4.2), и, если $x_0 \in K^s_+(t_0)$, $t_0 \geqslant 0$, то при $t \geqslant t_0$ выполняется неравенство (4.3).

Обозначим через $K^u(t)$ и $K^s(t)$ следующие линейные подпространства:

$$K^u(t) = \begin{cases} K^u_-(t) & \text{при } t \leqslant 0, \\ \Phi(t)\Phi^{-1}(0)K^u_-(0) & \text{при } t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$K^s(t) = \begin{cases} \Phi(t)\Phi^{-1}(0)K^s_+(0) & \text{при } t \leqslant 0, \\ K^s_+(t) & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 4.1. *Предположим, что* $\measuredangle\, K^u_-(0), K^s_+(0) = \alpha > 0$, *тогда существует такое* $A(a, \lambda, \alpha, h)$, *что, если* $x_0 \in K^u(t_0)$, *то при* $t \leqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leqslant A|x_0|e^{\lambda(t-t_0)},$$

а если $x_0 \in K^s(t_0)$, *то при* $t \geqslant t_0$ *выполняется неравенство*

$$|\Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x_0| \leqslant A|x_0|e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Доказательство этой леммы по существу не отличается от доказательств соответствующих утверждений из [3] и потому здесь не приводится.

5. Предположим, что существует цикл вида (3.2). В этом случае система (1.1) имеет периодическое решение, расположенное в „окрестности" этого цикла. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. *Если существует цикл вида* (3.2), *то по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\mu_0 > 0$ *такое, что при* $\mu \leqslant \mu_0$ *система* (1.1) *имеет* $2\nu\omega$-*периодическое решение* $x = \Psi(t)$, *это решение имеет* k *отрицательных и* $(n-k)$ *положительных характеристических показателей. При этом* $\Psi(l\omega) \in U(p_l, \varepsilon)$ $(l = 0, 1, \ldots, 2\nu-1)$.

Доказательство. Возьмем положительное число ε. Из λ-леммы [1] следует, что если μ достаточно мало, то пересечение $G_1 = \Xi_+ U(p_0, \varepsilon) \cap U(p_1, \varepsilon)$ не пусто. Это пересечение представляет собой тонкий слой, граница которого, лежащая внутри $U(p_1, \varepsilon)$, близка в смысле C^1 к той части $W^u_+(q^+_{kj_1})$, что лежит внутри $U(p_1, \varepsilon)$. Пусть $F_1 = \Xi_+^{-1} G_1$. Рассмотрим решение $x^+(\theta, 0, x_0)$, $x_0 \in F_1$; как видно из доказательства леммы 3.5, при $\theta' \leqslant \theta \leqslant \omega/\mu - \theta'$, $x^+(\theta, 0, x_0) \in U(q^+_{kj_1}, \Delta)$, где числа Δ и θ' введены в п. 1. Отсюда следует, что преобразование Ξ_+ гиперболично на F_1.

По условию (VI) пересечение $W^u_+(q^+_{kj_1})$ с $W^s_-(q^-_{ki_1})$ в точке p_1 трансверсально, поэтому и слой G_1 „трансверсально" пересекает $W^s_-(q^-_{ki_1})$ в окрестности точки p_1. Отсюда, опять-таки в силу λ-леммы, следует, что пересечение $G_2 = \Xi_- G_1 \cap U(p_2, \varepsilon)$ представляет собой тонкий слой, „близкий" к $W^u_-(q^-_{ki_1}) \cap U(p_2, \varepsilon)$. Положим $F_2 = \Xi^{-1} G_2$. Из леммы 4.1 следует, что преобразование Ξ на F_2 гиперболично.

Продолжая таким же образом движение вдоль цикла (3.2), мы убедимся в том, что пересечение $G_{2\nu} = \Xi^{\nu}U(p_0, \varepsilon) \cap U(p_0, \varepsilon)$ не пусто, „трансверсально" пересекается с $F_{2\nu} = \Xi^{-\nu}G_{2\nu}$, преобразование Ξ^{ν} na $F_{2\nu}$ гиперболично.

Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Различные циклы вида (3.2) могут иметь общие точки, тогда они образуют систему циклов. Уточним это понятие.

Определение 5.1. Набор точек

$$p_0, p_1, \ldots, p_\alpha, q_{kj_1}^{+}, \ldots, q_{kj_\beta}^{+}, q_{ki_1}^{-}, \ldots, q_{ki_\gamma}^{-} \tag{5.1}$$

будем называть *системой циклов*, если любые две точки из (5.1) входят в состав цикла вида (3.2), целиком состоящего из точек нашего набора.

Определение 5.2. Систему циклов назовем *полной*, если не существует цикла вида (3.2), состоящего как из точек набора (5.1), так и из точек, в него не входящих.

Разумеется, единственный цикл вида (3.2) может оказаться полной системой циклов. Могут, однако, встретиться и более сложные ситуации. Рассмотрим, например, набор точек p_0, p_1, p_2, q_{k1}^{+}, $q_{k_1}^{-}$ таких, что они образуют два цикла $p_0 \to q_{k1}^{+} \to p_1 \to q_{k1}^{-} \to p_0$ и $p_0 \to q_{k1}^{+} \to p_2 \to q_{k1}^{-} \to p_0$. Нетрудно видеть, что они образуют ещё и третий цикл $p_0 \to q_{k1}^{+} \to p_1 \to q_{k1}^{-} \to p_0 \to q_{k1}^{+} \to p_2 \to q_{k1}^{-} \to p_0$, отличный от двух предыдущих. Такой набор точек может служить полной системой циклов для некоторой системы (1.1).

Теорема 5.2. *Предположим, что существует полная система циклов вида* (5.1), *тогда по любому* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\mu_0 > 0$, *что при* $\mu \leqslant \mu_0$ *система* (1.1) *имеет гиперболическое базисное множество* Ω_ϱ *такое, что любое решение из этого множества при* $t = m\omega$ *с целым* m *проходит через* ε*-окрестность одной из точек* $p_0, \ldots, p_\alpha$, *и через* ε*-окрестность каждой из точек* $p_0, \ldots, p_\alpha$ *проходит решение из* Ω_ϱ *либо при* $t = 0$, *либо при* $t = \omega$.

Доказательство этой теоремы по существу не отличается от доказательства теоремы 5.1, нужно только принять во внимание теорему 3.2.

Если полная система циклов, фигурирующая в теореме 5.2, не вырождается в единственный цикл, то и базисное множество Ω_ϱ не сводится к единственному периодическому решению. В этом случае входящие в Ω_ϱ решения кодируются по обычным правилам символической динамики по „посещениям" окрестностей $U(p_i)$ $(i = 1, \ldots, \alpha)$ в моменты времени $t = m\omega$.

Резюмируя все сказанное, можем сделать следующие выводы.

(a) Неблуждающее множество системы (1.1) гиперболично.

(b) Если не существует циклов вида (3.2), то неблуждающее множество системы (1.1) состоит из единственного устойчивого периодического решения.

(c) Если не существуют системы циклов, не вырождающиеся в единственный цикл, то неблуждающее множество системы (1.1) состоит из конечного числа периодических решений.

(d) Каждой полной системе циклов, не вырождающейся в единственный цикл, соответствует нетривиальное базисное множество.

6. Примером рассмотренной системы может служить уравнение типа Дуффинга:

$$\mu^2\frac{d^2x}{dt^2}+\mu\frac{dx}{dt}+f(x)=q(t), \tag{6.1}$$

где μ — малый параметр, $q(t)=\operatorname{sign}\sin t$, а $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция такая, что $f(x)\operatorname{sign}x\to\infty$ при $x\to\infty$, и уравнения $f(x)+1=0$ и $f(x)-1=0$ имеют лишь простые корни.

Полагая $\mu\dot{x}=y$, приходим к системе

$$\mu\frac{dx}{dt}=y,\qquad \mu\frac{dy}{dt}=-y-f(x)+q(t), \tag{6.2}$$

которая и является в нашем случае системой (1.1). Роль систем (1.4) и (1.5) играют системы

$$\frac{dx}{d\theta}=y,\qquad \frac{dy}{d\theta}=-y-f(x)+1 \tag{6.3}$$

и

$$\frac{dx}{d\theta}=y,\qquad \frac{dy}{d\theta}=-y-f(x)-1. \tag{6.4}$$

Нетрудно убедиться в том, что эти системы удовлетворяют условиям (I), (III). Условия (II), (IV), (V) и (VI) выполняются не при всяких $f(x)$. Однако проверка их для многих классов $f(x)$ вполне осуществима. В случае выполнения условий (II), (IV), (V) и (VI) исследование неблуждающего множества системы (6.2) проводится по описанным выше правилам.

Литература

[1] J. Palis, *On Morse–Smale dynamical systems*, Topology 8, 4 (1969), 385–404.

[2] С. Ю. Пилюгин, В. А. Плисс, *Граница устойчивого инвариантного множества систем Морса–Смейла*, Диффер. уравнения 14, 11 (1978), 1997–2001.

[3] В. А. Плисс, *Множества линейных систем дифференциальных уравнений с равномерно ограниченными решениями*, ibidem 16, 9 (1980), 1599–1616.
[4] —, *Нелокальные проблемы теории колебаний*, М.-Л., Наука 1964.
[5] S. Smale, *Morse inequalities for a dynamical system*, Bull. Amer. Math. Soc. 66. 1 (1960), 43–49.

Reçu par la Rédaction le 29.02.1988