ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXV (1972)

Bestimmung aller algebraischen Komitanten des symmetrischen Übertragungsparameters

von I. MAKAI (Debrecen)

In komitantentheoretischen Untersuchungen der kovarianten Ableitung der geometrischen Objekte spielt die Bestimmung gewißer algebraischen Komitanten eines symmetrischen Übertragungsparameters Γ^i_{jk}, das sich bei einer zuläßigen Transformation

$$\bar{x}^i = \bar{x}^i(x^j), \qquad \det\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^j}\right) \neq 0 \tag{1}$$

der Koordinaten des Raumes X_n nach

$$\bar{\Gamma}^i_{jk} = \bar{A}^i_p A^q_j A^r_k \Gamma^p_{qr} + \bar{A}^i_p A^p_{jk} \tag{2}$$
$$\left(\bar{A}^i_j \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j},\ A^i_j \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j},\ A^i_{jk} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\right)$$

transformiert, eine wichtige Rolle. Wir werden in dieser Arbeit *alle algebraische Komitanten von* Γ^i_{jk} bestimmen. Es gilt nämlich der folgende

SATZ. *Ist* Ω_A $(A = 1, \ldots, N)$ *eine algebraische Komitante des Übertragungsparameters* $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{(jk)}$, *und* Ω_A *erweist sich gleichzeitig ein Objekt zweiter Klasse mit Transformationsformel*

$$\bar{\Omega}_A = F_A(\Omega_B; A^i_j; A^i_{jk}), \tag{3}$$

so muß Ω_A *die Gestalt*

$$\Omega_A = F_A(\omega_B; \delta^i_j; \Gamma^i_{jk}) \tag{4}$$

haben, wo die Skalare ω_B $(B = 1, \ldots, N)$ *in allen Punkte von* X_n *die Bedingungen*

$$\omega_A = F_A(\omega_B; A^i_j; 0) \qquad (A = 1, \ldots, N) \tag{5}$$

erfüllen sollen. Umgekehrt, wenn $F_A(\Omega_B; X^i_j; X^i_{jk})$ *ein solches Funktionensystem ist, das die Identitäten*

$$F_A\big(F_B(\Omega_C; X^i_j; X^i_{jk}); Y^i_j; Y^i_{jk}\big) = F_A(\Omega_B; X^i_p Y^p_j; X^i_{pq} Y^p_j Y^q_k + X^i_p Y^p_{jk}), \tag{6}$$

$$\big(\det(X^i_p Y^p_j) \neq 0;\ X^i_{jk} = X^i_{(jk)};\ Y^i_{jk} = Y^i_{(jk)}\big), \tag{*}$$

$$F_A(\Omega_B; \delta^i_j; 0) = \Omega_A \tag{7}$$

erfüllt, und (5) *gilt für die Skalare* ω_A *in allen Punkten von* X_n, *dann stellt* (4) *ein Objekt mit Transformationsformel* (3) *dar. Ist* (5) *widerspruchsvoll, so gibt es keine algebraische Komitante von* Γ^i_{jk} *mit Transformationsformel* (3).

Beweis. Wenn Ω_A ein Objekt mit der Transformationsformel (3) ist, so müßen die Funktionen F_A für alle Objektenwerte Ω_A und für alle Werte X^i_j, Y^i_j, X^i_{jk}, Y^i_{jk}, die die Relationen (*) genügen, die Identitäten (6), (7) erfüllen (vgl. [1], S. 12, (15), (16)). Mit Hilfe der Substitutionen

$$X^i_j = \delta^i_j, \qquad Y^i_j = \delta^i_j$$

bzw.

$$Y^i_j = \delta^i_j, \qquad X^i_{jk} = 0$$

bzw.

$$X^i_j = \delta^i_j, \qquad Y^i_{jk} = 0$$

bzw.

$$Y^i_j = \delta^i_j$$

folgt es aus (6)

$$\underset{2}{F}_A(\Omega_B; X^i_{jk} + Y^i_{jk}) = \underset{2}{F}_A\big(\underset{2}{F}_B(\Omega_C; X^i_{jk}); Y^i_{jk}\big) \tag{8}$$

bzw.

$$\underset{2}{F}_A\big(\underset{1}{F}_B(\Omega_C; X^i_j); Y^i_{jk}\big) = F_A(\Omega_B; X^i_j; X^i_p Y^p_{jk}), \tag{9}$$

also

$$F_A(\Omega_B; X^i_j; X^i_{jk}) = \underset{2}{F}_A\big(\underset{1}{F}_B(\Omega_C; X^i_j); \overline{X}^i_p X^p_{jk}\big) \tag{10}$$

$\big((\overline{X}^i_j) \overset{\mathrm{df}}{=} (X^i_j)^{-1}\big)$ bzw.

$$\underset{1}{F}_A\big(\underset{2}{F}_B(\Omega_C; X^i_{jk}); Y^i_j\big) = F_A(\Omega_B; Y^i_j; X^i_{pq} Y^p_j Y^q_k),$$

also

$$F_A(\Omega_B; X^i_j; X^i_{jk}) = \underset{1}{F}_A\big(\underset{2}{F}_B(\Omega_C; X^i_{pq}\overline{X}^p_j \overline{X}^q_k); X^i_j\big) \tag{11}$$

bzw.

$$\underset{2}{F}_A\big(F_B(\Omega_C; X^i_j; X^i_{jk}); Y^i_{jk}\big) = F_A(\Omega_B; X^i_j; X^i_{jk} + X^i_p Y^p_{jk}), \tag{12}$$

wo $\underset{1}{F}_A$, $\underset{2}{F}_A$ nach

$$\underset{1}{F}_A(\Omega_B; X^i_j) \overset{\mathrm{df}}{=} F_A(\Omega_B; X^i_j; 0); \qquad \underset{2}{F}_A(\Omega_B; X^i_{jk}) \overset{\mathrm{df}}{=} F_A(\Omega_B; \delta^i_j; X^i_{jk}).$$

definiert sind.

Nach der Voraussetzung unseres Satzes soll Ω_A eine algebraische Komitante des Übertragungsparameters Γ^i_{jk} sein

$$\Omega_A = \varphi_A(\Gamma^i_{jk}). \tag{13}$$

Die Beziehung (13) ist gegenüber (1) invariant

$$\varphi_A(\overline{\Gamma}^i_{jk}) = F_A\big(\varphi_B(\Gamma^i_{jk}); A^i_j; A^i_{jk}\big). \tag{14}$$

Die Identitäten (14) liefern in einem fixen Punkt $\overset{0}{x}$ von X_n ein Funktionalgleichungssystem mit „freien" Parametern A^i_j, A^i_{jk} $\big(\det(A^i_j) \neq 0;$ $A^i_{jk} = A^i_{(jk)}\big)$ bezüglich des Funktionensystems φ_A. Wählen wir die Werte A^i_j, A^i_{jk} in (14) nach

$$A^i_j = \delta^i_j, \; A^i_{jk} = -\Gamma^i_{jk},$$

so bekommen wir

$$\omega_A = \underset{2}{F}_A\big(\varphi_B(\Gamma^i_{jk}); -\Gamma^i_{jk}\big) \qquad \big(\omega_A \overset{\text{df}}{=} \varphi_A(0)\big),$$

bzw., wegen (8) und (7),

$$\varphi_A(\Gamma^i_{jk}) = \underset{2}{F}_A(\omega_B; \Gamma^i_{jk}). \tag{15}$$

Setzen wir diese Gestalt von φ_A in (14) ein, dann ergibt sich

$$\underset{2}{F}_A(\omega_B; \bar{\Gamma}^i_{jk}) = F_A\big(\underset{2}{F}_B(\omega_C; \Gamma^i_{jk}); A^i_j; A^i_{jk}\big). \tag{16}$$

Wir werden beweisen, daß (16) dann und nur dann eine Identität ist, wenn die Konstanten ω_A $\big(= \omega_A(\overset{0}{x})\big)$ die Gleichheiten (5) befriedigen. Man kann an der rechten Seite von (16) stehenden Ausdruck folgendermaßen umformen:

$$\begin{aligned} F_A\big(\underset{2}{F}_B(\omega_C; \Gamma^i_{jk}); A^i_j; A^i_{jk}\big) &\overset{(10)}{=} \underset{2}{F}_A\big(\underset{1}{F}_B\big(\underset{2}{F}_C(\omega_D; \Gamma^i_{jk}); A^i_j\big); \bar{A}^i_p A^p_{jk}\big) \\ &\overset{(11)}{=} \underset{2}{F}_A\big(F_B(\omega_C; A^i_j; \Gamma^i_{pq} A^p_j A^q_k); \bar{A}^i_p A^p_{jk}\big) \\ &\overset{(12)}{=} F_A(\omega_B; A^i_j; A^i_p \bar{\Gamma}^p_{jk}) \\ &\overset{(9)}{=} \underset{2}{F}_A\big(\underset{1}{F}_B(\omega_C; A^i_j); \bar{\Gamma}^i_{jk}\big). \end{aligned}$$

Wir sehen, daß (16) mit

$$\underset{2}{F}_A(\omega_B; \bar{\Gamma}^i_{jk}) = \underset{2}{F}_A\big(\underset{1}{F}_B(\omega_C; A^i_j); \bar{\Gamma}^i_{jk}\big) \tag{17}$$

äquivalent ist. Mit Hilfe von (8) und (7) kann man sich von der Äquivalenz des (17) und (5) leicht überzeugen, damit haben wir alle unsere Behauptungen bewiesen.

Folgerungen.

(a) Im Falle, in dem das Objekt Ω_A eine lineare Transformationsformel besitzt

$$\bar{\Omega}_A = F^B_A(A^i_j; A^i_{jk})\,\Omega_B + G_A(A^i_j; A^i_{jk}),$$

geht (4) bzw. (5) in

$$\Omega_A = F^B_A(\delta^i_j, \Gamma^i_{jk})\,\omega_B + G_A(\delta^i_j; \Gamma^i_{jk}) \tag{18}$$

bzw.

$$[F^B_A(A^i_j; 0) - \delta^B_A]\,\omega_B + G_A(A^i_j; 0) = 0 \tag{19}$$

über (s. [3], Satz 6).

(b) Üblicherweise bestimmt

$$\underset{0}{\Gamma}_i \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^k_{ki}$$

die kovariante Ableitung der (gewöhnlichen und Weylschen) Dichten. Für das Objekt $\underset{0}{\Gamma}_i$ gilt das folgende Transformationsgesetz

$$\bar{\Gamma}_i = A^j_i(\Gamma_j - (\ln|\Delta|)_{,j})$$

$$\left(\Delta \overset{\mathrm{df}}{=} \det(\bar{A}^i_j),\ \ {}_{,j} \overset{\mathrm{df}}{=} \frac{\partial}{\partial x^j}\right).$$

Umgekehrt, ist Γ_i eine algebraische Komitante von Γ^j_{ki}, so geht (18) bzw. (19) wegen

$$A^j_i(\ln|\Delta|)_{,j} = \operatorname{sgn}\Delta \cdot \bar{A}^k_{ki}$$

(vgl. [6], Ex. II 2, 1) in

$$\Gamma_i = \omega_i + \underset{0}{\Gamma}_i$$

bzw.

$$(A^j_i - \delta^j_i)\,\omega_j = 0$$

über. Diese letzte ist in einem fixen Punkt von X_n dann und nur dann eine Identität, wenn $\omega_j = 0$ $(j = 1, \dots, n)$ gilt, und wir bekommen

$$\Gamma_i = \underset{0}{\Gamma}_i.$$

(Bezüglich der axiomatischen Untersuchung der kovarianten Ableitungen von Dichten s. [2].)

(c) Herr A. Moór hat in [5] alle solche algebraische Komitanten Π^i_{jk} eines symmetrischen Übertragungsparameters Γ^i_{jk} bestimmt, welche ein Projektivzusammenhang ist

$$\bar{\Pi}^i_{jk} = \bar{A}^i_p A^q_j A^r_k \Pi^p_{qr} + \bar{A}^i_p A^p_{jk} - \frac{1}{n+1}\,(\delta^i_j \bar{A}^m_l A^{\ l}_{mk} + \delta^i_k \bar{A}^m_l A^{\ l}_{mj}).$$

Wir können auch dieses Ergebnis von A. Moór aus unserem Satz herleiten: nach der Folgerung (a) muß Π^i_{jk} die Gestalt

$$\Pi^i_{jk} = \omega^i_{jk} + \underset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$$

haben, wo $\underset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$ nach

$$\underset{0}{\Pi}{}^i_{jk} \overset{\mathrm{df}}{=} \Gamma^i_{jk} - \frac{2}{n+1}\,\delta^i_{(j}\Gamma^m_{k)m}$$

definiert ist, und ω^i_{jk} genügt in einem beliebigen Punkt $\underset{0}{x}$ von X_n (dem (19) entsprechend) die Identitäten

$$(20)\qquad (\bar{A}^i_p A^q_j A^r_k - \delta^{iqr}_{pjk})\,\omega^p_{qr} = 0.$$

Aus (20) können wir z. B. mit Einsetzen

$$A^i_j = 2\,\delta^i_j$$

einsehen, daß ω^i_{jk} verschwindet und Π^i_{jk} wird nach

$$\Pi^i_{jk} = \underset{0}{\Pi}{}^i_{jk}$$

dargestellt (s. A. Moór [5], Satz 1).

(d) Für Tensorfelder von Valenz (p, q), $p \neq q$ ist es bekannt (s. A. Moór [4], Korollar des Satzes 3), daß sie dann und nur dann eine Komitante eines symmetrischen Übertragungsparameters sein können, wenn sie verschwinden. Dieses Resultat ergibt sich aus der Folgerung (a) folgendermaßen: Ist $T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}$, $p \neq q$, eine Komitante von Γ^i_{jk}, so geht (18) bzw. (19) in

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = \omega^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} \tag{21}$$

bzw.

$$(\bar{A}^{i_1}_{a_1} \quad \cdot \bar{A}^{i_p}_{a_p} \quad A^{b_1}_{j_1} \quad \cdot A^{b_q}_{j_q} - \delta^{i_1\ldots i_p b_1\ldots b_q}_{a_1\ldots a_p j_1\ldots j_q})\,\omega^{a_1\ldots a_p}_{b_1\ldots b_q} = 0 \tag{22}$$

über. Aus (22) folgt

$$\omega^{(a)}_{(b)} = 0 \ (^1)$$

und wir erhalten aus (21) das zitierte Ergebnis

$$T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q} = 0\,.$$

(e) Es sei L^i_{jk} ein (in j, k nicht unbedingt symmetrisches) Objekt mit dem Transformationsgesetz (2), das eine algebraische Komitante von Γ^i_{jk} ist. Mit der Definition

$$T^i_{jk} \overset{\mathrm{df}}{=} L^i_{[jk]} \qquad \text{bzw.} \qquad \underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} \overset{\mathrm{df}}{=} L^i_{(jk)}$$

erweist sich T^i_{jk} bzw. $\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$ ein Tensor bzw. wieder ein Objekt mit der Transformationsformel (2). Bezüglich des $\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk}$ liefert die Folgerung (a) die Darstellung

$$\underset{0}{\Gamma}{}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk},$$

gleichzeitig ergibt sich (wegen der Folgerung (d))

$$T^i_{jk} = 0\,.$$

Wir gewannen, daß L^i_{jk} nur in Form

$$L^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$$

eine algebraische Komitante des symmetrischen Übertragungsparameters Γ^i_{jk} sein kann.

(f) Der Ausdruck

$$\underset{0}{\gamma}{}_{ab}{}^{kl}{}_c \overset{\mathrm{df}}{=} \delta^l_b \Gamma^k_{ac} + \delta^k_a \Gamma^l_{bc}$$

---

(1) Falls $p = q$, könnte auch $\omega^{(a)}_{(b)} = \delta^{(a)}_{(b)}$ sein.

bestimmt ein tensorieller Zusammenhang für Tensorfelder mit geraden Zeigern in X_n (vgl. z. B. [7]). Sein Transformationsgesetz ist

(23) $$\bar{\gamma}_{ab}{}^{kl}{}_c = A_a^p A_b^q \bar{A}_r^k \bar{A}_s^l A_c^t \gamma_{pq}{}^{rs}{}_t + \bar{A}_m^k A_{ac}^m \delta_b^l + \bar{A}_m^l A_{bc}^m \delta_a^k.$$

Nehmen wir jetzt an, daß $\gamma_{ab}{}^{kl}{}_c$ eine algebraische Komitante von Γ_{jk}^i, so folgen

$$\gamma_{ab}{}^{kl}{}_c = \omega_{ab}{}^{kl}{}_c + \underset{0}{\gamma}_{ab}{}^{kl}{}_c,$$

$$(A_a^p A_b^q \bar{A}_r^k \bar{A}_s^l A_c^t - \delta_{abrsc}^{pqklt})\, \omega_{pq}{}^{rs}{}_t = 0$$

aus (23) und aus der Folgerung (a). Die letzte Identität besteht nur im Falle $\omega_{ab}{}^{kl}{}_t = 0$ und wir gewinnen für $\gamma_{ab}{}^{kl}$ die Darstellung

$$\gamma_{ab}{}^{kl}{}_c = \underset{0}{\gamma}_{ab}{}^{kl}{}_c.$$

(g) Im Falle $n = 2$ setzen wir schließlich voraus, daß $\Omega = \varphi(\Gamma_{jk}^i)$ ein Pensovsches Objekt (s. z. B. [1], S. 14., Beispiel 7.) ist

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{A}_1^1 + \bar{A}_2^1 \Omega}{\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 \Omega}.$$

Aus (4) folgt

$$\Omega = 1/\omega.$$

ω erfüllt nach (5) in einem beliebigen fixen Punkt $\underset{0}{x}$ von X_n die Identität

$$\omega = \frac{\bar{A}_1^1 + \bar{A}_2^1 \omega}{\bar{A}_1^2 + \bar{A}_2^2 \omega} \quad \left(\begin{vmatrix} \bar{A}_1^1 & \bar{A}_2^1 \\ \bar{A}_1^2 & \bar{A}_2^2 \end{vmatrix} \neq 0 \right),$$

d. h.

(24) $$\bar{A}_2^2 \omega^2 + (\bar{A}_1^2 - \bar{A}_2^1)\omega - \bar{A}_1^1 = 0.$$

In (24) kann man die Werte $\bar{A}_1^1$, $\bar{A}_2^1$, $\bar{A}_1^2$, $\bar{A}_2^2$ (abgesehen von der Forderung $\bar{A}_1^1 \bar{A}_2^2 - \bar{A}_2^1 \bar{A}_1^2 \neq 0$) nach Belieben wählen, folglich ist (24) widerspruchsvoll. Wir können daher festlegen, daß ein Pensovsches Objekt keine Komitante eines symmetrischen Übertragungsparameters sein kann.

Wir bemerken, daß unserer Satz (mit seinem Beweis) auch in Linienelementräumen oder auch in allgemeineren Stützelementenräumen (z. B. Kawaguchischen Räumen), in den die Richtungskoordinanten der Stützelementen tensorielle oder tensordichtenartige sind, gültig ist.

Literaturverzeichnis

[1] J. Aczél und St. Gołąb, *Funktionalgleichungen der Theorie der geometrischen Objekte*, Warszawa 1960.

[2] M. Kucharzewski, *Kovariante Ableitung der Skalare und Dichten*, Prace Mat. (1959), p. 61-70.

[3] I. Makai, *Differentialkomitanten in verschiedenen differential-geometrischen Räumen*, Dissertation, Debrecen 1970 (ungarisch).

[4] A. Moór, *Über Tensoren, die aus angegebenen geometrischen Objekten gebildet sind*, Publ. Math., Debrecen, 6 (1959), p. 15-25.

[5] — *Über projektive geometrische Invarianten*, Publ. Math., Debrecen, 8 (1961), p. 350-359.

[6] J. A. Schouten, *Ricci-Calculus*, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[7] L. Tamássy, *Über den Affinzusammenhang von, zu Tangentialräumen gehörenden Produkträumen*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. XI (1960), p. 65-82.

Reçu par la Rédaction le 21. 9. 1970