ANNALES
POLONICI MATHEMATICI
XXXIV (1977)

Über aus einem k-Bein bildbare Übertragungsparameter

von A. Moór (Sopron, Ungarn)

Zusammenfassung. Es wird gezeigt, daß in einem n-dimensionalen Punktraum aus einem kovarianten k-Bein $\underset{(\beta)}{e}_i(x)$ keine Übertragungsparameter $\Gamma^i_{jk}(x)$ gebildet werden können, falls $k < n$ ist. Im Falle $k = n$ ist aber bekanntlich die Konstruktion möglich. Eine Größe von der Transformationsformel

$$\bar{\Gamma}_{jik}(\bar{x}) = \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}\frac{\partial x^s}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^k}\Gamma_{rst}(x) = \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^t}{\partial \bar{x}^i}\underset{(\beta)}{e}_r \underset{(\beta)}{e}_t$$

kann schon aber auch im Fall $k < n$ vom k-Bein $\underset{(\beta)}{e}_i(x)$ gebildet werden.

1. Einleitung. In unserem Aufsatz: *Über die aus kovarianten Vektoren gebildeten Übertragungsparameter* (1) haben wir gezeigt, daß aus den Gradientvektoren p_i und q_i des n-dimensionalen Punktraumes P_n, ferner aus $\partial_i p_a$, $\partial_j q_a$ keine Übertragungsparameter $\Gamma^i_{jk}(x)$ mit der Transformationsformel

$$\Gamma^i_{jk}(\bar{x}) = A^r_j \bar{A}^i_s A^t_k \Gamma^s_{rt}(x) + A^r_{jk}\bar{A}^i_r, \tag{1.1}$$

$$A^r_j \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x^r}{\partial \bar{x}^j}, \quad \bar{A}^i_s \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^s}, \quad A^r_{jk} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \tag{1.2}$$

gebildet werden kann, falls $n > 2$ ist. Jetzt und im folgenden werden wir die Koordinaten $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ eines Punktes von P_n immer durch x bezeichnen.

Wir wollen im folgenden das Problem untersuchen, ob aus einem kovarianten k-Bein $\underset{(\beta)}{e}_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n;\ \beta = 1, 2, \ldots, k)$ des n-dimensionalen Punktraumes P_n Übertragungsparameter $\Gamma^i_{jk}(x)$ bestimmt werden können. Die $\Gamma^i_{jk}(x)$ sollen in den j, k symmetrisch sein, und die Vektoren $\underset{(\beta)}{\vec{e}}$ sollen selbstverständlich linear unabhängig sein. In der Bezeichnung $\underset{(\beta)}{e}_i$ bedeutet der griechische Index β den β-ten Vektor $\underset{(\beta)}{\vec{e}}$, der lateinische Index i aber die i-te Komponente von $\underset{(\beta)}{\vec{e}}$. Wir nehmen noch an,

(1) Vgl. Demonstratio Mathematica 6 (1973), s. 295–307.

daß $2 \leqq k \leqq n$ ist, ferner, daß im folgenden die griechischen Indizes α, β, γ die Zahlen $1, 2, \ldots, k$, und die lateinischen Indizes die Zahlen $1, 2, \ldots, n$ durchlaufen werden. Mit ϱ werden wir die Zahlen $(k+1), \ldots, n$ bezeichnen.

2. Über die Konstruktion von $\Gamma^i_{jk}(x)$. Wollen wir $\Gamma^i_{jk}(x)$ von dem k-Bein $\underset{(\beta)}{\vec{e}}$ bestimmen, so müssen wir offenbar außer den Vektorkomponenten $\underset{(\beta)}{e_i}$ auch die Ableitungen $\partial_j \underset{(\beta)}{e_i}$ benützen, da in der Transformationsformel (1.1) auch die A^r_{jk} vorkommen; diese Größen sind aber in den Transformationsformeln der Vektoren $\underset{(\beta)}{e_i}$ nicht vorhanden. Die entsprechenden Transformationsformeln sind nämlich:

$$\bar{\underset{(\beta)}{e_i}} = A^r_i \underset{(\beta)}{e_r}, \tag{2.1a}$$

$$\overline{\partial_j \underset{(\beta)}{e_i}} \equiv \partial_{\bar{j}} \underset{(\beta)}{\bar{e}_i} = A^r_i A^s_j \partial_s \underset{(\beta)}{e_r} + A^r_{ij} \underset{(\beta)}{e_r}. \tag{2.1b}$$

Bezeichnen wir nun den symmetrischen bzw. schiefsymmetrischen Teil von $\partial_b \underset{(\beta)}{e_a}$ durch $\underset{(\beta)}{e_{ab}}$ bzw. $\underset{(\beta)}{h_{ab}}$, d. h. ist

$$\underset{(\beta)}{e_{ab}} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(\partial_b \underset{(\beta)}{e_a} + \partial_a \underset{(\beta)}{e_b}), \qquad \underset{(\beta)}{h_{ab}} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(\partial_b \underset{(\beta)}{e_a} - \partial_a \underset{(\beta)}{e_b}),$$

so können wir auf Grund von

$$\partial_b \underset{(\beta)}{e_a} \equiv \underset{(\beta)}{e_{ab}} + \underset{(\beta)}{h_{ab}}$$

die Abhängigkeit von Γ^i_{jk} von den $\underset{(\beta)}{e_i}$ und $\partial_b \underset{(\beta)}{e_i}$ durch die Abhängigkeit von $\underset{(\beta)}{e_a}$, $\underset{(\beta)}{e_{ab}}$ und $\underset{(\beta)}{h_{ab}}$ ersetzen. Somit wird

$$\Gamma^i_{jk} = F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}). \tag{2.2}$$

Die Einsteinsche Summationskonvention soll selbstverständlich auf doppelt vorkommende Indizes gelten; in solchen Fällen aber, wo die einzelnen Größen durch einen Strich von einander getrennt sind, wie in unserer letzten Formel, dann soll die Einsteinsche Summationskonvention in bezug auf diese Größen nicht bestehen.

Die Funktionen $F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}})$ sollen in allen ihren Veränderlichen stetig sein, sonst aber sollen sie keinen weiteren Regularitätsbedingungen genügen. Wir beweisen nun den folgenden

SATZ 1. *Es können aus dem linear unabhängigen k-Bein $\underset{(\beta)}{e_a}$ und aus den Größen $\partial_b \underset{(\beta)}{e_a}$ des n-dimensionalen Punktraumes die symmetrischen Übertragungsparameter $\Gamma^i_{jk}(x)$ mit der Transformationsformel* (1.1) *dann und nur dann gebildet werden, falls $k = n$ ist.*

Beweis. Nach einer Koordinatentransformation $x^i = x^i(\bar{x})$, die umkehrbar und mindestens zweimal stetig differenzierbar sein soll, bekommt man nach (2.2)

$$\Gamma^i_{jk}(\bar{x}) = F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{\bar{e}_a}, \underset{(\beta)}{\bar{e}_{ab}}, \underset{(\beta)}{\bar{h}_{ab}}). \tag{2.2a}$$

Auf Grund der Formeln (1.2), (2.1a) und (2.1b) folgen die Transformationsformeln:

$$\underset{(\beta)}{\bar{e}_{ab}} = A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{e_{rs}} + A^r_{ab} \underset{(\beta)}{e_r}, \qquad \underset{(\beta)}{\bar{h}_{ab}} = A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{h_{rs}}, \tag{2.3}$$

womit nach (1.1), (2.2) und (2.2a) das Funktionalgleichungssystem

$$\begin{aligned} F^i_{jk}(A^r_a \underset{(\beta)}{e_r}, A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{e_{rs}} + A^r_{ab} \underset{(\beta)}{e_r}, A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{h_{rs}}) \\ = A^r_j \bar{A}^i_s A^t_k F^s_{rt}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) + A^r_{jk} \bar{A}^i_r \end{aligned} \tag{2.4}$$

bestehen wird, wo die Unbekannten die A^r_a und A^r_{ab} sind. (2.4) ist offensichtlich mit (1.1) äquivalent. Da wegen der Umkehrbarkeit der Koordinatentransformation $\mathrm{Det}(A^r_a) \neq 0$ gültig ist, sind die inversen Größen $\bar{A}^a_t$ durch

$$A^r_a \bar{A}^a_t = \delta^r_t \tag{2.5}$$

eindeutig festgelegt.

Es sei jetzt in einem beliebigen, aber fest gewählten Punkt $(x^1, \ldots, x^n)$ von P_n $A^r_a = \delta^r_a$, wo δ das Kronecker-δ bedeutet, so wird nach (2.5) auch $\bar{A}^i_r = \delta^i_r$, die Formel (2.4) geht somit in das Funktionalgleichungssystem

$$F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}} + A^r_{ab} \underset{(\beta)}{e_r}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) + A^i_{jk} \tag{2.6}$$

über.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann angenommen werden, daß

$$\mathrm{Det}(\underset{(\beta)}{e_\gamma}) \neq 0 \tag{2.7}$$

gilt. Nach unserer Annahme ist nämlich wegen der linearen unabhängigkeit der Vektoren $\underset{(\beta)}{\vec{e}}$

$$\mathrm{Rang}\{\underset{(\beta)}{e_a}\} = k,$$

wo die Klammern die aus $\underset{(\beta)}{e_a}$ gebildete Matrix bedeuten. (2.7) bedeutet dann, daß eben die k ersten Komponenten die von Null verschiedene Determinante bilden.

Die Relation (2.7) sichert nun die Existenz der Inverse von $\underset{(\beta)}{e_a}$, d. h.:

$$c^{\gamma a} \underset{(\beta)}{e_a} = \delta^\gamma_\beta \tag{2.8}$$

ist bezüglich $c^{\gamma a}$ eindeutig lösbar. Wählen wir jetzt in (2.6)

$$A^a_{ab} = -\underset{(\beta)}{e_{ab}} c^{\gamma a}, \quad A^\varrho_{ab} = 0 \quad (\varrho = (k+1), \ldots, n), \tag{2.9}$$

so wird in Hinsicht auf (2.8)

$$F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, 0, \ldots, 0, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) - A^i_{jk}, \tag{2.10}$$

wo aber für A^i_{jk} noch die Relationen (2.9) gelten. Das bedeutet im wesentlichen, daß (2.10) in zwei Formeln zerfällt, je nachdem der Index i die Werte $1, 2, \ldots, k$ bzw. $(k+1), \ldots, n$ annimmt. Die rechte Seite von (2.10) ist offenbar für $i = \varrho$ von $\underset{(\beta)}{e_{ab}}$ unabhängig; statt (2.10) kann man also

$$F^a_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = \Phi^a_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) + \underset{(\gamma)}{e_{ab}} c^{\gamma a}, \tag{2.11a}$$

$$F^\varrho_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = \Phi^\varrho_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) \quad (\varrho = (k+1), \ldots, n), \tag{2.11b}$$

schreiben, wo

$$\Phi^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) \overset{\text{def}}{=} F^i_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, 0, \ldots, 0, \underset{(\beta)}{h_{ab}})$$

bedeutet.

Die Formeln (2.11) bestimmen nun nach (2.2) die Übertragungsparameter Γ^i_{jk}, sie werden dem Funktionalgleichungssystem (2.6), und somit selbstverständlich auch das mit (1.1) gleichwertigen System (2.4) nicht genügen, da wenn in (2.6) $i = \varrho$ genommen wird, so erhält man nach (2.11b):

$$\Phi^\varrho_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = \Phi^\varrho_{jk}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) + A^\varrho_{jk},$$

was nur bei $A^\varrho_{jk} = 0$ bestehen kann.

Wir müssen noch zeigen, daß im Falle $k = n$ die Konstruktion für Γ^i_{jk} möglich ist. Das ist aber in trivialer Weise erfüllt, wenn

$$g_{ab} \overset{\text{def}}{=} \underset{(r)}{e_a} \underset{(r)}{e_b} \tag{2.12}$$

als der metrische Grundtensor einer Riemannschen Geometrie betrachtet wird. Γ^i_{jk} sind dann eben die Christoffelschen Symbole.

3. Über die Konstruktion von $\Gamma_{jik}(x)$. Nehmen wir jetzt an, daß die Γ^i_{jk} die Christoffelschen Klammern eines Riemannschen Raumes sind. Kontrahieren wir den Index i wit g_{im} benutzen wir dann für g_{im} die Darstellung (2.12), so erhalten wir nach entsprechenden Vertauschungen der Indizes eine Größe Γ_{jik}, deren Transformationsformel nach (1.1) die Form

$$\bar{\Gamma}_{jik}(\bar{x}) = A^r_j A^s_i A^t_k \Gamma_{rst}(x) + A^s_{jk} A^t_i \underset{(r)}{e_s} \underset{(r)}{e_t} \tag{3.1}$$

hat. Γ_{jik} ist also kein geometrisches Objekt, man kann aber aus Γ_{jik} das geometrische Objekt Γ^i_{jk} bilden, falls der inverse Tensor von $\underset{(r)}{e_s}\,\underset{(r)}{e_t}$ existiert. Wir wollen nun untersuchen, ob aus einem k-Bein $\underset{(\beta)}{e_i}$ die entsprechende Größe mit der Transformationsformel

$$\bar{\Gamma}_{jik}(\bar{x}) = A^r_j A^s_i A^t_k \Gamma_{rst}(x) + A^s_{jk} A^t_i \underset{(\beta)}{e_s}\,\underset{(\beta)}{e_t} \tag{3.2}$$

konstruiert werden kann, wo jetzt auf den Index: β selbstverständlich nur von 1 bis k summiert werden soll. Da wir die Annahme $k \leqslant n$ gestellt haben, sieht man, daß für $k = n$ die Transformationsformeln (3.1) und (3.2) übereinstimmen.

Wir beweisen nun den folgenden

Satz 2. *Die Größe $\Gamma_{jik}(x)$ von der Transformationsformel* (3.1) *ist aus $\underset{(\beta)}{e_a}$, $\partial_b \underset{(\beta)}{e_a}$ immer bildbar, und sie hat die Form:*

$$\bar{\Gamma}_{jik}(x) = \underset{(\alpha)}{e_{jk}}\,\underset{(\alpha)}{e_i} + \Phi_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}),$$

wo Φ_{jik} einen in j, k symmetrischen, aber nur aus $\underset{(\beta)}{e_a}$, $\underset{(\theta)}{h_{ab}}$ gebildeten rein kovarianten Tensor dritter Stufe bedeutet.

Beweis. Nach unserer Annahme hat Γ_{jik} die Form

$$\Gamma_{jik} = G_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}), \tag{3.4}$$

wo die Funktionen G_{jik} in allen ihren Veränderlichen stetig sein sollen. Schreiben wir jetzt $\bar{\Gamma}_{jik}$, die sich von (3.4) nur darin unterscheiden, daß jetzt G_{jik} von den $\underset{(\beta)}{\bar{e}_a}$, $\underset{(\beta)}{\bar{e}_{ab}}$ und $\underset{(\beta)}{\bar{h}_{ab}}$ abhängig sind, so gibt die Transformationsformel (3.2) auf Grund der Formeln (2.1a) und (2.1b) das Funktionalgleichungssystem:

$$\begin{aligned} G_{jik}(A^r_a \underset{(\beta)}{e_r}, A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{e_{rs}} + A^r_{ab} \underset{(\beta)}{e_r}, A^r_a A^s_b \underset{(\beta)}{h_{rs}}) \\ = A^r_j A^s_i A^t_k G_{rst}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) + A^r_{jk} A^t_i \underset{(\beta)}{e_r}\,\underset{(\beta)}{e_t}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Wählen wir jetzt für die A^r_a das Kronecker-δ, setzen wir also in (3.5) $A^r_a = \delta^r_a$, wählen wir ferner für A^r_{ab} die Größen (2.9), so geht (3.5) in

$$G_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{e_{ab}}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) = \underset{(\beta)}{e_{jk}}\,\underset{(\beta)}{e_i} + \Phi_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) \tag{3.6}$$

über, wo

$$\Phi_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, \underset{(\beta)}{h_{ab}}) \overset{\text{def}}{=} G_{jik}(\underset{(\beta)}{e_a}, 0, \ldots, 0, \underset{(\beta)}{h_{ab}})$$

bedeutet. Berechnen wir die Transformationsformeln von $\underset{(\beta)}{e_{jk}}\,\underset{(\beta)}{e_i}$ auf Grund der Formeln (2.3), so folgt nach Substitution von (3.6) in (3.5), daß die

Funktionen Φ_{jik} einen rein kovarianten Tensor bilden müssen. Das beweist den Satz 2, da offenbar auch $\Phi_{jik} \equiv 0$ möglich ist.

Zuletzt wollen wir noch zeigen, daß in (3.6) nicht unbedingt $\Phi_{jik} \equiv 0$ gelten muß. Es ist

$$g^{*}_{ji} \overset{\text{def}}{=} \underset{(\beta)}{e_j}\,\underset{(\beta)}{e_i} \tag{3.7}$$

ein in j, i symmetrischer Tensor zweiter Stufe. Ist $\beta = 1, 2, \ldots, k$ und ist $k < n$, so ist offenbar $\mathrm{Det}(g^{*}_{ji}) = 0$. (Das kann z. B. ebenso bewiesen werden, wie in unserem im Fußnote (1) zitierte Arbeit auf den Seiten 295–297 im Lemma 1.) Die inversen Größen von g^{*}_{ji} existieren also nicht, der Tensor $g^{*}_{ji}(x)$ ist aber in jedem Punkte von P_n definiert; bilden wir mit Hilfe von g^{*}_{ji} die Christoffelschen Symbole erster Art:

$$\gamma_{jik} \overset{\text{def}}{=} \tfrac{1}{2}(\partial_k g^{*}_{ji} + \partial_j g^{*}_{ik} - \partial_i g^{*}_{jk}),$$

so wird nach (3.7):

$$\gamma_{jik} = \underset{(\beta)}{e_i}\,\underset{(\beta)}{e_{jk}} + \underset{(\beta)}{e_j}\,\underset{(\beta)}{h_{ik}} + \underset{(\beta)}{e_k}\,\underset{(\beta)}{h_{ij}}$$

und das hat eben die Form (3.6). Die Transformationsformel von γ_{jik} stimmt mit der von Γ_{jik}, d. h. mit (3.2) überein, wie das nach (2.1a) und (2.3) leicht bestätigt werden kann. Da aber der inverse Tensor g^{*ij} von g^{*}_{ji} im Falle $k < n$ nicht existiert, kann man den Index i nicht heraufziehen.

Reçu par la Rédaction le 28. 9. 1974